

Véges sorkapacitású egykiszolgálós várakozási-idejő
problémájáról

Tomkó József

Tekintsünk egy MI/G/1 kiszolgáló rendszert azon feltevés mellett, hogy csak véges számú igény várakozhat a sorban. Részletesebben, a következő egykiszolgálós várakozási problémáról lesz szó: egyetlen kiszolgáló készülékhez $\lambda > 0$ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek az igények. A kiszolgálási időtartam minden egyes igényre nézve egy s ugyanazon konstans érték. Az egyszerűség kedvéért válasszuk ezt a konstans értéket "1"-nek. Ha egy igény beérkezési pillanatában a kiszolgáló készülék foglalt, akkor ez az igény csatlakozik a már esetleg várakozók csoportjához az esetben, ha az adott pillanatban a várakozók száma nem ért el bizonyos "n" számot. Ha viszont a várakozók száma már "n", akkor a beérkezett igény elvész.

Tegyük fel, hogy a rendszer üres a $t = 0$ időpillanatban, s legyen az első igény beérkezési időpillanata ξ_0 . Az ξ_0 pillanatban elkezdődik az első igény kiszolgálása. Ha a következő igény beérkezési ideje az egységet meghaladja, akkor ennek az igénynek ismét várakozás nélkül kezdődhet el a kiszolgálása s a készüléknek az első igény kiszolgálásával kezdődő foglaltsági periódusa csak egységnyi ideig tart. Ha viszont a második igény beérkezik,

mielőtt az első igény kiszolgálása befejeződött volna, akkor a készüléknek az első igény kiszolgálása kezdetétől számított foglaltsági periódusa az egységnél hosszabb lesz. Az igények egymásutáni beérkezésétől függően a készülék foglaltsági periódusa véletlen hosszúságú.

Jelöljük a készülék első foglaltsági periódusának hosszát $\delta_1^{(n)}$ -gyel (a felső zárójeles index arra utal, hogy máximalisan "n" igény várakozhat a rendszerben). Az

$\xi_0 + \delta_1^{(n)}$ pillanatban a készülék újból szabaddá válik bizonyos ξ_1 időtartamra. Majd ismét elkezdődik egy foglaltsági periódusa és így tovább; az idő folyamán a $\delta_1^{(n)}$ foglaltsági és az ξ_1 szabad periódusok változtatják egymást. Feltevéseinkből következik, hogy az ξ_1 -k független, közös $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók és hogy a $\delta_1^{(n)}$ foglaltsági periódushosszak is függetlenek a azonos eloszlásúak. Ezen utóbbi közös eloszlásfüggvényt $G_n(x)$ -szel fogjuk jelölni:

$$/1/ \quad G_n(x) = P \{ \delta_1^{(n)} \leq x \}$$

Esetünkben a készülék foglaltsági periódushossza csak pozitív egész értékeket vehet fel. Ezért az /1/ eloszlás diszkrét eloszlás.

A kiszolgáló rendszerünknek az alkalmazások szempontjából igen fontos karakterisztikája a várakozási idő eloszlása. Jelölje

$$/2/ \quad \eta^{(n)}(t), \quad 0 \leq t < \infty$$

a t pillanatban esetleg beérkező igény várakozási idejét, feltéve, hogy e pillanatban beérkező igény nem vesz el. Szokás az $\eta^{(n)}(t)$ -t virtuális várakozási időnek nevezni. Eltérően az $n = \infty$ esettől, általában a /2/ folyamat nem Markov típusu. Ez azt jelenti, hogy csupán az $\eta^{(n)}(t)$ érték ismerete alapján semmit sem mondhatunk az $\eta^{(n)}(t+h)$ várakozási idő lehetséges értékei felől. Csak az $\eta^{(n)}(t)$ értéket ismerve, még azt sem mondhatjuk meg, milyen valószínűséggel lesz értelmezett az $\eta^{(n)}(t+h)$ virtuális várakozási idő. Erre való tekintettel eléggé bonyolultnak látszik a /2/ folyamat /virtuális várakozási idő/

$$/3/ \quad W_n(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P \{ \eta^{(n)}(t) \leq x \}^*$$

* /3/ jobboldalán álló $\{ \eta^{(n)}(t) \leq x \}$ eseményről nyilván csak akkor beszélhetünk, ha az $\eta^{(n)}(t)$ mennyiség értelmezett, azaz, ha a t pillanatban várakozó igények száma " n "-nél kisebb. A rövidebb írásmód kedvéért szándékosan a megfelelő valószínűség bevezetésénél erről nem tettünk említést, s a továbbiakban megállapodunk abban, hogy az $\{ a < \eta^{(n)}(t) \leq b \}$ típusu esemény valószínűségén mindig az $\{ \eta^{(n)}(t) \text{ értelmezett és } a < \eta^{(n)}(t) \leq b \}$ esemény valószínűségét értjük.

ergodikus eloszlásának meghatározása.

Más igen fontos karakterisztikája az adott kiszolgáló rendszernek a vesztesi valószínűség. Ezt a valószínűséget meghatározzák a rendszer ugynevezett állapotvalószínűségei

$$/4/ \quad P_k^{(n)}(t) = P \{ \xi^{(n)}(t) = k \}, \quad 0 \leq k \leq n+1.$$

Itt $\xi^{(n)}(t)$ -vel jelöltük a rendszerben tartózkodó igények t pillanatbeli számát. Az állapotvalószínűségekkel kapcsolatosan is a fő figyelem az ergodikus eset vizsgálatára irányul, azaz a

$$/5/ \quad P_k^{(n)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k^{(n)}(t), \quad 0 \leq k \leq n+1$$

határvalószínűségek meghatározására.

Fő problémaként a /3/ ill. az /5/ ergodikus valószínűségek meghatározását említettük, figyelmen kívül hagyva azt a kérdést, vajon léteznek-e egyáltalán ezek a határeloszlások. A tekintendő kiszolgáló rendszerünkre bármilyen véges n és $\lambda > 0$ mellett a /3/ és az /5/ ergodikus valószínűségek létezése csaknem magától értetődő. Meg kívánjuk jelezni, hogy $n = \infty$ esetén ezeknek a határvalószínűsé-

geknek a létezése már nem ennyire világos, s a kérdésre pozitív válasz csak $0 < \lambda < 1$ esetén adható, $\lambda > 1$ esetén pedig mind a /3/, mind az /5/ mennyiségek azonosan zérusak.

Erdekes viszont megjegyezni, hogy míg $n = \infty$ és $0 < \lambda < 1$ esetén a /3/ ill. az /5/ ergodikus eloszlásokra a Laplace-Stieltjes transzformáltak; illetve a generátorfüggvények terminológiájában igen egyszerű formulák adhatók meg /általános eloszlású véletlen kiszolgálási időtartamok esetén is/, addig véges n -re az /5/ valószínűségek igen bonyolult formulával adhatók csak meg, a /3/ ergodikus eloszlással kapcsolatosan pedig még nem is ismeretesek általános érvényű formulák.

Az irodalomban főként az ergodikus állapotvalószínűségek, többek között a veszteségi valószínűség meghatározásának problematikája tisztázott a legnagyobb mértékben (lásd pl. [1]). A foglaltsági periódushossz eloszlásának vizsgálatával a jelen dolgozat szerzője foglalkozott. Többek között [2] -ben igazolta, hogy tetszőleges n és $\lambda > 0$ mellett $G_n(\infty) = 1$ és hogy a

$$\mu_n = M \delta^{(n)}$$

várható értékek végesek, s meghatározta a $\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k z^k$ generátorfüggvényt is. Ebben a dolgozatá-

ban a szerző igazolta az alábbi határeloszlás tételt is;

1. Tétel. Tetszőleges $n \geq 1$ -re

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{d^{(n)}}{\mu_n} < t \right\} = 1 - e^{-t}$$

Észrevette a szerző azt is, hogy ha a χ_i beszélgetési időtartamok független, azonos eloszlású, véges $M\chi_i = 1$ várható értékű és véges $D^2(\chi_i) = \sigma^2 > 0$ szórásnégyzetű valószínűségi változók, akkor az $\eta^{(n)}(t)$ várakozási idővel kapcsolatosan a stacionárius esetben érvényes az alábbi

2. Tétel. $\lambda > 1$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\eta^{(n)}(t) - n}{\sigma \sqrt{n}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

E tétel bizonyításával a szerző egy későbbi dolgozatban szándékozik foglalkozni.

Fordítsuk most figyelmünket a kiindulási feltételeink esetére, azaz azon esetre, amikor a beszélgetési időtartamok nem véletlenek, hanem konstans egységnyi értékűek. Erre az esetre a 2. tétel nem érvényes. Viszont az, hogy a beszélgetési időtartamok konstansak, bizonyos mértékig egyszerűsíti a helyzetet s lehetőség nyílik a $W_n(x)$ eloszlásfüggvényre elég egyszerű formulát adni. Dolgozatunk

célja éppen ennek a bemutatása. Rámutatunk majd arra is, milyen problémák merülnek fel a közölt eljárásnak az általános esetre történő alkalmazásánál. Mielőtt rátérnénk a feladatunk végrehajtására, közlünk néhány - a továbbiak során felhasználásra kerülő - eredményt az ún. felújítási elméletből.

Legyenek $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ független, nem negatív, esetleg a γ_1 -től eltekintve azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy ez a közös eloszlás nem rácsos, azaz nincs olyan d , amelyre a $P\{\gamma_1 = l \cdot d\}$ ($l=0,1,2,\dots$) valószínűségek összege 1-et adna. Értelmezzük az N_t ($0 \leq t < \infty$) folyamatot a következőképpen:

$$N_t = \max_n \sum_1^n \gamma_i \leq t$$

Részletesebben

$$N_t = \begin{cases} 0, & \text{ha } \gamma_1 > t, \\ n, & \text{ha } \sum_1^n \gamma_i \leq t < \sum_1^{n+1} \gamma_i \end{cases}$$

Az N_t ($0 \leq t < \infty$) folyamatot szokás a $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ valószínűségi változó sorozat által meghatározott (generált) felújítási folyamatnak nevezni. Szemléletesen N_t

jelenti a $(0, t]$ időközben végrehajtott felújítások számát, ha a γ_i -ket valamely objektum élettartamaként interpretáljuk, s feltesszük, hogy az objektumokat az élettartamuk lejártával (elromlásuk pillanataiban) ujakkal helyettesítjük. Egyik legfontosabb jellemző mennyisége a felújítási folyamatnak a

$$H(t) = M\{N_t\}$$

várható érték, melyet felújítási függvénynek szokás nevezni. A legegyszerűbb ugynevezett "elemi felújítási tétel" azt állítja, hogy $M\gamma_i = \mu < \infty$ esetén

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

Számunkra az ennél jóval nehezebben igazolható ún.

Blackwell-tétel játszik majd fontos szerepet. E tétel szerint $M\gamma_i = \mu < \infty$ esetén tetszőleges $h > 0$ mellett

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t+h) - H(t) = \frac{h}{\mu}.$$

E tételek bizonyítását az olvasó megtalálhatja több dolgozatban, könyvben (pl. [3] -ban).

Térjünk most át ezek után a kitűzött feladatunk végrehajtására. Vezessük be először a következő valószínűségeket:

$$\pi_{k,l} = P \left\{ \begin{array}{l} \text{a foglaltsági periódus alatt } k\text{-nál több kiszolgálás} \\ \text{megy végbe s ekközben a } k\text{-adik kiszolgálás befejező-} \\ \text{dését követő pillanatban } l \text{ igény marad a várakozók} \\ \text{sorában} \end{array} \right\}$$

Tekintsük a $\{z^{(n)}(t)\}$ (a rendszerben tartózkodó igények t pillanatbeli számát jelentő) folyamattal kapcsolatos ugynevezett beágyazott Markov-láncot, a

$$/6/ \quad \{z_r^{(n)} = z^{(n)}(G_r + 0) \quad , \quad (r = 1, 2, \dots)$$

sorozatot. Itt G_r az egymásutáni kiszolgálások befejeződési pillanatait jelölik, $\{z^{(n)}(G_r + 0)\}$ pedig a rendszerben tartózkodó igények számát közvetlenül egy ilyen pillanat után. A bevezetett $\pi_{k,l}$ valószínűségek nem mások, mint a /6/ Markov-lánc k -lépéses átmenet valószínűségei, ahol l a kezdő állapot, s feltételeztünk még, hogy a k -adik lépésig a lánc egyetlen egyszer sem jut a 0-állapotba. Ezek szerint

$$\pi_{k,l} = P \left\{ z_k^{(n)} = l+1 \quad z_i^{(n)} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k-1 \mid z_0^{(n)} = 1 \right\}$$

A jelölésekkel kapcsolatosan még hozzátesszük, hogy a foglaltsági periódust a $t=0$ pillanatban kezdődőnek tételezzük fel, s $z_0^{(n)}$ az e pillanatban beérkezett s azon nyomban kiszolgálás alá kerülő egyetlen igényt (azaz ennek számát) jelenti. Egyszerű megfontolásokkal beláthatók a következő rekurzív összefüggések:

$$/7/ \quad \pi_{l,l} = \begin{cases} p_{l+1}, & \text{ha } 0 \leq l < n-1 \\ r_n, & \text{ha } l = n-1 \end{cases}$$

$$/8/ \quad \pi_{k,l} = \begin{cases} \sum_{s=0}^{l+1} \pi_{k-1,s} p_{l-s+1}, & \text{ha } 0 \leq l < n-1 \\ \sum_{s=0}^{n-1} \pi_{k-1,s} r_{n-s}, & \text{ha } l = n-1 \end{cases}$$

Itt p_l, r_l ; ($l=0,1,\dots$) mennyiségek a következőket jelentik;

$p_l = P \{ \text{egy kiszolgálás alatt } l \text{ igény érkezik be} \}$

$r_l = P \{ \text{egy kiszolgálás alatt legalább } l \text{ igény beérkezik} \}$

Feltevéseinkből kifolyólag

$$p_l = \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda}$$

továbbá, világos, hogy

$$r_l = \sum_{s=l}^{\infty} p_s$$

Kepezzük most a $\pi_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k,r} z^k$, ($0 \leq r \leq n-1$) generátor-függvényeket. Rögzítsük r értékét, majd ennek megfelelően /7/ ill. /8/ mindkét oldalát szorozzuk meg z ill. z^k -val. Összegezzük az így kapott egyenlőségeket $k \geq 1$ értékekre, majd felcserélve a $k \geq 2$ értékek mellett a jobboldalon előforduló kettős összeg összegzési sorrendjét, az alábbi egyenletekhez jutunk:

$$/9/ \quad \begin{cases} 0 \leq r < n-1 \text{ -re} \\ \pi_r(z) = z p_{r+1} + z \sum_{s=0}^{r+1} p_{r-s+1} \pi_s(z) \\ r = n-1 \text{ -re} \\ \pi_{n-1}(z) = z r_n + z \sum_{s=0}^{n-1} r_{n-s} \pi_s(z) \end{cases}$$

Ezek az összefüggések a $\pi_0(z), \pi_1(z), \dots, \pi_{n-1}(z)$ generátorfüggvényekre egy lineáris inhomogén egyenlet-rendszert szolgáltatnak, amelyből ezek a függvények egyértelműen meghatározhatók.

Értelmezzük most a készülék ε_1 szabad és a $\delta_i^{(n)}$ foglaltsági periódushosszaival a

$$\gamma_1 = \varepsilon_0$$

$$\gamma_i = \delta_i^{(n)} + \varepsilon_i, \quad i \geq 1$$

valószínűségi változók sorozatát és tekintsük e sorozat által meghatározott N_t felújítási folyamatot. A továbbiakban $H(t)$ e folyamat felújítási függvényét fogja jelölni. Az említett Blackwell tételben előforduló μ szerepét most az

$$M\{\delta_i^{(n)} + \varepsilon_i\} = \mu_n + \frac{1}{\lambda}$$

várható érték veszi át.

Legyen ezután $t > 0$ és tekintsük az esetleg e pillanatban érkező és el nem vesző igény várakozási idejét, $\gamma^{(n)}(t)-t$. Az $\gamma^{(n)}(t) = 0$ esemény ekvivalens azzal, hogy a t pillanatban a rendszer üres. Tehát

$$P\{\gamma^{(n)}(t) = 0\} = P_0^{(n)}(t)$$

Mint hogy mind $M\delta_i^{(n)}$, mind $M\epsilon_i$ véges, elég egyszerű meg gondolásokkal kapjuk, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\eta^{(n)}(t) = 0\} = \frac{M\epsilon_i}{M\epsilon_i + M\delta_i^{(n)}} = \frac{\lambda}{1 + \lambda\mu_n}$$

Általában $0 \leq \eta^{(n)}(t) \leq n$. Ha $\eta^{(n)}(t) > 0$, akkor a t pillanatban egy foglaltsági periódus folyik, továbbá, ha e pillanatban l igény vára k o z i k a rendszerben, akkor $\eta^{(n)}(t)$ értéke l és $l+1$ közé esik. Feladatunk megoldottnak tekinthető, ha meg tudjuk adni minden $0 \leq l < n$, $0 \leq y < 1$ -re a

$$/10/ \quad P\{l + y < \eta^{(n)}(t) \leq l + y + dy\}$$

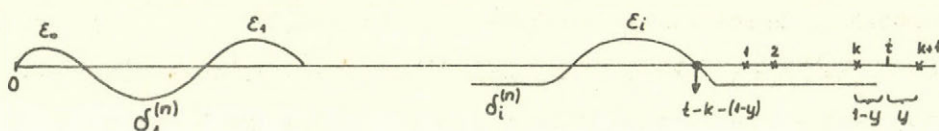
valószínűség határértékét $t \rightarrow \infty$ mellett. E célból az előző zárójelben álló eseménynek bizonyos más eseménnyel vett együttes bekövetkezési valószínűségét határozzuk meg előbb. Az $l + y < \eta^{(n)}(t) \leq l + y + dy$ esemény maga után vonja, hogy a t pillanatban egy foglaltsági periódus folyik. Lehetséges, hogy e periódusban már történt néhány kiszolgálás. A könnyebb kifejezés mód kedvéért vezessünk be egy $\nu(t)$ két-dimenziós vektort, melynek első komponense jelölje az előbb említett kiszolgálások számát (azaz a t pillanatban folyó foglaltsági periódus alatt e t pillanatig befejeződött kiszolgálások számát), a második komponense pedig azon igények számát, amelyek ezen kiszolgálások közül a legutolsó befejeződését követő pillanatban a vára k o z ó k sorában maradtak. Előfordulhat, hogy a $\nu(t)$ vektor első komponense 0. Ekkor a második kom-

ponensét definíciószerűen zérusnak értelmezzük. Meg fogjuk keresni a

$$P \{ l + y < \gamma^{(n)}(t) \leq l + y + dy, \nu(t) = (k, r) \}$$

valószínűség főrészét, ahol $0 \leq k \leq [t - (1-y)]$, $0 \leq r \leq l$.

Hasznos lesz számunkra az alábbi ábra:



Ebből az ábrából leolvashatjuk, hogy ha t elég nagy, akkor kezdetben néhány foglaltsági periódus befejeződik, majd a $t-k-(1-y)$ pillanatban elkezdődik egy újabb foglaltsági periódus, mely a t pillanatban még tart s közben már k -kiszolgálás lefolyt.

A mondottakból látható; ahhoz, hogy az

$$/11/ \quad \{ l + y < \gamma^{(n)}(t) \leq l + y + dy, \nu(t) = (k, r) \}$$

esemény bekövetkezzen, kell, hogy a $t-k-(1-y)$ és a $t-k-(1-y)+dy$ pillanatok között elkezdődjön egy foglaltsági periódus, melyben folyamatosan k -nál több kiszolgálás történik és hogy a k -adik kiszolgálás befejeződése után r igény maradjon a várakozók sorában. Ezen események bekövetkezési valószínűségének főrésze

$$[H(t-k-(1-y)+dy) - H(t-k-(1-y))] \pi_{k,r}$$

ahol $k=0$ esetén $\pi_{00} = 1$. Továbbá kell, hogy a folyamatban levő foglaltsági periódus utolsó (k -adik) kiszolgálásának befejeződése után a sorban maradó r igényhez az $(1-y)$ idő alatt még további $l-r$ igény csatlakozzék. Ezek figyelembevételével kapjuk, hogy

$$P\{l+y < \gamma^{(n)}(t) \leq l+y+dy, \nu(t) = (k,r)\} =$$

$$= [H(t-k-(1-y)+dy) - H(t-k-(1-y))] e^{-\lambda(1-y)} \frac{[\lambda(1-y)]^{l-r}}{(l-r)!} \pi_{k,r} + o(dy)$$

Ha most t igen nagy, akkor a Blackwell-tétel értelmében $H(t-k-(1-y)+dy) - H(t-k-(1-y))$ közel $dy/(1/\lambda + \mu_n)$, ezért

$$/12/ \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} P\{l+y < \gamma^{(n)}(t) \leq l+y+dy, \nu(t) = (k,r)\} = \right.$$

$$\left. = \frac{dy}{\frac{1}{\lambda} + \mu_n} e^{-\lambda(1-y)} \frac{[\lambda(1-y)]^{l-r}}{(l-r)!} \pi_{k,r} + o(dy) \right.$$

Világos, hogy

$$P\{l+y < \gamma^{(n)}(t) \leq l+y+dy\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{[t-(1-y)]} \sum_{r=0}^l P\{l+y < \gamma^{(n)}(t) \leq l+y+dy, \nu(t) = (k,r)\}$$

Mielőtt most itt áttérnénk a $t \rightarrow \infty$ határesetre, vegyük észre, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k,r} = \pi_r(1)$, $(0 \leq r \leq n-1)$ sorok véges összegűek és hogy a $H(\tau+dy) - H(\tau)$ különbség minden $\tau \geq 0$ mel-

lett egy s ugyanazon korlát alatt marad. Ezek és /12/ felhasználásával most már könnyen megmutatható, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \{ l + y < \gamma^{(n)}(t) \leq l + y + dy \} =$$

$$= \frac{dy e^{-\lambda(1-y)}}{\frac{1}{\lambda} + \mu_n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^l \frac{[\lambda(1-y)]^{l-r}}{(l-r)!} \pi_{k,r} + o(dy)$$

Eredményünket a következőképpen foglalhatjuk össze:

3. Tétel. Tetszőleges $n \geq 1$, $\lambda > 0$ mellett a (virtuális) várakozási idő /3/ ergodikus eloszlásának

$$w_n(y) = \frac{d W_n(y)}{dy}, \quad y > 0$$

sűrűségfüggvényét az $l + y \leq (l+1)$, $l = 0, 1, \dots, n-1$, $y > 0$ pontokban a

$$/13/ \quad w_n(l, y) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \mu_n} e^{-\lambda(1-y)} \sum_{r=0}^l \frac{[\lambda(1-y)]^{l-r}}{(l-r)!} \pi_r^*$$

formula szolgáltatja, ahol $\pi_r^* = \delta_{0,r} + \pi_r(t)$, $\pi_r(t)$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$) pedig a /9/ egyenletrendszer $z=1$ esetére vonatkozó megoldása. Továbbá, a $w_n(y)$ függvény, értelmezéséből kifolyólag $y < 0$ -ra zérus, az $y = 0$ helyen szakadással rendelkezik s ugrása

$$\lim_{h \rightarrow +0} w_n(h) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \mu_n}.$$

Eredményünket felhasználhatjuk a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M \eta^{(n)}(t) = \omega$$

várható érték meghatározásához. Kapjuk, hogy

$$/14/ \quad \omega = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{r=0}^l \pi_r^* (I_{l-r} + l) ,$$

ahol

$$/15/ \quad I_s = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \mu_n} \int_0^1 y e^{-\lambda(1-y)} \frac{[\lambda(1-y)]^s}{s!} dy , \quad (0 \leq s \leq n-1)$$

Eredményünk illusztrálására tekintsünk ezek után két példát.

Legyen először $n=1$. Ekkor /9/-nek csak egy egyenlete van.

Ebből

$$\pi_0(z) = z r_1 + z r_1 \pi_0(z)$$

azaz

$$\pi_0(z) = \frac{z r_1}{1 - z r_1} = z r_1 \sum_{k=0}^{\infty} (z r_1)^k$$

Innen

$$\pi_{k,0} = r_1^k , \quad (k \geq 1) .$$

Egy igény most csak akkor maradhat a rendszerben, ha a beérkezésakor nincs más várakozó igény a sorban. A várakozási idő most a $(0,1)$ szakaszon oszlik el, sűrűségfüggvénye /13/ alapján

$$w_1(y) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \mu_1} e^{-\lambda(1-y)} \left(\frac{r_1}{1-r_1} + 1 \right), \quad (0 < y \leq 1)$$

Számítsuk ki most μ_1 -gyet. Megjegyezzük előbb, hogy a félreértések elkerülése végett a $\pi_{k,r}^{(n)}$ valószínűségeket is célszerű $\pi_{k,r}^{(n)}$ -nel jelölni, utalva a felső zárójeles indexszel arra, hogy ezek a mennyiségek olyan rendszerre vonatkoznak, amelyben a sorkapacitás "n". Bármely "n" mellett a $\delta_i^{(n)}$ foglaltsági periódus hosszának eloszlása a $\pi_{k,0}^{(n)}$ valószínűségekkel a következő kapcsolatban áll:

$$P \{ \delta_i^{(n)} = k+1 \} = \pi_{k,0}^{(n)} p_0, \quad (k \geq 0)$$

E megjegyzésünkéből világos, hogy a /9/ egyenletrendszer megoldásával egyuttal meghatároztuk a foglaltsági periódus hosszának eloszlását is.

A tekintendő $n=1$ esetben

$$P \{ \delta_i^{(1)} = k+1 \} = \pi_{k,0}^{(1)} p_0 = r_1^k p_0 = (1-p_0)^k p_0$$

azaz $\delta_i^{(1)}$ eloszlása p_0 -paraméterű geometriai eloszlás. Mivel $p_0 = e^{-\lambda}$, kapjuk, hogy

$$\mu_1 = M \delta_i^{(1)} = e^{\lambda}$$

A /3/ ergodikus eloszlásfüggvény ennek megfelelően,

$$W_1(y) = \frac{\lambda}{1+\lambda e^\lambda} + \frac{\lambda e^\lambda}{1+\lambda e^\lambda} \int_0^y e^{-\lambda(1-t)} dt = \frac{\lambda-1}{1+\lambda e^\lambda} + \frac{e^{\lambda y}}{1+\lambda e^\lambda}$$

Első pillanatra ellentmondásnak látszik, hogy $W_1(1) < 1$. Ennek azonban az az oka, hogy az $\{ \eta^{(n)}(t) \leq x \}$ esemény csak az esetben értelmezhető, ha a t pillanatban beérkező igény nem vész el. Ha a /3/ alatt értelmezett $W_n(x)$ függvényt elosztjuk annak a valószínűségével, hogy egy beérkező igény nem vész el, akkor már valódi eloszlásfüggvényhez jutunk. E megjegyzés alapján láthatjuk, hogy eredményünk felhasználható a veszteségi valószínűség meghatározására is. Nyilvánvaló, hogy a veszteségi valószínűséget az /5/ alatt levezetett $P_{n+1}^{(n)}$ mennyiség adja, melyet most már felírhatunk

$$P_{n+1}^{(n)} = 1 - W_n(n)$$

alakban is. Sőt a $P_k^{(n)}$, $(0 \leq k \leq n)$ valószínűségeket is megadhatjuk a $W_n(x)$ függvény segítségével. Ugyanis az $\{ l < \eta^{(n)}(t) \leq l+1 \}$ esemény ekvivalens a $\{ \zeta^{(n)}(t) = l \}$ eseménnyel s ebből ki-folyólag

$$P_l^{(n)} = W_n(l+1) - W_n(l), \quad (l=0, \dots, n-1).$$

A tekintett $n=1$ esetben

$$P_2^{(1)} = 1 - W_1(1) = 1 - \frac{e^\lambda + \lambda - 1}{1 + \lambda e^\lambda}.$$

Innen leolvasható, hogy nagy λ -kra a veszteségi valószínűség igen jól becsülhető $1 - \frac{1}{\lambda}$ -val. Megjegyezzük, hogy ez az aszimptotika bármilyen "n" sorkapacitás és tetszőleges eloszlású véletlen időtartamu kiszolgálások esetén is érvényes (ld. [1] (5.8) formuláját).

Térjünk most át az $n=2$ eset vizsgálatára. Határozzuk meg először a $\Pi_0(z)$ és a $\Pi_1(z)$ generátorfüggvényeket. A /9/ egyenletrendszer alapján

$$(1 - p_1 z) \Pi_0(z) - z p_0 \Pi_1(z) = z p_1$$

$$-r_2 z \Pi_0(z) + (1 - z r_1) \Pi_1(z) = z r_2$$

Innen

$$\Pi_0(z) = \frac{\begin{vmatrix} z p_1 - z p_0 & 1 - z r_1 \\ z r_2 & 1 - z r_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - p_1 z & -z p_0 \\ -r_2 z & 1 - z r_1 \end{vmatrix}} = \frac{z p_1 (1 - z p_1) + z^2 p_0 r_2}{(1 - p_1 z)(1 - r_1 z) - z^2 p_0 r_2}$$

$$\Pi_1(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 - p_1 z & z p_1 \\ -r_2 z & z r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - p_1 z & -z p_0 \\ -r_2 z & 1 - z r_1 \end{vmatrix}} = \frac{(1 - p_1 z) r_2 z + z^2 p_1 r_2}{(1 - p_1 z)(1 - r_1 z) - z^2 p_0 r_2}$$

Számunkra elegendő csupán a $\Pi_r^* = \delta_{0r} + \Pi_r(1)$ mennyiségek ismerete. Esetünkben

$$\pi_0^* = 1 + \frac{\rho_1(1-\rho_1) + \rho_0 r_2}{(1-\rho_1)(1-r_1) - \rho_0 r_2}$$

$$\pi_1^* = \frac{(1-\rho_1)r_2 + \rho_1 r_2}{(1-\rho_1)(1-r_1) - \rho_0 r_2}$$

Ezek felhasználásával a $w_2(x)$ sűrűségfüggvény /13/ alapján könnyen felírható. /14/-ből a várakozási idő átlagértéke

$$\omega = \pi_0^* I_0 + \pi_0^*(1+I_1) + \pi_1^*(1+I_0)$$

ahol I_0, I_1 a /15/ szerint értelmezett mennyiségek. Szemléletesen világos, hogy ha λ igen nagy, akkor ω értékének közel 2-nek kell lennie. Ugyanis ez esetben, ha egy beszélgetés befejeződik, akkor a megüresedett várakozási helyre nagy valószínűséggel nyomban beérkezik egy igény s ez közelítőleg 2 egységnyi időt kénytelen várakozni. E tény /16/-ből könnyen be is látható, csupán azt kell észrevennünk, hogy

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\pi_0^* - 1) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \pi_0(1) = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \pi_1^* = 1$$

és hogy

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I_j = 0, \quad (j=0,1)$$

Végül rá szeretnénk mutatni azokra a problémákra, amelyek a választott eljárásunknak tetszőleges eloszlású véletlen időtartamu kiszolgálások esetére történő alkalmazásával kapcsolatosak. Döntő szerepet játszik az a tény, hogy míg konstans idejű kiszolgálások esetén, ha ismeretes, hogy már k kiszolgálás történt egy folyamatban lévő foglaltsági periódus során, akkor egyúttal ismeretes ezen k számú kiszolgálás összideje is, addig véletlen időtartamu kiszolgálások esetén ez már nincs így. Kézenfekvőnek látszik ezért a $\pi_{k,l}$ valószínűségekhez hasonló jelentésű $\pi_{k,l}(u)du$ valószínűségek bevezetése, megkövetelve, hogy a lefolyt k -számú kiszolgálás összideje u és $u+du$ közé essen. Ha a kiszolgálási időtartam eloszlása sima és $f(t)$ jelöli a sűrűségfüggvényét, akkor a $\pi_{k,l}(u)$ függvényekre levezethetők az alábbi relációk:

$$\pi_{k,l}(u) = \begin{cases} p_{l+1}(u) f(u), & \text{ha } 0 \leq l < n-1 \\ r_n(u) f(u), & \text{ha } l = n-1 \end{cases}$$

$$\pi_{k,l}(u) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{l+1} \int_0^u \pi_{k-l,s}(u-t) p_{l-s+1}(t) f(t) dt, & \text{ha } 0 \leq l < n-1 \\ \sum_{s=0}^{n-1} \int_0^u \pi_{k-l,s}(u-t) r_{n-s}(t) f(t) dt & \text{ha } l = n-1 \end{cases}$$

ahol

$$p_l(u) = e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^l}{l!}, \quad (l \geq 0)$$

$$r_k(u) = \sum_{l=k}^{\infty} p_l(u) \quad (k \geq 0)$$

Egyenleteink áttekinthetőbbé válnak a

$$\bar{\pi}_{k,l}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \pi_{k,l}(t) dt, \quad \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Laplace-transzformáltak terminológiájában. (Megjegyezzük, hogy a $p_l(t)f(t)$ és az $r_k(t)f(t)$ függvények Laplace-transzformáltjai kifejezhetők az $\bar{f}(s)$ deriváltjai segítségével). Most a

$$\bar{\pi}_l(s, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\pi}_{k,l}(s) z^k, \quad (0 \leq l \leq n-1)$$

generátorfüggvényekre kapunk /9/-hez hasonló egyenletrendszert. További megfontolások arra engednek következtetni, hogy a közölt eljárás lépéseinek alkalmas módosításai segítségével levezethető egy formula a /3/ ergodikus eloszlás sűrűségfüggvényére, amely tartalmazni fogja most a $\bar{\pi}_{k,l}(u)$ függvényeken kívül az $f(t)$ függvény $f(t)^{(k)} = f(t) \cdot \dots \cdot f(t)$, $(k > 0)$ iteráltjait is. A formula nagyon bonyolult, s alkalmazási lehetősége a gyakorlatban igen csekély. Ezért is látszik a 2. tétel, mely a /3/ függvény közelítésével kapcsolatos, igen hasznosnak.

Megemlítjük még, hogy véletlen időtartamu kiszolgálások esetén a foglaltsági periódus hosszának eloszlása $G_n(x)$ folytonos eloszlás s a $\bar{\pi}_{k,l}(u)$ függvényekkel a következő kapcsolatban áll:

$$P\{\delta_i^{(n)} < t\} = \iint \prod_{k=0}^n(u) p_0(v) du dv$$

$$\begin{aligned} 0 \leq u+v < t \\ 0 \leq u \\ 0 \leq v \end{aligned}$$

Tehát a $\prod_{k,l}(u)$ függvények meghatározásával a $G_n(t)$ eloszlásfüggvény is ismertté válik. Azonban a $G_n(t)$ függvény ezen uton történő tanulmányozása igen körülményesnek látszik s véleményünk szerint előnyösebb e célból a [2] dolgozat módszereit követni. Emellett szól még az is, hogy e módszerek alkalmazhatók nem sima eloszlású kiszolgálási időtartamok esetén is.

Irodalom:

- [1] Keilson F.: The ergodic queue length distribution for queueing systems with finite capacity. Journal of the Royal Statist. Society ser B, vol.28., No. 1. /1966/ pp. 190-201.
- [2] Tomkó J.: Odná predelnaja teorema v zadacse obszlu-
zsivanyija pri nyeogramyicno vozrosztajasej
intenzivnosztji vhdjaseho patoka.
Studia Scientiarum Math. Hung., Tomus II.,
3-4. /1967/.
- [3] Smith W.L.: Renewal theory and its ramifications. Journal of the Royal Statist. Society ser. B., vol. 20. No.2. /1958/.

S u m m a r y

An MI/G/1 service system is considered under the assumption that the capacity of queue is finite. More detailedly this assumption means that a customer will get lost if in the instant of its arrival the queue size is equal to "n" (here n denotes the capacity of queue).

Let us denote by $\sigma^{(n)}$ the length of the busy period, $\eta^{(n)}(t)$ the virtual waiting time at the instant t. It is proved by the author in an another paper that for every $n \geq 1$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sigma^{(n)}}{\mu_n} < t \right\} = 1 - e^{-t}$$

where $\mu_n = E(\sigma^{(n)})$, λ is the parameter of arrival process. It is derived by the author also that for any $\lambda > 1$, in the stationary case

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\eta^{(n)}(t) - n}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

provided that the variance of the service time is equal to σ ($0 < \sigma < \infty$). The average service time is supposed to be finite and is taken for 1.

This paper deals with investigation of the ergodic distribution of the virtual time

$$W_n(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \eta^{(n)}(t) \leq x \right\}$$

in the case of the constant ($=1$) service time (when the statement (*) is not true). The author points out that the ergodic distribution of the queue size can be determined by the last distribution.