Fél-Markov folyamatok vezérlése

Gergely József

Az alábbi cikk a Markov láncok általánositásaként felfogható fél-Markov folyamatok vezérlésének egyes kérdéseivel foglalkozik. Az általánositás abban nyilvánul meg, hogy mig a Markov lánc átmenetei közt eltelt időt egységnyinek tekinthettük, addig a fél-Markov folyamatoknál ez valószinüségi változó lesz.

A fél-Markov folyamatok vezérlésével több cikk foglalkozik, amelyek közül itt csak a [2],[4] és [5]-öt emlitjük meg. Ezek többnyire a Howard [1]-ben tárgyalt módszereit alkalmazva általánositják az [1] eredményeit fél-Markov folyamatokra.

Jelen cikkben nem törekszünk a felvetett probléma átfogó vizsgálatára. A fél-Markov folyamat és az optimális vezérlés értelmezése után feltételezzük a stacionáris optimális vezérlés létezését, majd a Howard módszerétől független eljárást adunk az optimális stratégia megkeresésére. Azonban az iterációs eljárásunk konvergenciájával nem foglalkozunk. A VII. pontban vázlatosan ismertetjük azokat a meggondolásokat, melyek kiindulásul szolgálnak más optimalizáló algoritmusoknak.

Az itt felvetett problémák további vizsgálatára későbbi cikkeinkben visszatérünk.

I. Fél-Markov folyamat

A sztochasztikus folyamatok segitségével leirható feladatok gyakran vezetnek fél-Markov folyamatok vizsgálatához. A [2], [3], [6] és [7]-ben tárgyaltaknak megfelelően egy rendszerben lejátszódó fél-Markov folyamatot a következőképpen értelmezzük.

Tegyük fel, hogy a rendszer egymás utáni állapotai Markov láncot alkotnak és jelöljük ezeket rendre $e^{*}(1)$, $e^{*}(2), \ldots$ -vel. $e^{*}(m) \in E$, $m \geq 1$, ahol E az állapottér. Menjen át a rendszer valamelyik $e^{*}(m)=i$ állapotából a következő $e^{*}(m+1)=j$ állapotába p_{ij} valószinüséggel és legyen $P = \{p_{ij}\}$ az átmenetvalószinüség mátrixa, azaz teljesüljön

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \quad . \qquad /1.1/$$

Legyen az $i \rightarrow j$ egy lépéses átmenet ideje τ_{ij} valószinüségi változó, melyet az

$$F_{ij}(x) = P\,(\tau_{ij} \leq x), \qquad x \geq o;\ i,j \in E \qquad /1.2/$$

eloszlásfüggvény határoz meg. Jelölje a rendszer állapotát tetszőlegesen t időben $e(t)$, $e(t) \in E$. $e(t)$ fél-Markov folyamat.

A rendszerben lejátszódó $e(t)$ sztochasztikus folyamat általában nem lesz Markov folyamat, csak abban a speciális esetben, amikor a τ_{ij} átmeneti idők exponenciális eloszlásuak. Ekkor ugyanis tetszőleges $t^{(1)}$ időpillanatban ismerve a rendszer $e(t^{(1)}) = i$ állapotát, az ezen állapotban már eltöltött időtől függetlenül megadható tetszőleges $t^{(2)} > t^{(1)}$ időpontban az $e(t^{(2)}) = j$ esemény valószinüsége.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy az $e^{*}(1)$, $e^{*}(2)$,... Markov lánc nem periódikus, ergódikus, $e(t)$ stacionáris fél-Markov folyamat és léteznek az

$$a_{ij} = M\left[\tau_{ij} \right] = \int_{0}^{\infty} x \, d\, F_{ij}(x) \qquad /1.3/$$

várható értékek, melyekre $0 < a_{ij} < \infty$.

II. Optimális vezérlés

A továbbiakban sztochasztikus folyamatot megvalósitó olyan rendszerekkel foglalkozunk, melyek müködése ugy módositható, azaz bizonyos paraméterei időben ugy változtathatók, hogy ez befolyásolja a rendszer munkáját és igy a rendszerben lejátszódó sztochasztikus folyamatot is. Nevezzük a rendszeren ily módon végrehajtott változtatásokat a rendszer vezérlésének.

Az egyszerüség kedvéért feltesszük, hogy csak olyan időpillanatokban vezéreljük a rendszert, amikor az egyik állapotából egy másik állapotába megy át. Pontosabban az állapotok befejeződési pillanatában döntünk a rendszer jellemzőinek valamilyen megváltoztatásáról.

Legyenek a rendszer i állapotában a rendszer lehetséges vezérlései K_i, $K_i \subset K$. Minden $k \in K_i$ vezérléshez tartozzon egy $P^{(k)} = \{p_{ij}^{(k)}\}$ átmenet mátrix (minden k mellett teljesül /1.1/) és (/1.2/-nek megfelelő) $F_{ij}^{(k)}(x)$ eloszlásfüggvény rendszer.

Bevezetjük még a rendszer munkájának jellemzésére a veszteség mátrixot. Feltesszük, hogy a rendszer munkájával kapcsolatos költségek, veszteségek az átmenetekre vonatkozóan adhatók meg a következőképpen. Tartozzon az $i \to j$ átmenethez a k vezérlés esetén $c_{ij}^{(k)}$ költség. Legyen $c_{ij}^{(k)}$ valószinüségi változó és várható értéke $v_{ij}^{(k)} = M[c_{ij}^{(k)}]$.

Vizsgáljuk meg ezek után a rendszerünk müködését. Kiindulva egy t_o átmeneti időpontból legyen $e(t_o) = i_o$; a rendszer vezérlése pedig $k_o = k(i_o)$. A $p_{i_o i_1}$ valószinüség szerint kiválasztódik a következő i_1 állapot és az $i_o \to i_1$ átmenet az $F_{i_o i_1}^{(k_o)}(x)$ eloszlásfüggvénynek megfelelően a t_1 időpillanatban végrehajtódik. Jelöljük a következő, i_1-től függő vezérlést $k_1 = k(i_1)$-el. Ekkor az előbbiekhez hasonlóan végbemegy az $i_1 \to i_2$ átmenet és igy tovább. Az n-edik lépés után kapjuk a $k_o, k_1, \ldots, k_n$ vezérlések mellett kialakuló állapotok $i_o, i_1, \ldots, i_n$ sorrendjét. A vezérlések $k_o, k_1, \ldots, k_n$ sorrendjét stratégiának nevezzük és $d(o,n) = (k_o, k_1, \ldots, k_n)$-el, az n lépéses megengedett stratégiák, összességét pedig $D(o,n)$-el jelöljük. Tegyük fel, hogy tetszőleges $d \in D(o,n)$ stratégia esetén minden $m > n$-re létezik olyan $d^* \in D(o,m)$ stratégia, hogy d megegyezik d^* első n komponensével. Az átmenetek fenti n lépése $T_n = t_n - t_o = \tau_{i_o i_1} + \tau_{i_1 i_2} + \dots + \tau_{i_{n-1} i_n}$ idő alatt zajlott le és ez idő alatt a rendszer munkája $C_n = c_{i_0 i_1} + c_{i_1 i_2} + \dots \dots + c_{i_{n-1} i_n}$ veszteséggel járt. A rendszer T_n-re eső munkáját jellemezzük a

$$\varrho[d(o,n)] = \frac{M[C_n]}{M[T_n]} \qquad /2.1/$$

hányadossal, ami az időegységre jutó veszteséget fejezi ki. A rendszer munkája annál hatékonyabb, minél kisebb a $\lim_{n\to\infty} \inf_{d(o,n)\in D(o,n)} \varrho[d(o,n)]$ határérték. Tekintsük az összes megengedett $d(o,n) \in D(o,n)$ stratégiát. Ezek után az optimális vezérlés azon d stratégia megkeresését jelenti, amely mellett a $\varrho[d(o,n)]$ határértéke a lehető legkisebb lesz. Ha létezik optimális $\bar{d}$ stratégia, akkor erre teljesül:

$$\varrho[\bar{d}] \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{d(o,n)\in D(o,n)} \varrho[d(o,n)]$$

A továbbiakban az optimális vezérlés létezésének bizonyitásával nem foglalkozunk. Ez bizonyos feltevések mellett megtalálható a [2], [4] és [5] cikkekben.

A [4] cikkben az optimális vezérlés létezésének bizonyitása mellett annak stacionaritása is igazolva van. Mi is feltesszük a továbbiakban, hogy létezik stacionáris optimális vezérlés és annak meghatározásával foglalkozunk. A továbbiakban csak olyan stratégiákat engedünk meg, amelyekben a vezérlések csak a rendszer pillanatnyi állapotától függnek. Vizsgálatainkban feltesszük, hogy az E állapottér és a D vezérlések tere véges.

III. Ciklusok vizsgálata

Rögzitsünk egy megengedett $d_o \in D$ stratégiát és vizsgáljuk valamilyen alkalmasan választott átmeneti t_o időponttól a rendszerünkben lejátszódó sztochasztikus folyamatot.

Jegyezzük fel az $e(t_o) = i_o$ állapotot. Figyeljük meg azt a t_m időpillanatot, amikor először ujra megjelenik az i_o állapot. A sztochasztikus folyamat $t_m - t_o$ időszakaszra eső részét ciklusnak nevezzük. A ciklus hossza $t_m - t_o = T_m$; a ciklus átmeneteinek száma m és a rendszer ciklusra eső vesztesége C_m. Kiindulási i_o állapotnak folyamatunk egy lényeges állapotát válasszuk, vagyis melyre

$$M[m] < \infty \;, \; M[T_m] < \infty \;.$$

Ezen egyenlőtlenségek és a rendszert jellemző Markov láncra tett ergódicitási feltételek mellett a rendszerben lejátszódó sztochasztikus folyamat valamely állapotból kiinduló ciklusok ismétléséből áll. Ezért az előző pontban az $n \to \infty$ esetén vett határértékek helyettesithetők a ciklusok számának növekedésére vonatkozó megfelelő határértékekkel.

Jelöljük $r_{ij}^{(n)}$ -nel annak valószinüségét, hogy az i állapotból kiindulva az n-ik lépésben j-be jutunk ugy, hogy közben egyszer sem érintjük az i állapotot. Akkor $r_{ii}^{(n)}$ lesz annak valószinüsége, hogy az i állapot először az n-ik lépésben ismétlődik, vagyis, hogy a ciklus lépéseinek a száma n. Jelöljék továbbá a $P = \{p_{ij}\}$ és $\{r_{ij}^{(n)}\}$ mátrixok i-ik sorvektorait $\underline{p}_i$ és $\underline{r}_i^{(n)}$. Legyen Q_i olyan mátrix, amelynek sorai megegyeznek P soraival, kivéve az i-ediket, mely minden eleme o. Fennáll a következő összefüggés

$$\underline{r}_i^{(1)} = \underline{p}_i$$

$$\underline{r}_i^{(n+1)} = \underline{r}_i^{(n)} P - r_{ii}^{(n)} \underline{p}_i = \underline{r}_i^{(n)} Q_i \quad , \quad n \geq 1 \qquad (3.1)$$

vagyis /3.1/ felhasználásával irható:

$$\underline{r}_i^{(n+1)} = \underline{p}_i Q_i^n \qquad /3.2/$$

A továbbiakban szükségünk lesz az

$$\underline{r}_i^{(1)} + \underline{r}_i^{(2)} + \dots + \underline{r}_i^{(n+1)} = \underline{p}_i [I + Q_i + Q_i^2 + \dots + Q_i^n] \qquad /3.3/$$

összegre és annak $n \to \infty$ esetén vett határértékére. Ezért bebizonyitjuk a /3.3/ jobboldalán a határmenetnél fellépő mátrixsor konvergenciáját.

A bizonyitásban, majd azt követően többször használjuk valamely mátrix vagy sorvektor sorösszegét. Jelöljük $\underline{e}$-vel azt az oszlopvektort, melynek minden eleme 1, ekkor valamely A mátrix sorösszegeiből alkotott oszlopvektor $A\underline{e}$ lesz, mig az $\underline{a}$ sorvektor sorösszege $\underline{ae}$.

Tétel. Az

$$I + Q_i + Q_i^2 + \dots \qquad /3.4/$$

mátrixsor konvergens és

$$I + Q_i + Q_i^2 + \dots = (I-Q_i)^{-1} \qquad /3.5/$$

Bizonyitás. Minthogy a Q_i i-edik sorának elemei o-ak, tetszőleges $n \geq 1$-re a Q_i^n hatvány mátrixok i-edik sora is o elemekből áll. Ezért a hatványozásnál az i-edik sor alakulásával nem törődünk. Legyen

$$R_i = P - Q_i$$

Képezzük a Q_i mátrix hatványait:

$$Q_i^2 = (P-R_i)(P-R_i) = P^2 - PR_i - S_i^{(2)} \qquad /3.6/$$

ahol $S_i^{(2)} = R_i\,(P-R_i)$ mátrixnak csak az i-edik sora különbözik o-tól. /3.6/ segitségével

$$Q_i^3 = (P-R_i)(P^2-PR_i-S_i^{(2)}) = P^3-P^2R_i-PS_i^{(2)}-S_i^{(3)} \qquad /3.7/$$

Hasonló módon az n-ik lépés után

$$\begin{aligned} Q_i^n &= (P-R_i)(P^{n-1}-P^{n-2}R_i - \dots - PS_i^{(n-2)} - S_i^{(n-1)}) = \\ &= P^n - P^{n-1}R_i - P^{n-2}S_i^{(2)} - \dots - PS_i^{(n-1)} - S_i^{(n)} \end{aligned} \qquad /3.8/$$

ahol

$$S_i^{(n)} = R_i(P^{n-1} - P^{n-2}R_i - \dots - S_i^{(n-1)}) = R_iQ_i^{n-1}$$

mátrix elemei az i-edik sor kivételével o-ak, az i-edik sor elemei pedig nem negativak, tekintve, hogy R_i és Q_i^{n-1} elemei is ilyenek.

Feltevésünk szerint P egy ergódikus Markov lánc átmenet mátrixa, sztochasztikus mátrix, sorösszegei 1-et adnak, és ezért ilyen tulajdonságu a P^n is. Másrészt $n \to \infty$ esetén $P^n \to \Pi$, ahol Π a stacionáris valószinüségek mátrixa. Π minden eleme pozitiv, ezért elég nagy n_o mellett a P^{n_o-1} hatvány minden egyes eleme is pozitiv lesz. Rögzitsük ezen feltételnek eleget tevő n_o-at és /3.8/-at rendezzük a következőképpen:

$$P^{n_o} - Q^{n_o} = P^{n_o-1} R_i + T_i \qquad /3.9/$$

ahol

$$T_i = P^{n_o-2} S_i^{(2)} + \ldots + S_i^{(n)}$$

mátrix minden eleme nem negativ. Minthogy P^{n_o-1} elemei pozitivak és R_i i-edik sora tartalmaz pozitiv elemeket /tekintve, hogy összegük 1/, következik, hogy $(P^{n_o-1} R_i)$ $\underline{e}$ minden eleme pozitiv. /3.9/ felhasználásával adódik, hogy

$$Q_i^{n_o} \underline{e} \text{ minden eleme } < 1 \qquad /3.10/$$

Jelöljük λ -val a Q_i legnagyobb abszolut értékü sajátértékét. A $Q_i^{n_o}$ mátrix legnagyobb abszolut értékü λ^{n_o} sajátértékére a mátrixszámolás ismert összefüggései alapján /3.10/ miatt fennáll:

$$|\lambda^{n_o}| < 1, \text{ azaz } |\lambda| < 1$$

vagyis a Q_i összes sajátértéke az egységsugaru kör belsejébe esik. Ez elégséges feltétele a /3.4/ sor konvergenciájának. /3.4/ konvergenciája esetén pedig teljesül /3.5/.

IV. Ciklus idő és az arra jutó veszteség meghatározása

Az /1.3/-al definiált a_{ij} várható értékek és az átmenet valószinüségek segitségével határozzuk meg a b_{ij} mennyiségeket a $b_{ij} = p_{ij}\, a_{ij}$ szorzattal. Az ezekből felépülő mátrix legyen $B = \{b_{ij}\}$. A B i-edik sorát $\underline{b}_i$-vel jelöljük. Jelentse B_i azt a mátrixot, amelynek i-edik sora o-okból áll, a többi eleme pedig megegyezik B elemeivel.

Tekintsünk egy i állapotból kiinduló ciklust. Annak valószinüsége, hogy legfeljebb n lépés után ismétlődik az i állapot

$$\sum_{k=1}^{n} r_{ii}^{(k)}, \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_{ii}^{(k)} = 1\right)$$

Jelöljük az n lépésre jutó átmenetek átlagos hosszát $\beta_i^{(n)}$-el, akkor a fenti jelölésekkel

$$\beta_i^{(1)} = r_{ii}^{(1)} a_{ii} = p_{ii}\, a_{ii} = b_{ii} \tag*{/4.1/}$$

$$\beta_i^{(2)} = \beta_i^{(1)} + \sum_{k \neq i} b_{ik} + \sum_{j \neq i} r_{ij}^{(1)} b_{ji} \tag*{/4.2/}$$

majd $n \geq 2$-re

$$\beta_i^{(n+1)} = \beta_i^{(n)} + \sum_{j \neq i} r_{ij}^{(n-1)} \sum_{k \neq i} b_{jk} + \sum_{j \neq i} r_{ij}^{(n)} b_{ji} \tag*{/4.3/}$$

A /4.1/, /4.2/ és /4.3/ rekurziós összefüggés felhasználásával

$$\beta_i^{(n+1)} = b_{ii} + \sum_{k\neq i} b_{jk} + \sum_{j\neq i} r_{ij}^{(1)}(b_{ji} + \sum_{k\neq i} b_{jk}) + \dots \quad \dots +$$

$$+ \sum_{j\neq i} r_{ij}^{(n-1)}(b_{ji} + \sum_{k\neq i} b_{jk}) + \sum_{j\neq i} r_{ij}^{(n)} b_{ji} =$$

$$= \sum_{k} b_{ik} + \sum_{j\neq i}(r_{ij}^{(1)} + r_{ij}^{(2)} + \dots + r_{ij}^{(n-1)})(\sum_{k} b_{jk}) + \sum_{j\neq i} r_{ij} b_{ji} .$$

Vektor és mátrix jelölésekre áttérve majd /3.3/ felhasználásával

$$\beta_i^{(n+1)} = \underline{b}_i \underline{e} + (\underline{r}_i^{(1)} + \underline{r}_i^{(2)} + \dots + \underline{r}_i^{(n-1)})(B_i \underline{e}) + \sum_{j\neq i} r_{ij}^{(n)} b_{ji} =$$

$$= \underline{b}_i \underline{e} + \underline{p}_i (I + Q_i + \dots + Q_i^{n-2})(B_i \underline{e}) + \sum_{j\neq i} r_{ij}^{(n)} b_{ji} \qquad /4.4/$$

$n \to \infty$ esetén $r_{ij}^{(n)} \to o$ minden i és j-re és igy /4.4/ utolsó tagja

$$\sum_{j\neq i} r_{ij}^{(n)} b_{ji} \to 0 , \qquad ha \quad n \to \infty \qquad /4.5/$$

/4.5/ és /3.5/ felhasználásával kapjuk, hogy létezik a

$$\beta_i = \lim_{n\to\infty} \beta_i^{(n)} = \underline{b}_i \underline{e} + \underline{p}_i (I - Q_i)^{-1} (B_i \underline{e}) \qquad /4.6/$$

határérték, ami a ciklus hosszának várható értékét adja.

Teljesen hasonló meggondolásokkal kaphatjuk a ciklus időre jutó teljes veszteség várható értékét

$$\mu_i = \underline{u}_i \underline{e} + \underline{p}_i (I - Q_i)^{-1} (U_i \underline{e}) , \qquad /4.7/$$

ahol $u_{ij} = p_{ij} v_{ij}$, v_{ij} pedig az $i \to j$ átmenetre jutó veszteség várható értéke; $\underline{u}_i$ az $U = \{u_{ij}\}$ mátrix i-edik sora, mig U_i mátrix annyiban különbözik az U mátrixtól, hogy az i-edik sorába o-ák kerülnek.

A /2.1/ képletben szereplő mennyiségeknek itt a $\beta_i = M[T_n]$ és a $\mu_i = M[C_n]$ azonositások felelnek meg. Igy a rendszer hatékonyságát a /2.1/-nek megfelelő

$$\varrho_i [d_o] = \frac{\mu_i}{\beta_i} \qquad /4.8/$$

hányados jellemzi.

V. Az optimális stratégia megközelitése

A III. és IV. pontban kapott eredményeink egy, a III. pont elején rögzitett $d_o \in D$ stratégiára vonatkoztak. A d_o rögzitése azt jelenti, hogy a j állapotba jutva mindig ugyanazt a $k_j^{(o)} \in K_j$ vezérlést alkalmazzuk. A $k_j^{(o)}$ meghatározza a /4.6/ és /4.7/ képletekben szereplő $\underline{p}_j^{(k_j^{(o)})}$; $\underline{b}_j^{(k_j^{(o)})}$; $\underline{u}_j^{(k_j^{(o)})}$ sorvektorokat és a Q_i, B_i, U_i mátrixok j-edik sorait. Egy kiválasztott d_o vezérléshez /4.6/ és /4.7/ alapján meghatározott $\beta_i[d_o]$ és $\mu_i[d_o]$, majd /4.8/ alkalmazásával $\varrho_i[d_o]$ érték tartozik.

Az optimális vezérlést a következő iterációs eljárással közelitjük meg. Az $i_o, i_1, i_2, \ldots$ állapotokhoz válasszuk ki a $k_o^{(o)}, k_1^{(o)}, k_2^{(o)}, \ldots$ vezérléseket, amelyek a $d_o^{(o)}$ stratégiát alkotják. Fixálunk egy s_1 indexet és az i_{s_1} állapothoz tartozó minden lehetséges $k_{s_1} \in K_{s_1}$ vezérléshez kiszámitjuk a /4.6/, /4.7/ és /4.8/ alapján a $\varrho_{s_1}[k_j = k_j^{(o)},\ j \neq s_1\ ;\ k_{s_1}]$ veszteségeket. Meghatározzuk közülük a legkisebbet. Legyen az ehhez tartozó k_{s_1} vezérlés $k_{s_1}^{(1)}$. Irjuk $k_{s_1}^{(1)}$-et $k_{s_1}^{(o)}$ helyébe, akkor az ily módon megváltoztatott $d_o^{(o)}$ -ból kapjuk $d_o^{(1)}$-et.

Kiválasztva most egy $s_2 \neq s_1$ indexet a $d_o^{(1)}$ stratégiában csak a $k_{s_2} \in K_{s_2}$ vezérlést változtatva minimalizáljuk a $\varrho_{s_2}[k_j = k_j^{(o)};\ j \neq s_1, s_2\ ;\ k_{s_1}^{(1)}, k_{s_2}]$ veszteséget. A minimumhely meghatározza a $k_{s_2}^{(1)}$ vezérlést, majd ezzel helyettesitve a $k_{s_2}^{(o)}$ -at $d_o^{(1)}$-ből kapjuk a $d_o^{(2)}$ stratégiát.

Ezeket a lépéseket az összes $s_1, s_2, s_3, \ldots$ indexválasztás mellett végrehajtva eljutunk a $d_1^{(o)}$ stratégiához. Ezután a $d_o^{(o)}$-at helyettesitve $d_1^{(o)}$-al, majd rendre $d_2^{(o)}, d_3^{(o)}, \ldots$-al az iterációs eljárást elölről ismételjük mindaddig, amig az egymás után kapott stratégiák meg nem egyeznek, vagy elég közel nem kerülnek.

A /4.6/ és /4.7/ képletek számolásánál lényeges, hogy rögzitett i állapotra vonatkozó ciklusban a Q_i, B_i és U_i mátrixok nem függnek az i állapothoz tartozó k_i vezérlésektől, ezért az

$$(I - Q_i)^{-1} (B_i \underline{e}) \quad \text{és} \quad (I - Q_i)^{-1} (U_i \underline{e}) \qquad /5.1/$$

szorzatokat, ami a számolás jelentős részét teszi ki, minden egyes ciklusra vonatkozóan csak egyszer kell számolni. A $k_i \in K_i$ változtatásánál csak a $\underline{b}_i^{(k_i)}$ és $\underline{u}_i^{(k_i)}$ sorösszegeit kell ujra számolni, illetve a $\underline{p}_i^{(k_i)}$ -vel szorozni a már kiszámolt /5.1/ vektorokat.

A számolás folyamán az $(I-Q_i)^{-1}$ inverz mátrixra valójában nincs szükség, csak annak /5.1/ szerinti $(B_i\ \underline{e})$ és $(U_i\ \underline{e})$ vektorokkal való szorzatára. Ezért az $(I-Q_i)^{-1}$ inverz kiszámolása helyett célszerübb az

$$(I-Q_i)\ \underline{x} = (B_i\ \underline{e}),\ (I-Q_i)\ \underline{y} = (U_i\ \underline{e}) \qquad /5.2/$$

egyenleteket megoldani. Ugyanis az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ megoldások éppen az /5.1/ oszlopvektorokat adják.

VI. A rendszer optimalizálása az ergódikus eloszlás ismeretében

Feltevéseink szerint $P = \{p_{ij}\}$ egy ergódikus Markov lánc átmenet mátrixa. Teljesül tehát a

$$P^n \to \Pi\ ,\ \text{ha}\ \ n \to \infty \qquad /6.1/$$

határátmenet, ahol Π mátrix $\underline{\Pi}$ sorai megegyeznek és a stacionáris eloszlást adják. Ha minden d stratégiánál ismerjük a $\underline{\Pi}(d)$ valószinüségi vektort a ciklus vizsgálat nélkül is eljuthatunk a rendszer hatékonyságát jellemző /2.1/ hányadoshoz. Az

6

előző pontok jelöléseit használva a /2.1/-ben szereplő n lépéshez tartozó átmeneti idők $M[T_n]$ várható értékét az i állapotból kiindulva a következőképpen irhatjuk fel:

$$M[T_n] = \{B\underline{e} + P(B\underline{e}) + P^2(B\underline{e}) + \dots + P^{n-1}(B\underline{e})\}_i$$

ahol $\{\ \}_i$-vel jelöltük a $\{\ \}$ zárójelben levő oszlopvektor i-edik komponensét. Az egy lépésre jutó átlagos átmeneti idő

$$\frac{1}{n} M[T_n] = \frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n} P^{k-1}(B\underline{e})\right\}_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \{\underline{\pi}(B\underline{e})\}_i \qquad /6.2/$$

A /6.2/ jobboldalán álló oszlopvektor minden komponense egyenlő éspedig $\underline{\pi}[d](B\,\underline{e})$, a d vezérlés esetén egy lépésre jutó átmeneti idő várható értéke.

Teljesen hasonló meggondolásokból a d vezérlés melletti egy átmenetre jutó átlagos veszteséget az

$$\frac{1}{n} M[C_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{\pi}[d](U\underline{e}) \qquad /6.3/$$

határértékkel kapjuk. A rendszer hatékonyságát az időegységre jutó átlagos veszteséggel jellemezve /2.1/-ből adódik

$$\varrho[d] = \frac{\underline{\pi}[d](U\underline{e})}{\underline{\pi}[d](B\underline{e})} \qquad /6.4/$$

A /6.4/-ben explicite szerepel a $\underline{\pi}$ stacionáris valószinüségi vektor, ami sokszor nehezen határozható meg. Azonban ismeretesek eljárások /6.4/ minimalizálására, amelyek nem használják a $\underline{\pi}$ vektort. Ezekkel az eljárásokkal itt nem foglalkozunk.

Irodalom:

[1] Howard R.A.: Dynamic Programming and Markov Processes, New York, 1960.

[2] Jewell W.S.: Markov-Renewal Programming I., II. Operations Research, 11, No. 6. /1963/ 938-971. (Orosz fordításban: Kiberneticseszkij Szbornyik 4. 1967.)

[3] Pyke R.: Markov Renewal Processes I., II. Ann.Math.Stat. 32 /1961/ 1231-1259.

[4] Derman C.: Markovian Sequential Coutral Processes- Denumerable State Space, Journal of Math. Anal. and. Appl. 10. /1965/ 295-302.

[5] Cani J.S.: A Dynamic Programming Algorithm for Embedded Markov Chains when the Planning Horizon is at Infinity, Management Science vol 10. No.4. /1964/ 716-733.

[6] Gnyegyenko B.W. - Kovalenko J.N.: Vigyenyie v teoriju masszovava abszluzsivanija, Moszkva, 1966.

[7] Smith W.L.: Renewal Theory and Its Ramifications, J. Roy. Statist. Soc. Ser.B., v. 20. No.2. 243-302 /1958/. (Orosz fordításban: Matematika 5:3, 95-150, 1961.)

Summary

The paper discusses the problem of the control of semi-Markovian processes. We assume that the control takes place at the times of the changes of states of the system and that there exists an optimal stationary strategy. An iteration procedure is given in order to find out the optimal control. Our procedure is based upon the examination of cycles which repeat themselves in the semi-Markovian process.