Egy kiszolgáló rendszerrel kapcsolatos optimalizálási problémáról

Gergely József

I. Bevezetés

Az [1] és [2] cikkekben a következő sorbanállási modellt vizsgáltuk: egy kiszolgáló berendezéshez a_1 ill. a_2 paraméterü Poisson folyamat szerint A ill. B tipusu egységek érkeznek. A készülék egyszerre csak egy egységet szolgálhat ki. A kiszolgált egységek azonnal elhagyják a rendszert. Ha a készülék egy A tipusu után B tipusut szolgál ki, vagy fordítva, szüksége van egy T_{12} ill. T_{21} átkapcsolási időre. A kiszolgálási idők T_1 és T_2, valamint az átkapcsolási idők T_{12} és T_{21} független valószinüségi változók, függetlenek a bemeneti áramtól és külön-külön azonos eloszlásuak, eloszlásfüggvényeik: $B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_{12}(t)$ és $C_{21}(t)$, várható értékeik: β_1, β_2, γ_{12} és γ_{21}.

Ha egy A ill. B tipusu egység érkezésénél a készülék szabad és az utoljára kiszolgált egység is A ill. B tipusu volt, akkor azonnal megkezdődik a kiszolgálása, különben várakozik az A ill. B tipusu sorban a kiszolgálása megkezdéséig. Ha egy A ill. B tipusu egység kiszolgálása után maradt a rendszerben A ill. B tipusu várakozó, akkor azonnal megkezdődik az érkezési sorrendben következő A ill. B tipusu egység kiszolgálása, ha viszont A ill. B tipusu sorbanálló nincs, akkor csak abban az esetben kapcsol át B-re (ill. A-ra), ha a B (ill. A) sorban legalább n_2 (ill. n_1) várakozó van ($n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$).

Jellemezze a kiszolgáló rendszer egy kiszolgálás befejezése utáni állapotát az (i, k_1, k_2) szám hármas, ahol $i=1$ (ill. $i=2$), ha az utolsó befejezett kiszolgálás egy A (ill. B) tipusu egység kiszolgálása volt és a kiszolgálás befejezése után k_1 A és k_2 B tipusu egység maradt a rendszerben. Jelölje p_{i,k_1,k_2} annak valószinüségét, hogy az N-ik kiszolgálás befejezése után a rendszer állapota (i, k_1, k_2) volt.

Az [1] és [2] cikkekben bebizonyitottuk az $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 < 1$ feltétel mellett a Markov láncot alkotó (i, k_1, k_2) állapotok ergodicitását és összefüggéseket vezettünk le a $p_{i,k_1,k_2} = \lim_{N\to\infty} p_{i,k_1,k_2,N}$ valószinüségek $P_i(z_1,z_2)$ generátorfüggvényeire. Az [1] cikkben $n_1 = n_2 = 1$, a [2]-ben pedig $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$ esetekre adtunk eljárást a p_{i,k_1,k_2} valószinüségek meghatározására.

Jelen cikkben foglalkozunk az [1]-ben felvetett optimalizálási problémával, vagyis, hogy adott $a_1, a_2, B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_{12}(t)$ és $C_{21}(t)$ mellett hogyan kell n_1 és n_2-t megválasztani ahhoz, hogy a rendszerünk leghatékonyabb legyen. A rendszer hatékonyságát a rendszerbe érkező egységeknek időegységre eső sulyozott várakozási idejével jellemezzük. Keresendő tehát az az n_1 és n_2, amely mellett az időegységre jutó sulyozott várakozási idő a legkisebb. Az optimális megoldást a [3]-ban ismertetett módszer segitségével keressük meg.

Az optimalizálási feladat meghatározásához szükségünk lesz az átmenetvalószinüségek, az átmenetek átlagos idejének és egy átmeneti időre jutó átlagos várakozási idők a meghatározására. Exponenciális $B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_{12}(t)$ és $C_{21}(t)$ esetekben explicit képleteket adunk ezek kiszámolására, valamint eljárást a stacionáris állapotvalószinüségek meghatározására. Végül ismertetünk néhány számpéldát.

II. A rendszert jellemző fél-Markov folyamat

Vizsgáljuk az [1] és [2] cikkekben és a bevezetésben leirt kiszolgáló rendszerben lejátszódó sztochasztikus folyamatot. Legyenek a kiszolgálások befejezési időpontjai rendre $t_1, t_2, \ldots$ Jellemezzük a rendszer állapotát tetszőleges t időpillanatban a

$$\xi(t) = (i, k_1, k_2) \qquad /2.1/$$

vektorral, ahol $i=1$ ill. $i=2$, ha $t_m \leq t < t_{m+1}$ és a t_m-ben A ill. B tipusu egység kiszolgálása fejeződött be, k_1 ill. k_2-vel pedig a t_m időpillanat után a rendszerben maradó A ill. B tipusu egységek számát jelöltük.

Az [1] és [2] cikkekben bebizonyitottuk, hogy a

$$\xi^{(m)} = \xi(t_m) = (i, k_1, k_2) \qquad /2.2/$$

állapotok ergodikus Markov láncot alkotnak. Az átmenetek közti $z_m = t_{m+1} - t_m$ átmeneti idők a kiszolgálási, átkapcsolási, valamint az egységekre való várakozási időkből tevődnek össze, amelyek teljesen függetlenek és adott eloszlásuak. Igy ismertnek tekinthetők a

$$T_m(x) = P\,(z_m \leq x),\ m \geq 1 \qquad /2.3/$$

eloszlásfüggvények. A fentiek alapján a kiszolgáló rendszerben lejátszódó $\xi(t)$ sztochasztikus folyamat fél-Markov folyamat. (A fél-Markov folyamatokról lásd [3]-at és [3] irodalmi utalásait.)

Ha t_1-ben ismerjük a rendszer $\xi^{(1)}$ állapotát, akkor $T_1(x)$ eloszlásnak megfelelő z_1 ideig marad ez az állapot, majd /2.2/ Markov lánc átmenetvalószinüségeinek megfelelően átmegy a $\xi^{(2)}$ állapotba. Hasonló módon $\xi^{(2)}$-ből megkapjuk $\xi^{(3)}$-at és igy tovább. Vagyis $\xi^{(1)}$ ismeretében a /2.2/ Markov-lánc átmenet valószinüségei és az átmeneti idők /2.3/ eloszlásai meghatározzák a $\xi(t)$ folyamatot.

A /2.1/ és /2.2/-ben $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, mig k_1 és k_2 elvileg akármilyen nagy lehet. Azonban azok az állapotok, amelyekben k_1 vagy k_2 nagy, kis valószinüséggel fordulnak elő. A további vizsgálatainkban megadunk s_1 és s_2 számokat és azokat az állapotokat, amelyekben $k_1 \geq s_1$ vagy $k_2 \geq s_2$ összevonjuk egy-egy állapottá, és ezekben $k_1 = s_1$ ill. $k_2 = s_2$ jelölést használjuk. Ezáltal a /2.2/ véges állapotu Markov lánc lesz, a /2.3/ pedig a véges állapotok közötti valamelyik átmenet idejének eloszlása.

III. Az átmenetvalószinüségek mátrixának meghatározása.

Rendezzük az

$$(i,k_1,k_2),\ i=1,2;\ k_1=0,1,\dots,s_1;\ k_2=0,1,\dots,s_2 \qquad /3.1/$$

állapotokat k_1 és k_2 növekedésének megfelelően a következő csoportositás és azon belüli sorrend szerint:

1.cs.: $(1,0,0),\ (1,0,1),\ (1,0,2),\dots,(1,0,s_2)$

2.cs.: $(2,0,0),\ (2,1,0),\ (2,2,0),\dots,(2,s_1,0)$

3.cs.: $(1,1,0),\ (1,1,1),\ (1,1,2),\dots,(1,1,s_2),\ (1,2,0),\ (1,2,1),\dots$
$(1,2,s_2),\ (1,3,0),\ (1,3,1),\dots,(1,s_1,0),\ (1,s_1,1),\dots,$
$(1,s_1,s_2)$

4.cs.: $(2,0,1),\ (2,1,1),\ (2,2,1),\dots,(2,s_1,1),\ (2,0,2),\ (2,1,2),\dots$
$(2,s_1,2),\ (2,0,3),\ (2,1,3),\dots,\ (2,0,s_2),\ (2,1,s_2),\dots,$
$(2,s_1,s_2)$

Az átmenetvalószinüségek P mátrixának meghatározásához tekintsük az

$$(i,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2) \qquad /3.2/$$

átmeneteket. A fenti csoportositásnak megfelelően legyen a P mátrix felbontása

$$P = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \qquad /3.3/$$

ahol R_{uv} jelenti az u-adik csoportból a v-edikbe való átmenetek valószinüségeinek mátrixát. A /3.3/-ban szereplő mátrixoknál az 1-es indexhez s_1+1, a 2-hez s_2+1, a 3-ashoz $s_1(s_2+1)$, míg a 4-hez $s_2(s_1+1)$ sor ill. oszlop tartozik.

A kiszolgálási szabály figyelembevételével azonnal megállapitható, hogy

$$R_{32} = 0,\ R_{34} = 0,\ R_{41} = 0,\ R_{43} = 0\ ,$$

valamint $n_1 > 1$ ill. $n_2 > 1$ esetén az $R_{12} = 0$ ill. $R_{21} = 0$ is teljesül, minthogy ezen mátrixoknak megfelelő átmenetek nem lehetségesek. Hasonlóképpen belátható, hogy a többi R_{uv} mátrix is sok 0-t tartalmaz. Igy például az R_{11} és R_{13} ill. R_{22} és R_{24} mátrixok $k_2 \geq n_2$ ill. $k_1 \geq n_1$-nek megfelelő sorai 0-ákból állnak. A P mátrix azon elemei, amelyekre a továbbiakban nem adunk összefüggést, 0-ok lesznek. Képleteinket az $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ tipusu átmenetekre irjuk fel, mig a $(2,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ átmenetekre hasonló módon, a megfelelő indexek felcserélésével kaphatjuk meg az eredményeket. Mindezek figyelembevételével P elemeinek meghatározásához négy esetet kell megkülönböztetnünk.

Ha $k_2 < n_2$, akkor az $(1,0,k_2)$ állapot után következhet $(1,l_1,l_2)$ $l_1 \geq 0$, $l_2 \geq k_2$; vagy $(2,l_1,l_2)$, $l_1 \geq 0$, $l_2 \geq n_2-1$ állapot, aszerint, hogy egy A tipusu vagy n_2-k_2 B tipusu egység érkezik előbb az $(1,0,k_2)$ állapot kialakulása után. Felhasználva, hogy az érkezés homogén Poisson folyamat szerint történik, tetszőleges időpillanatban annak valószinüsége, hogy A ill. B tipusu lesz a következő érkező, $\frac{a_1}{a_1+a_2}$ ill. $\frac{a_2}{a_1+a_2}$. Igy annak valószinüségét, hogy egy A tipusu egység előbb érkezik, mint n_2-k_2 B tipusu, az

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}\sum_{m=0}^{n_2-k_2-1}\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^m \qquad /3.4/$$

kifejezés adja.

A /3.2/-vel jelölt átmenet ideje alatt $j=1$ esetben az A tipusu egységekből l_2-k_2+1 érkezett, egy pedig kiszolgálódott, a B tipusuakból l_2-k_2 érkezett. A $j=2$ esetben l_1-k_1 A és l_2-k_2+1 B tipusu érkezése és egy B tipusu kiszolgálás történt. Közben átkapcsolásra is szükség volt, ha $i\neq j$.

Feltevéseink szerint az A és B tipusu érkezések egymástól független Poisson folyamatot alkotnak. Ezért annak valószinüsége, hogy valahogyan kiválasztott t idő alatt m_1 A és m_2 B tipusu érkezés történik

$$\frac{(a_1t)^{m_1}}{m_1!}\frac{(a_2t)^{m_2}}{m_2!}e^{-(a_1+a_2)t} \qquad /3.5/$$

1. A $k_2<n_2$ esetben az $(1,0,k_2)\longrightarrow(2,l_1,l_2)$, $l_1\geq 0$, $l_2\geq n_2-1$ átmenet valószinüsége /3.4/ és /3.5/ segitségével a következőképpen irható fel:

$$\left[1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\sum_{m=0}^{n_2-k_2-1}\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^m\right]\cdot$$

/3.6/

$$\frac{a_1^{l_1}}{l_1!}\,\frac{a_2^{l_2-n_2+1}}{(l_2-n_2+1)!}\int_0^\infty x^{l_1+l_2-n_2+1}\cdot e^{-(a_1+a_2)x}\,dT(x)$$

ahol

$$T(x)=\int_0^x C_{12}(x-t)\,dB_2(t) \qquad /3.7/$$

a T_2+T_{12} kiszolgálási és átkapcsolási idők összegének eloszlásfüggvénye.

2. A $k_2<n_2$ esetben az $(1,0,k_2)\longrightarrow(1,l_1,l_2)$, $l_1\geq 0$, $l_2\geq k_2$ átmenetnél figyelemmel kell lennünk arra is, hogy a kiszolgálandó A tipusu egység hányadik B tipusu után érkezik. Ennek megfelelően ezen átmenetek valószinüsége:

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}\sum_{m=0}^{\min(l_2,n_2-k_2-1)}\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^m\cdot \qquad /3.8/$$

$$\frac{a_1^{l_1}}{l_1!}\,\frac{a_2^{l_2-k_2-m}}{(l_2-k_2-m)!}\int_0^\infty x^{l_1+l_2-k_2-m}\,e^{-(a_1+a_2)x}\,dB_1(x)$$

3. A $k_2 \geq n_2$ esetben a lehetséges $(1,0,k_2) \longrightarrow (2,l_1,l_2)$, $l_1 \geq 0$, $l_2 \geq k_2-1$ átmenetek valószinüsége /3.7/ segitségével:

$$\frac{a_1^{l_1}}{l_1!} \frac{a_2^{l_2-k_2+1}}{(l_2-k_2+1)!} \int_0^\infty x^{l_1+l_2-k_2+1} e^{-(a_1+a_2)x} dT(x) . \qquad /3.9/$$

4. $k \geq 1$ esetben csak $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (1,l_1,l_2)$, $l_1 \geq k_1$, $l_2 \geq k_2$ tipusu átmenetek lehetségesek, amiknek a valószinüsége:

$$\frac{a_1^{l_1-k_1+1}}{(l_1-k_1+1)!} \frac{a_2^{l_2-k_2}}{(l_2-k_2)!}$$

$$\int_0^\infty x^{l_1+l_2-k_1-k_2+1} \cdot e^{-(a_1+a_2)x} dB_1(x) . \qquad /3.10/$$

A /3.6/, /3.8/, /3.9/ és /3.10/ képletek felirásánál figyelmen kivül hagytuk a /2.2/ Markov lánc /3.1/ szerinti véges állapottérre való leszükitését. A P mátrix azon elemeit, amelyekhez tartozó /3.2/ tipusu átmenetekben a $k_1 = s_1$, $k_2=s_2$, $l_1=s_1$ vagy $l_2=s_2$ szerepel a /3.6/, /3.8/, /3.9/ és /3.10/ kifejezések valamilyen $k_1 \geq s_1$, $k_2 \geq s_2$, $l_1 \geq s_1$ vagy $l_2 \geq s_2$ -re vett összegeként kapjuk meg. Igy például az 1. esetben a $k_2 < n_2$, $(1,0,k_2) \longrightarrow (1,l_1,s_2)$, $0 \leq l_1 < s_1$ átmenethez tartozó valószinüségeket a /3.6/-ban szereplő valószinüségek $l_2 \geq s_2$-re vett összege adja meg.

IV. Átmeneti idők

Feltevéseink szerint a kiszolgáló rendszerbe az egységek a_1 és a_2 intenzitásu Poisson folyamat szerint érkeznek. Ismeretes, hogy ebben az esetben az érkezések közötti idő exponenciális eloszlásu

$$a_1 e^{-a_1 x} \quad \text{és} \quad a_2 e^{-a_2 x} \qquad /4.1/$$

sürüségfüggvényekkel, várható értékeik pedig

$$\frac{1}{a_1} \quad \text{és} \quad \frac{1}{a_2} \qquad /4.2/$$

A kiszolgálások befejezése között eltelt idők, azaz a /2.3/-ban szereplő $z_m = t_{m+1} - t_m$ átmeneti idők kiszolgálási, átkapcsolási időkből, valamint az érkező egységekre való varakozásokból tevődnek össze. Ezért a z_m várható értéke $M[z_m]$ kifejezhető a felsorolt egymástól független véletlen idők

$$\beta_i = \int_0^\infty x\, d\beta_i(x) \qquad \gamma_{ij} = \int_0^\infty x\, dC_{ij}(x)\,; \qquad i,j = 1,2 \quad i \neq j\,, \qquad /4.3/$$

valamint a két Poisson folyamat $\frac{1}{a_1}$ és $\frac{1}{a_2}$ várható értékeivel.

Jelöljük az átmenetek közti idők várható értékeinek mátrixát A-val. A azon elemei, amelyekhez nem tartozik lehetséges átmenet, legyenek 0-ok. Ezek helyei megegyeznek a P átmenetmátrix 0 elemeinek helyeivel.

A /4.2/ és /4.3/ segitségével az A mátrix 0-tól különböző elemei, a III-ban vizsgált négy esetnek megfelelően, a következőképpen adhatók meg:

1. A $k_2 < n_2$ esetben az $(1,0,k_2) \longrightarrow (2,l_1,l_2)$ átmenetek közti idő várható hossza:

$$\frac{n_2 - k_2}{a_2} + \gamma_{12} + \beta_2 .$$

2. A $k_2 < n_2$, $(1,0,k_2) \longrightarrow (1,l_1,l_2)$ esetben

$$\frac{1}{a_1} + \beta_1 .$$

3. A $k_2 \geq n_2$, $(1,0,k_2) \longrightarrow (2,l_1,l_2)$ átmeneteknél

$$\gamma_{12} + \beta_2 ,$$

mig a 4. $k \geq 1$ esetben az $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (1,l_1,l_2)$ átmenetekre vonatkozóan β_1 lesz.

A $/2,k_1,k_2/ \longrightarrow /j,l_1,l_2/$ tipusu átmenetek közti idők várható értékei a kapott eredményekből a megfelelő indexek felcserélésével adódnak.

V. Várakozási idők

A kiszolgáló rendszerbe érkező egységek a rendszer állapotától függően vagy azonnal a kiszolgáló berendezéshez kerülnek, vagy az A ill. B tipusu sorban várakoznak a kiszolgálásuk megkezdéséig. Az érkezéstől a kiszolgálás megkezdéséig eltelt idő az illető egység várakozási ideje. A továbbiakban kiszámitjuk egy átmenet ideje alatt a rendszerben levő egységek várakozási ideje növekedésének várható értékét. Ehhez bevezetjük a virtuális várakozási idő fogalmát. Jelölje $\eta_1(t)$ ill. $\eta_2(t)$ azt az időt, amit az A ill. B tipusu egységnek várnia kellene a kiszolgálása megkezdéséig, ha a t időpontban érkezne. $\eta_j(t)$, $j=1,2$ szakaszonként konstans vagy -1 meredekséggel csökkenő lineáris függvény. Legyenek az A ill. B tipusu egységek érkezési pontjai rendre $t_1^{(1)}, t_1^{(2)},\dots, t_2^{(1)}, t_2^{(2)},\dots,$ akkor az $\eta_j(t)$, $j=1,2$ függvények szakadási pontjai a $t_1^{(l)}$, $t_2^{(l)}$ és a kiszolgálások befejeződési t_m időpillanatai.

Jelöljük δ_{jn}-el a $t_n^{(l)}$ $n=1,2$ időpillanatban az $\eta_j(t)$, $j=1,2$ függvény véletlen növekedésének megfelelő valószinüségi változót és legyenek δ_{jn}-nek $t_n^{(l)}$ -ben felvett értékei $\delta_{jn}^{(l)}$. Tekintsünk egy átmenet (t_m,t_{m+1}) időintervallumát. Könnyen belátható, hogy létezik olyan $T^{(j)}$ pont, amelyre teljesül, hogy $\eta_j(t)$, $j=1,2$ konstans a $t_m< t<T^{(j)}$ szakaszon, mig $T^{(j)}< t <t_{m+1}$-ben szakaszonként lineárisan csökkenő. $T^{(j)}$ megegyezik $\eta_j(t)$ valamelyik szakadási pontjával.

Tetszőleges t időpillanatban, melyre $t_m\leq t < t_{m+1}$ az $\eta_j(t)$ a következőképpen irható:

$$\eta_j(t) = \eta_j(t_m+0) + \sum_{\substack{t_m<t_n^{(l)}<t \\ n=1,2}} \delta_{jn}^{(l)} + (t-T^{(j)})\,\sigma(t) \qquad /5.1/$$

ahol

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t_m < t < T^{(j)} \\ 1, & \text{ha } T^{(j)} < t < t_{m+1} \end{cases}.$$

A $t_j^{(l)}$ időpillanatban érkező egység várakozási ideje $\eta_j(t_j^{(l)})$, mig a $z_m = t_{m+1} - t_m$ időközben érkező A (ill. B) tipusuak várakozási idejének növekedése $j=1$ (ill. $j=2$) mellett

$$V_j(z_m) = \sum_{t_m < t_j^{(l)} < t_{m+1}} \eta_j(t_j^{(l)}) \quad . \qquad /5.2/$$

A továbbiakban megkülönböztetett jelentőséget tulajdonithatunk az A (ill. B) tipusu egységeknek olymódon, hogy a várakozási idejüket sulyozottan vesszük figyelembe. Legyen $0 \leq \alpha_1 \leq 1$, $0 \leq \alpha_2 \leq 1$ és tekintsük az α_1, α_2-vel sulyozott teljes várakozási időnek a z_m időre eső növekedését:

$$V(z_m) = \alpha_1 V_1(z_m) + \alpha_2 V_2(z_m) \quad . \qquad /5.3/$$

/5.2/ az /5.1/ felhasználásával a következőképpen irható át:

$$V_j(z_m) = \eta_j(t_m+0) \sum_{t_m < t_j^{(l)} < t_{m+1}} 1 - \sum_{t_m < t_j^{(l)} < t_{m+1}} (t_j^{(l)} - T^{(j)})\, \sigma(t) + \sum_{t_m < t_j^{(l)} < t_{m+1}} \Big[\sum_{\substack{t_m < t_r^{(s)} < t_j^{(l)} \\ r=1,2}} \delta_{jr}(s) \Big] \qquad /5.4/$$

Az átmenetekre a /3.2/ jelöléseket használva legyen

$$R = r_1 + r_2,\ r_n = \begin{cases} l_n - k_n + 1 & \text{ha } n=j \\ l_n - k_n & \text{ha } n \neq j \end{cases},\quad (n,j=1,2)$$

Jelöljük /5.4/ első, második és harmadik tagjának várható értékét $M_{jm}^{(1)}$, $M_{jm}^{(2)}$ és $M_{jm}^{(3)}$ -al, akkor $v_j(z_m)$ várható értéke

$$M[v_j(z_m)] = M_{jm}^{(1)} - M_{jm}^{(2)} + M_{jm}^{(3)} . \qquad /5.5/$$

/5.3/-ból pedig

$$M[v(z_m)] = \alpha_1 M[v_1(z_m)] + \alpha_2 M[v_2(z_m)] \qquad /5.6/$$

Egyszerüen adódik, hogy

$$M_{jm}^{(1)} = r_j M[\eta_j(t_m+0)] . \qquad /5.7/$$

/5.4/ második tagja $r_j = 0$ esetén 0. $r_j \geq 1$-re az $M_{jm}^{(2)}$ kiszámolásához felhasználjuk a Poisson folyamat következő sajátosságát. Érkezzenek egységek egymástól függetlenül, Poisson folyamat szerint. Annak valószinüsége, hogy egy érkezés, amely a (0,T) intervallumba esik, annak $(0,\tau)$ részében következik be τ/T-vel egyenlő és független attól, hogy a többi érkezési pont hogyan oszlik el a (0,T)-ben. Igy minden egyes (0,T)-ben bekövetkezett érkezésre vonatkozólag T/2 az érkezési pontig eltelt idő várható értéke. Az $M_{jm}^{(2)}$ kiszámolásához a T szerepét a $t_{m+1} - T^{(j)}$ veszi át és minthogy ez idő alatt éppen r_j darab a_j intenzitásu Poisson folyamat szerint érkező egység érkezését kell figyelembevennünk, ezért

$$M_{jm}^{(2)} = r_j \frac{1}{2} \int_0^\infty x \, d_x P(t_{m+1} - T^{(j)} \leq x) = \frac{r_j}{2} M_{jm}^{(4)} \,, \qquad /5.8/$$

ahol $M_{jm}^{(4)}$ a $t_{m+1} - T^{(j)}$ idő várható értéke.

A z_m idő alatt R egység érkezett a rendszerbe. Az $M_{jm}^{(3)}$ meghatározásához tekintettel kell lenni arra is, hogy milyen sorrendben érkezett az r_1 A és r_2 B tipusu egység. Ugyanis minden egyes érkezésnél az azt megelőző érkezőknél fellépő várakozási idő növekedését figyelembe kell venni. Igy az l-edszerre érkező hatása $R-l$-szer szerepel az összegben.

Legyen $h_1, h_2, \ldots, h_R$ egy érkezési sorrend. Könnyü bebizonyitani, hogy az érkezés Poisson jellege miatt minden egyes sorrend fellépése egyenlően valószinü. Minthogy a lehetséges különböző sorrendek száma $\frac{R!}{r_1!\, r_2!}$, ezért tetszőleges sorrend fellépésének valószinüsége $r_1! r_2!/R!$. Az /5.4/ harmadik tagjának várható értéke ezekután

$$M_{jm}^{(3)} = \frac{r_1! r_2!}{R!} \sum_{(h_1, h_2, \ldots, h_R)} \sum_{l=1}^{R} (R-l)\, M[\delta_{jh_l}] \,. \qquad /5.9/$$

Az első $\sum$ az összes R elemü $h_1, h_2, \ldots, h_R$ ismétléses permutációra vonatkozik.

Az /5.7/ és /5.9/-ben szereplő $M[\eta_j(t_m+o)]$ és $M[\delta_{jh_l}]$ várható értékeket, valamint az /5.8/-ban a $P(t_{m+1} - T^{(j)} \leq x)$

eloszlásfüggvényt az átmenet kezdeti (i,k_1,k_2) és (j,l_1,l_2) végállapota határozza meg. Ezek felírását az $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ tipusu átmenetekre végezzük el, a $(2,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ tipusuakra pedig a megfelelő indexek felcserélésével kapjuk az eredményeket.

A $k_1 = 0$, $k_2 < n_2$ és az összes $k_1 > 0$ esetben egyszerüen adódik

$$M[\eta_1(t_m+0)] = k_1\beta_1 . \qquad /5.10/$$

Azonban a t_m pillanatban a rendszerben tartózkodó B tipusuaknak nemcsak a már a rendszerben levő A tipusuak távozását kell megvárni, hanem mindazon A tipusuakét is, akik közben érkeznek. De ezután is csak akkor kezdődhet meg a B tipusuak kiszolgálása, ha már telitődött a B tipusuak sora. Ezért az $M[\eta_2(t_m+0)]$ függ az n_2-k_2 különbségtől is. Ennek megfelelően a $k_1 > 0$, $n_2 - k_2 \leq 1$ és $k_1 = 0$ $n_2 - k_2 = 1$ esetekben

$$M[\eta_2(t_m+0)] = \gamma_{12} + k_2\beta_2 + k_1\beta_1 + k_1\beta_1(a_1\beta_1) + k_1\beta_1(a_1\beta_1)^2 + \dots =$$

$$= \gamma_{12} + k_2\beta_2 + k_1\beta_1 \frac{1}{1-a_1\beta_1} \qquad /5.11/$$

Az $n_2 - k_2 \geq 2$ esetekben a t_m-ben esetleg érkező B tipusu egységnek még $n_2 - k_2 - 1$ B tipusu egységet be kell várnia, ahhoz, hogy a kiszolgálása megkezdődhessen. Ehhez átlagosan $\frac{n_2-k_2-1}{a_2}$ idő kell. Ha

$$\frac{k_1\beta_1}{1-a_1\beta_1} > \frac{n_2-k_2-1}{a_2} \qquad /5.12/$$

teljesül, akkor ebben az esetben is /5.11/ érvényes. Ha viszont /5.12/ nem teljesül, akkor a készülék átkapcsolásáig átlagosan $\frac{n_2-k_2-1}{a_2}$ ideig kellene várni, ha az $\frac{n_2-k_2-1}{a_2} - \frac{k_1\beta_1}{1-a_1\beta_1}$ idő alatt érkező A tipusuak ebben az időszakban el is hagyják a rendszert. Viszont amennyivel később hagyják el, annyival később kezdődhet meg az átkapcsolás, vagyis annyival nagyobb a B tipusuak várakozási ideje. Itt ennek az időnek a pontos meghatározásával nem foglalkozunk és az /5.12/ nem teljesülése esetén a jó közelitést adó

$$M[\eta_2(t_m+0)] = \gamma_{12} + k_2\beta_2 + \frac{n_2-k_2-1}{a_2} \qquad /5.13/$$

képletet használjuk.

A $k_1 = 0$, $k_2 \geq n_2$ esetben a t_m időpillanatban megindul a készülék átkapcsolása A-ról a B tipusuak kiszolgálására. Igy a közvetlen t_m időpillanat után érkező B tipusuaknak az átkapcsolás után csak a B tipusu sorbanállók kiszolgálását kell megvárni, azaz érvényes $k_1 = 0$ mellett /5.11/. A közvetlen t_m után érkező A tipusu egységre vonatkozó átlagos várakozási idő a fenti meggondolásokhoz hasonlóan a $k_1 = 0$, $k_2 \geq n_2$ esetben

$$M[\eta_1(t_m+0)] = \gamma_{12} + \gamma_{21} + \max\left(\frac{k_2\beta_2}{1-a_2\beta_2}, \frac{n_1-1}{a_1} - \gamma_{12}\right). \qquad /5.14/$$

Az /5.8/-ban szereplő $M_{jm}^{(4)} = M[t_{m+1} - T^{(j)}]$ várható értéket a $T^{(j)}$ pont helyzete határozza meg. Az $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ tipusu átmenetekre vonatkozóan a következő eseteket különböztetjük meg:

1\. $k_1 \geq 1$ esetben $T^{(j)} = t_m$, $M_{jm}^{(4)} = \beta_1$, $j=1,2$

2\. $k_1 = 0$, $k_2 \geq n_2$ esetben $T^{(j)} = t_m$, $M_{jm}^{(4)} = \gamma_{12} + \beta_2$, $j=1,2$

3\. $k_1 = 0$, $k_2 < n_2$ " több lehetőség van.

a./ $(1,0,k_2) \longrightarrow (1,l_1,l_2)$ átmenetnél $T^{(1)}$ = az első A tipusu egység érkezési pontja és igy $M_{jm}^{(4)} = \beta_1$, mig $T^{(2)} = t_m$, kivéve az $n_2 = 1$, $k_2 = 0$ esetet, amikor $T^{(2)}$ is az első A tipusu érkezési pontja. A két lehetőségnek megfelelően $M_{2m}^{(4)} = \frac{1}{a_1} + \beta_1$ vagy β_1.

b./ Az $(1,0,k_2) \longrightarrow (2,l_1,l_2)$, $k_2 < n_2$ átmeneteknél $T^{(1)}$ valamint $n_2 = 1$, $k_2 = 0$ esetben $T^{(2)}$ is az n_2-k_2-edik B tipusu érkezési pontja és igy $M_{1m}^{(4)} = M_{2m}^{(4)} = \beta_2 + \gamma_{12}$, különben pedig $T^{(2)} = t_m$, $M_{2m}^{(4)} = \frac{n_2-k_2}{a_2} + \gamma_{12} + \beta_2$.

Az /5.9/-ben szereplő $M[\delta_{jh_l}]$ mennyiség definició szerint a t_m-től számitott l-edik érkezési pontban az $\eta_j(t)$ függvény ugrásának várható értéke. Ezt az ugrást $h_l = 1$ esetben A, $h_l = 2$ esetben B tipusu egység érkezése idézi elő. Az $M[\delta_{jh_l}]$ mennyiségeket is az $(1,k_1,k_2) \longrightarrow (j,l_1,l_2)$ tipusu átmenetekre vizsgáljuk.

1\. $k_1 \geq 1$ esetben és az $(1,0,k_2) \longrightarrow (1,l_1,l_2)$ átmeneteknél

$$M[\delta_{11}] = M[\delta_{21}] = \beta_1, \quad M[\delta_{12}] = 0, \quad M[\delta_{22}] = \beta_2 \qquad /5.15/$$

2\. Ha $k_1 = 0$, $k_2 \geq n_2$, akkor

$$M[\delta_{11}] = \beta_1, \quad M[\delta_{21}] = 0, \quad M[\delta_{12}] = M[\delta_{22}] = \beta_2 \qquad /5.16/$$

3\. A $k_1 = 0$, $k_2 < n_2$ esetben l -től is függ az $M[\delta_{jh_l}]$.
Az $(1,0,k_2) \longrightarrow (2,l_1,l_2)$, $k_2 < n_2$ átmenetnél $h_l = 2$, $1 \leq l \leq n_2-k_2$. Ezek közül $1 \leq l \leq n_2-k_2-1$-re /5.15/ áll fenn, míg $l = n_2-k_2$-re

$$M[\delta_{12}] = \gamma_{12} + \gamma_{21} + \max\left(\frac{n_2\beta_2}{1-a_2\beta_2}, \frac{n_1-1}{a_1} - \gamma_{12}\right), \quad M[\delta_{22}] = \beta_2 \qquad /5.17/$$

A további $l > n_2 - k_2$-re pedig /5.16/ érvényes.

VI. A rendszer optimalizálása exponenciális eloszlások esetén

A III., IV. és V. pontok képletei lehetőséget adnak a rendszerben lejátszódó fél-Markov-folyamat átmenet valószinüségek $P = \{p_{ij}\}$ mátrixának, az átmeneti idők $A = \{a_{ij}\}$ és a sulyozott várakozási idők $V = \{v_{ij}\}$ mátrixainak a felirására, ha megadjuk a $B_1(x)$, $B_2(x)$, $C_{12}(x)$ és $C_{21}(x)$ eloszlásfüggvényeket. A P, A és V mátrixok függnek az n_1 és n_2 paraméterektől. Rögzitve valamilyen n_1 és n_2 értékeket a $P = \{p_{ij}\}$, $A = \{a_{ij}\}$ és a $V = \{v_{ij}\}$ mátrixok segitségével a [3]-ban leirtaknak megfelelően meghatározzuk a $B = \{b_{ij}\}$, $U = \{u_{ij}\}$, majd a Q_i, B_i és U_i mátrixokat ugy, hogy legyen

$$b_{ij} = p_{ij}\, a_{ij}; \quad u_{ij} = p_{ij}\, v_{ij},$$

a Q_i, B_i és U_i mátrixokat pedig ugy kapjuk a P, B és U mátrixokból, hogy azok i-edik sorába 0-okat irunk. Jelölje $\underline{p}_i$, $\underline{b}_i$ és $\underline{u}_i$ a P, B, és U mátrixok i-edik sorvektorát.

A kiszolgáló rendszerünk müködését az időegységre eső sulyozott várakozási idővel jellemeztük, amit az i-edik állapotból kiinduló ciklusokra vonatkozóan számolva [3] alapján a

$$\varrho_i(n,n_2) = \frac{\mu_i(n_1,n_2)}{\beta_i(n_1,n_2)} \qquad /6.1/$$

hányados ad meg, ahol

$$\mu_i(n_1,n_2) = \underline{u}_i \underline{e} + \underline{p}_i (I-Q_i)^{-1} (U_i \underline{e}) \qquad /6.2/$$

$$\beta_i(n_1,n_2) = \underline{b}_i \underline{e} + \underline{p}_i (I-Q_i)^{-1} (B_i \underline{e}) \qquad /6.3/$$

A rendszer optimalizálása az a_1, a_2 bemeneti paraméterek, $B_1(x)$, $B_2(x)$, $C_{12}(x)$ és $C_{21}(x)$ eloszlásfüggvények és /5.3/-ban szereplő α_1, α_2 sulyok megadása mellett azon n_1 és n_2 paraméterek megkeresését jelenti, amelyekkel /6.1/ minimális lesz. Az optimum meghatározását exponenciális eloszlásfüggvényekre végeztük el. Legyen a továbbiakban

$$B_i(x) = 1 - e^{-\lambda_i x}, \quad C_{ij}(x) = 1 - e^{-\nu_i x} \qquad i,j = 1,2, \quad i \neq j \qquad /6.4/$$

várható értékeik pedig

$$\beta_i = \frac{1}{\lambda_i}, \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{\nu_i} \qquad i,j = 1,2 \quad i \neq j \qquad /6.5/$$

/6.4/ függvényeket helyettesitve a /3.8/, /3.10/, majd /3.7/ felhasználásával a /3.6/ és /3.9/ képletekbe a kijelölt integrálások könnyen elvégezhetők. A /3.6/, /3.8/, /3.9/ és /3.10/

képletekből a P mátrix elemeinek kiszámolására rendre kapjuk a következő kifejezéseket:

$$\lambda_2 \nu_1 [(l_1+l_2-n_2+1)!] \left[1-\frac{a_1}{a_1+a_2}\sum_{i=0}^{n_2-k_2-1}\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^i\right] \frac{a_1^{l_1}}{l_1!} \frac{a_2^{l_2-n_2+1}}{(l_2-n_2+1)!} \cdot \qquad /6.6/$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{l_1+l_2-n_2+1} \frac{1}{(a_1+a_2+\lambda_2)^{1+i}} \cdot \frac{1}{(a_1+a_2+\nu_1)^{l_1+l_2-n_2+2-i}}$$

$$\frac{1}{l_1!} \frac{\lambda_1}{a_1+a_2} \left(\frac{a_1}{a_1+a_2+\lambda_1}\right)^{l_1+1} \sum_{i=0}^{\min(l_2-k_2,\, n_2-k_2-1)} \left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^i \frac{(l_1+l_2-k_2-i)!}{(l_2-k_2-i)!} \left(\frac{a_2}{a_1+a_2+\lambda_1}\right)^{l_2-k_2-i} \qquad /6.7/$$

$$\frac{a_1^{l_1}}{l_1!} \frac{a_2^{l_2-k_2+1}}{(l_2-k_2+1)!} \lambda_2 \nu_1 [(l_1+l_2-k_2+1)!] \cdot \qquad /6.8/$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{l_1+l_2-k_2+1} \frac{1}{(a_1+a_2+\lambda_2)^{1+i}} \cdot \frac{1}{(a_1+a_2+\nu_1)^{l_1+l_2-k_2+2-i}}$$

$$\frac{(l_1+l_2-k_1-k_2+1)!}{(l_1-k_1+1)!\,(l_2-k_2)!} \left(\frac{a_1}{a_1+a_2+\lambda_1}\right)^{l_1-k_1+1} \left(\frac{a_2}{a_1+a_2+\lambda_1}\right)^{l_2-k_2} \frac{\lambda_1}{a_1+a_2+\lambda_1} \qquad /6.9/$$

Az átlagos átmeneti idők A mátrixának meghatározásához a IV-ben szereplő képletekbe, valamint /5.8/ meghatározásához felirt öszszefüggésekbe a /6.5/ szerinti helyettesitést kell elvégezni.

Hasonlóan /6.5/-öt helyettesitve /5.10/, /5.11/, /5.13/, /5.14/, /5.15/, /5.16/ és /5.17/-be ezek segitségével kapjuk meg az /5.7/ és /5.9/ mennyiségeket. Az /5.7/, /5.8/ és /5.9/ mennyiségeket

/5.5/-be, majd azt /5.6/-ba helyettesitjük. Egy-egy átmenetre számolt /5.6/ adja a V mátrix megfelelő v_{ij} elemét.

Numerikus számolásokat a következő adatok mellett végeztünk:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = 1 \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = 1 \\ a_1 &= a_2 = 0.1 \\ \nu_1 &= \nu_2 = 1,\ 0.2,\ 0.1 \end{aligned} \qquad /6.10/$$

A /3.1/-ben szereplő s_1 és s_2 korlátokat 5-nek választottuk.

A /6.10/ adatokkal $n_1 = n_2 = 1$, 2 és 3-ra számoltuk ki a /6.1/ hányadost. A kapott eredményeket az 1. táblázat 4., 5. és 6. oszlopában foglaltuk össze. A táblázat 3. oszlopában feltüntettük azt az állapotot, amelyből kiindul a számolás alapjául szolgáló ciklus.

Az 1. táblázatból megállapitható, hogy $\nu_1 = \nu_2 = 1$ esetén $n_1 = n_2 = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = .2$ és $\nu_1 = \nu_2 = .1$-re $n_1 = n_2 = 2$ szolgáltatta az optimális megoldást.

Azonos bemeneti adatok esetén különböző állapotokra vonatkozó ciklussal számolva a ciklus átlagos hossza β és az erre jutó átlagos várakozás μ természetesen más lesz, de a ϱ értékei keveset különböznek. $\nu_1 = \nu_2$ csökkenésével azonban egyre nagyobb eltérések lépnek fel.

A /6.2/ és /6.3/-ban szereplő $\underline{p}_i\,(I-Q_i)^{-1}$ vektort az iterációval számolható

$$\underline{p}_i + \underline{p}_i\,Q_i + (\underline{p}_i\,Q_i)\,Q_i + \ldots \qquad /6.11/$$

sorral állitottuk elő. Majd az előre számolt $B_i\underline{e}$ és $U_i\underline{e}$ oszlopvektorokkal szorozva $\underline{b}_i\underline{e}$ és $\underline{u}_i\underline{e}$ hozzáadásával kapjuk μ_i és β_i értékeit.

A számolást a [3]-ban közölt második módszerrel is elvégeztük. Ehhez meghatároztuk a /2.2/ Markov lánc ergódikus eloszlását, a $\underline{\pi}$ valószinüségi vektort. Ennek segitségével a rendszerünk hatékonyságát a

$$\varrho = \frac{\underline{\pi}\,(U\underline{e})}{\underline{\pi}\,(B\underline{e})} \qquad /6.12/$$

kifejezés szolgáltatja. Eredményeinket az 1. táblázat 7., 8. és 9. oszlopa tartalmazza. Az 1. táblázatból látható, hogy a rendszer hatékonyságát kifejező /6.1/ és /6.12/ jó közelitésben ugyanazt az eredményt adja, de $\nu_1 = \nu_2$ csökkenésével ez az egyezés egyre romlik.

A $\underline{\pi}$ vektort a

$$\underline{p}_i\,P^n = (\underline{p}_i\,P^{n-1})\,P \qquad /6.13/$$

vektor mátrix szorzatok sorozatával közelitettük meg, ahol $\underline{p}_i$ a P i-edik sora. Az i indexet az 1. táblázat 3. oszlopában feltüntetett állapotnak megfelelően választottuk meg.

$\nu_1=\nu_2$	$n_1=n_2$	Kezdő állapot	/6.1/ eredményei			/6.12/ eredményei		
			β	μ	ϱ	nevező	számláló	ϱ
1	1	(1,0,0)	24.20	4.81	0.1988	8.53	1,69	0.1988
	2	"	48.31	17.93	0.3712	7.93	2.94	0.3712
		(1,0,1)	61.39	22.79	0.3712	7.93	2.94	0.3712
		(1.1,0)	69.17	25.67	0.3712	7.93	2.94	0.3712
		(1,1,1)	240.99	89.44	0.3711	7.93	2.94	0.3712
	3	(1,0,0)	68.18	60.71	0.8905	8.71	7.76	0.8905
.2	1	"	34.49	26.95	0.7816	7.12	5.56	0.7819
	2	"	65.25	41.21	0.6315	7.33	4.63	0.6318
	3	"	92.83	101.81	1.0968	8.33	9.14	1.0968
.1	1	"	52.76	83.06	1.5742	6.96	11.01	1.5806
		(1,1,0)	144.78	226.68	1.5656	6.76	10.73	1.5869
	2	(1,0,0)	87.17	95.67	1.0975	7.17	7.93	1.0611
	3	"	89.42	120.78	1.3507	4.47	6.06	1.3542
		(1,0,1)	76.72	103.10	1.3438	4.47	6.06	1.3542

1. táblázat

A $\underline{\Pi}$ stacionáris valószinüség vektort az [1] és [2] alapján közvetlen is kiszámolhatjuk. Néhány esetre el is végeztük ezeket a számolásokat, amellyel kontroláltuk a /6.13/-al számolt vektor néhány elemét. A következő pontban a stacionáris eloszlás közvetlen meghatározásával foglalkozunk.

VII. Stacionárius valószinüségek meghatározása

Az [1] és [2]-ben bebizonyitottuk, hogy a rendszer állapotára jellemző /2.2/ ergódikus Markov lánc, p_{i,k_1,k_2} -vel jelöltük annak valószinüségét, hogy stacionáris esetben egy kiszolgálás befejezési időpillanatában az (i,k_1,k_2) állapotban marad a rendszer, mig $P_i(z_1,z_2)$-vel p_{i,k_1,k_2} valószinüségek generátorfüggvényét $(i=1,2)$. Összefüggéseket irtunk fel $P_1(z_1z_2)$ és $P_2(z_1z_2)$ függvényekre, a [2]-ben pedig eljárást adtunk a p_{i,k_1,k_2} valószinüségek meghatározására.

Ebben a pontban a /6.4/ feltevés mellett a $p_{1,m} = p_{1,0,m}$, $p_{2,m} = p_{2,m,0}$ valószinüségek kiszámolására adjuk meg az algoritmust és a szükséges képleteket. Meggondolásaink és a képletek az [1] és [2] cikkből nyerhetők.

Jelöljük a $P_1(z_1z_2)$ ill. $P_2(z_1,z_2)$ függvények n-edik differenciálhányadosának $z_1 = 0, z_2 = 1$ ill. $z_1=1$, $z_2=0$ helyen vett helyettesitési értékeit $P_1^{(n)}$ [1] ill. $P_2^{(n)}$ [1]-el. [1]

és [2] alapján bevezetjük a következő függvényeket és jelöléseket $(i,j=1,2\ i\neq j)$:

$$f_i(z) = -\frac{\lambda_i}{a_j}\frac{1}{z} - \frac{a_i}{a_j}z + \frac{a_1+a_2+\lambda_i}{a_j} \qquad /7.1/$$

$$g_i^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{ha } n=0 \\ \frac{\lambda_i}{\nu_j}\left(\frac{\lambda_i}{\nu_j}-1\right)^{n-1} & \text{ha } n>0 \end{cases} \qquad /7.2/$$

$$S_i = \sum_{m=0}^{n_j-1} p_{i,m}\left[1-\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^{n_j-m}\right] \qquad /7.3/$$

$$D(l,k) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k>1 \\ \frac{l!}{(l-k)!} & \text{ha } k\leq 1 \end{cases} \qquad /7.4/$$

Felhasználva /7.1/, /7.2/, /7.3/ és /7.4/-et, fennállnak a következő lineáris egyenletek:

$$P_1^{(0)}[1] - P_2^{(0)}[1] = S_1 - S_2\ , \qquad /7.5/$$

$$\frac{1}{\nu_1}P_1^{(0)}[1] + \frac{1}{\nu_2}P_2^{(0)}[1] = \frac{1-\frac{a_1}{\lambda_1}-\frac{a_2}{\lambda_2}}{a_1+a_2} -$$

$$-\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{\nu_1}\right)S_1 - \left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{\nu_2}\right)S_2\ , \qquad /7.6/$$

valamint

$n>1,\ i,j=1,2\quad i\neq j$-re

$$\left(\frac{\lambda_i - a_i}{a_j}\right)^n P_i^{(n)}[1] - P_j^{(n)}[1] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} P_j^{(k)}[1]\, g_i^{(n-k)} +$$

$$+ \frac{a_i}{a_1 + a_2} \sum_{m=0}^{n_j - 1} p_{i,m} \sum_{l=0}^{n_j - m - 1} \left\{ \left[f_i(z)^{l+m} \right]_{z=1}^{(n)} + m \left[f_i(z)^{l+m} \right]_{z=1}^{n-1} \right\} \qquad /7.7/$$

$$- \sum_{k=0}^{\max(n,n_i)} \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n_i - 1} p_{j,l} \left[D(l,k) - \left(\frac{a_i}{a_1 + a_2} \right)^{n_i - l} D(n_i, k) \right] g_i^{(n-k)} - Q_{in} \;,$$

ahol

$$Q_{1n} = \left\{ P_1(z, f_1(z)) \right\}_{z=1}^{(n)} - P_1^{(n)}[1] \left\{ f_1'(1) \right\}^n \qquad /7.8/$$

és hasonlóan fejezhető ki $Q_{2,n}$ is. A /7.8/-ban, valamint /7.7/-ben szereplő $\left\{ f_1(z)^n \right\}_{z=1}^{(m)}$ deriváltak /7.1/ felhasználásával könnyen kiszámolhatók.

Legyenek a $p_{1,m}$ $m = 0,1,\dots,n_2-1$; $p_{2,m}$, $m = 0,1,\dots,n_1-1$ valószínüségek közelitő értékei $q_{1,m}^{(s)}$ és $q_{2,m}^{(s)}$. Ezeket /7.3/-ba helyettesitve /7.5/ és /7.6/-ból kiszámithatjuk $P_1^{(o)}[1]$ és $P_2^{(o)}[1]$-et. Ezután n=1-el indulva n növelésével lépésről-lépésre /7.7/-ből kapjuk a $P_i^{(n)}[1]$ értékeit. A $P_i^{(n)}[1]$ segitségével kiszámitjuk még az

$$R_{i,l}(q_{i,m}^{(s)}) = \sum_{m=0}^{m_0} \frac{(-1)^m P_i^{(m+l)}[1]}{m!} \qquad /7.9/$$

$$i = 1,2\,, \quad l = 0,1,\dots,n_j \qquad j = 1,2, \qquad i \neq j$$

mennyiségeket, ahol m_0 a kivánt pontosságot biztositó index korlát.

A /7.3/, /7.5/, /7.6/ és /7.7/-ből látható, hogy a $P_i^{(n)}$ [1] és igy az $R_{i,l}$ mennyiségek a $p_{1,m}$ és $p_{2,m}$ valószinüségek lineáris függvényei. A lineáris függvényben szereplő $a_{i,m}^{(l)}$, $b_{i,m}^{(l)}$ együtthatókat és a $c_i^{(l)}$ konstans tagot a következő lineáris egyenlet-rendszerekből határozhatjuk meg:

$$\sum_{m=0}^{n_2-1} a_{i,m}^{(l)} q_{1,m}^{(s)} + \sum_{m=0}^{n_1-1} b_{i,m}^{(l)} q_{2,m}^{(s)} + c_i^{(l)} = R_{i,l}(q_{i,m}^{(s)}) , \qquad /7.10/$$

ami rögzitett l mellett $s = 0,1,\dots,n_1+n_2$-re felirva szolgáltat egy egyenletrendszert. A /7.10/-et felirva az $l=0,1,\dots,n_j$; $i,j=1,2$, $j\neq i$ imdexértékek mellett n_1+n_2 egyenletrendszert kapunk.

Másrészt /7.9/ jobboldala [1] és [2]-ben tárgyaltak szerint a $p_{i,l}$ valószinüség numerikus sorának egy részletösszegét adja és igy a /7.10/-ből kapott n_1+n_2 darab együtthatórendszer segitségével felirt

$$\sum_{m=0}^{n_2-1} a_{i,m}^{(l)} p_{1,m} + \sum_{m=0}^{n_1-1} b_{i,m}^{(l)} p_{2,m} + c_i^{(l)} = p_{i,l}$$

egyenletrendszer szolgáltatja a keresett $p_{1,m}$ $m=0,1,\dots,n_2$; $p_{2,m}$, $m = 0,1,\dots,n_1$ valószinüségek numerikus értékeit. A további $p_{1,m}$, $n_2 \leq m \leq m_0$; $p_{2,m}$, $n_1 \leq m < m_0$ valószinüség értékeket pedig a /7.9/ jobboldalából a megfelelő $l \geq n_i$ indexek mellett kapjuk.

A /7.10/ egyenletrendszer mátrixa minden l-re ugyanaz, éspedig az s-edik sorában rendre a $q_{1,m}^{(s)}$, $m = 0,1,\dots,n_2-1$; $q_{2,m}^{(s)}$, $m = 0,1,\dots,n_1-1$

számok állnak, a sor utolsó eleme pedig 1. A $q_{i,m}^{(s)}$ kiindulási adatok megválasztásánál ügyelni kell arra, hogy a /7.10/ rendszer mátrixa ne legyen szinguláris, másrészt hogy $\sum_{i,m} q_{i,m}^{(s)} \leq 1$ teljesüljön.

Numerikus számolásokat rögzitett $a_1=a_2=.1$, $\lambda_1=\lambda_2=1$ és változtatott $\nu_1=\nu_2$ mellett végeztünk $n_1=1,2,3$, $n_2=1,2,3$ paraméterértékekkel. Néhány eredményt közlünk az alábbi 2. táblázatban (számolásainkban a /7.9/-ben szereplő m_o-at 6-nak választottuk).

$n_1=n_2=1$

$\nu_1=\nu_2$	.5	.8	1	2	5	10
$p_{1,0}=p_{2,0}$	.3067	.3405	.3521	.3758	.3903	.3951
$p_{1,1}=p_{2,1}$	.0675	.0576	.0542	.0466	.0419	.0406
$p_{1,2}=p_{2,2}$	.0191	.0174	.0157	.0134	.0119	.0107
			$n_1=n_2=2$			
$p_{1,0}=p_{2,0}$	.1425	.1591	.1642	.1743	.1800	.1816
$p_{1,1}=p_{2,1}$	.1374	.1304	.1290	.1261	.1251	.1252
$p_{1,2}=p_{2,2}$	.0193	.0321	.0313	.0306	.299	.0289

2. táblázat

Megjegyzések

A stacionárius állapot valószinüségeket a VI. pontban az átmenet-valószinüség mátrixból iterációval, a VII. pontban pedig generátor-függvények segitségével határoztuk meg. A kétféleképpen számolt eredmények $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $n_1 = n_2 = 1,2$-re a negyedik tizedes jegyig megegyeznek.

A VII. pontban ismertetett módszer használhatósága a ν_1 és ν_2 csökkenésével romlik, ezért $\nu_1 < 0.5$ $\nu_2 < 0.5$ esetekre kapott számolások eredményei pontatlanok. Viszont ν_1 és ν_2 növelésével a rendszer közeledik az átkapcsolás nélkül müködő kiszolgáló rendszerhez. A $\nu_1 \to \infty$, $\nu_2 \to \infty$ -re kapott határértékek megegyeznek az Erlang modellel számolható megfelelő valószinüségekkel.

Az 1. táblázatból láthatóan a $\nu_1 = \nu_2$ csökkenésével a különböző állapotból kiinduló számolások, továbbá a két módszer eredményei egyre nagyobb eltérést mutatnak. Ennek oka az, hogy a véges állapottérre való redukálásnál egyre nagyobb hibát követünk el.

A cikkhez kapcsolódó numerikus számolások az Ural-2 tipusu elektronikus számológéppel történtek. A számolások jelentős részét Koszó Gábor végezte.

Irodalom:

[1] Gergely József: Egy sorbanállási feladat megoldása, MTA Számitástechnikai Központ Közlemények 2. /1967/ 3-25.

[2] - : Szisztema abszluzsivanyija sz perekljucsenyiem, Megjelenik a "Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica" folyóiratban.

[3] - : Fél-Markov folyamatok vezérlése, MTA Számitástechnikai Központ Közlemények 3. /1967/ 68-84

S u m m a r y

The paper discusses the optimization of the queuing model dealt with in [1] and [2].

Two sorts of customers arrive to the serving system according the Poisson process. The device must switch over if it serves after a unit of one type a unit of another type. The times of service and switching are independent. Switching tekes only place if units of one type in the system have been fully served and there is of the other type queuing surpassing a certain threshold value. Let these threshold values be n_1 and n_2. The effectiveness of the system is characterized by the waiting time for the time unit. The optimal n_1 and n_2 with the minimum waiting time is to be found.

A semi-Markovian process takes place in the system. The probabilities of transition, the times of transition and waiting are computed. The computation of stationary probabilities are discussed. The optimum is defined by a method described in [3]. Some numerical results are given is case of exponential distributions.