

Szelezsán János:

Egy disztribúciós paraméteres optimalizálási feladat
megoldása

Tegyük fel, hogy a rendszer viselkedését olyan két-
változós $u(x,t)$ függvény írja le, amelyet Volterra
tipusu operátorral

$$u(x,t) = Kf = \int_0^t K(x,t,s) f(s) ds \quad /1/$$

alakban állíthatunk elő. Vegyük úgy, hogy $f(s)$ a
vezérlőfüggvény; e függvény hatására a rendszer a K
operátor által meghatározott állapotba jut.

Ismeretes, hogy 1/ alakú például az

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = f(t) \quad 0 \leq t \leq T,$$

hővezetés differenciálegyenletének megoldása t.i. itt

$$u(x,t) = \int_0^t K(x,t-s) f(s) ds$$

$$K(x, t-s) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}} (t-s)^{-3/2}$$

Ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy a folyamatot a tartomány határán vezéreljük.

Legyen $g(t) > 0$ egy adott $g \in L_2$ függvény. Legyen $x_0 > 0$ adott pont.

Tekintsük a

$$J(f) = \int_0^T [g + u(x_0, t)]^2 dt \quad 2/$$

funkcionált, ahol T adott szám.

Jelöljük $u(x_0, t)$ -t Af -vel. Ekkor a 2/ funkcionál alakja

$$J(f) = (Af + g, Af + g)$$

ahol $(,)$ a skalárszorzat jele.

Legyen F a következő függvényhalmaz:

$F = \{f(t):$ 1/ $f(t)$ szakaszonként folytonos
 $[0, T]$ -ben

$$2/ \int_0^T f(t)r(t)dt = q$$

$$3/ 0 \leq a(t) \leq f(t) \leq b(t)$$

ahol $a(t) < b(t)$ $t \in [0, T]$ tetszőleges integrálható
 függvények, $r(t) > 0$ szigorúan monoton növekvő, absz.f., q
 pedig adott konstans, melyre

$$\left\{ \int_0^T a(t)r(t)dt < q < \int_0^T b(t)r(t)dt \right\}$$

Feladat: Keressük meg az F halmaznak azt az f^*
 elemét, amelyre a $J(f)$ funkcionál minimumot vesz fel.

Tétel: Tegyük fel, hogy $K(x_0, s, t) \geq 0$, és t -ben monoton
 csökken.

Akkor a feladat egyetlen megoldása

$$f^{(\xi)}(t) = \begin{cases} a(t) & \text{ha } 0 \leq t \leq \xi \\ b(t) & \text{ha } \xi < t \leq T \end{cases}$$

ahol ξ az

$$\int_0^T f^{(\xi)}(t)r(t)dt = q$$

egyenlet gyöke.

Bizonyítás:

Először megmutatjuk, hogy az

$$F(\xi) = \int_0^T f^{(\xi)}(t)r(t)dt = q$$

egyenletnek egyetlen valós gyöke van.

Ugyanis majdnem mindenütt

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \left(\int_0^T r(t)f^{(\xi)}(t)dt \right) = \frac{d}{d\xi} \left[\int_0^{\xi} b(t)r(t)dt + \right. \\ &+ \left. \int_{\xi}^T a(t)r(t)dt \right] = r(\xi) [b(\xi) - a(\xi)] > 0 \\ &0 \leq \xi < T \end{aligned}$$

vagyis $F(\xi)$ ^{szög.} monoton növekvő. Világos, hogy $F(\xi)$ folytonos is. Mivel ezenkívül

$$F(0) = \int_0^T a(t)r(t)dt < q < \int_0^T b(t)r(t)dt = F(T)$$

ezért egyetlen ξ valós gyöke van a $(0, T)$ intervallumban az $F(\xi) = q$ egyenletnek.

Most megmutatjuk, hogy $f^{(f)}(t)$ optimális megoldás.

Mindenekelőtt világos, hogy $f^{(\xi)}(t)$ megengedett megoldás, azaz $f^{(\xi)}(t) \in F$.

$$\text{Ugyanis } a(t) \leq f^{(\xi)}(t) \leq b(t), \text{ és } \int_0^T f^{(\xi)}(t)r(t)dt = q.$$

Most megmutatjuk, hogy $f^{(f)}(t)$ minimalizálja a /3/ funkcionált.

Funkcionálunkat a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned} J(f) &= (Af, Af) - 2(Af, g) + (g, g) = \\ &= (A^M Af, f) - 2(f, A^M g) + (g, g) \end{aligned}$$

(itt A^M az A operátor adjungáltját jelenti.)

Az $A^M A = B, -2A^M g = h$ jelöléssel

$$J(f) = (Bf, f) + (h, f) + (g, g).$$

A (g, g) szorzat elhagyható, így a továbbiakban elegendő a

$$J^{(1)}(f) = (Bf, f) + (h, f)$$

funkcionált vizsgálni.

A "duális" funkcionál

Az eredeti feladatot úgy oldjuk meg, hogy megszerkesztünk egy "duális" lineáris funkcionált.

Tétel:

Az $f^M \in F$ elem akkor és csak akkor minimalizálja $J^{(1)}(f)$ funkcionált, ha minimalizálja (az F halmazon) a

$$J^{(2)}(f) = (2Bf^* + h, f)$$

"lineáris" funkcionált.

Bizonyítás:

A bizonyításban ugyanazt a módszert alkalmazzuk, amit [3]-ben alkalmaztunk.

Tegyük fel, hogy f^* minimalizálja a $J^{(1)}(f)$ funkcionált az F halmazon. Legyen $f \in F$ egy f^* -től különböző elem. Vegyük az

$$f_\lambda = (1-\lambda)f^* + \lambda f \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

függvényt.

Az F halmaz konvex. Ugyanis, ha $f_1 \in F$ és $f_2 \in F$, akkor

1. $\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2$ szintén szakaszonként folytonos

2.
$$\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f_1(t) + (1-\lambda)f_2(t)] r(t) dt$$
$$= \lambda \int_{\alpha}^{\beta} r(t) f_1(t) dt + (1-\lambda) \int_{\alpha}^{\beta} r(t) f_2(t) dt =$$
$$= \lambda q + (1-\lambda)q = q$$

3. $a(t) = \lambda a(t) + (1-\lambda)a(t) \leq$

$$\leq \lambda f_1(t) + (1-\lambda)f_2(t) \leq \lambda b(t) + (1-\lambda)b(t) = b(t).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $f_\lambda(t) \in F$.

Tekintsük a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = J^{(1)}(f_\lambda) = & (B[(1-\lambda)f^* + \lambda f], (1-\lambda)f^* + \lambda f) + \\ & + (h, (1-\lambda)f^* + \lambda f) \end{aligned}$$

funkcionált mint a λ változó függvényét. A szorzásokat elvégezve $\varphi(\lambda)$ a következő alakban is felírható:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = J^{(1)}(f^*) + (2Bf^* + h, f - f^*)\lambda + \\ + (B(f - f^*), f - f^*)\lambda^2 \end{aligned}$$

A $\varphi(\lambda)$ függvény a $0 \leq \lambda \leq 1$ intervallumban a feltétel szerint $\lambda = 0$ mellett vesz fel minimumot, mert a feltevés szerint $f^* \in F$ optimális megoldás.

Ezért

$$0 \leq \varphi'(0) = (2Bf^* + h, f - f^*) \quad /4/$$

De mivel $(Bf, f) = (A^* Af, f) = (Af, Af) > 0$, ezért

$$J(f^*) = \varphi(0) < \varphi(1) = J(f).$$

Ez viszont /4/ alapján azt jelenti, hogy f^* az egyetlen olyan F -beli elem, amelyre

$$(2Bf^* + h, f^*) \leq (2Bf^* + h, f).$$

De ez éppen azt jelenti, hogy f^* minimalizálja a $(2Bf^* + h, f)$ lineáris funkcionált.

Most az elegendőséget bizonyítjuk.

Tegyük fel tehát, hogy $f^{\#} \in F$ minimalizálja a $(2Bf^{\#} + h, f)$ funkcionált, azaz

$(2Bf^{\#} + h, f - f^{\#}) \geq 0$, ahol $f \in F$ tetszőleges megengedett függvény.

A $J^{(1)}(\varphi)$ funkcionálra felírhatjuk a következőket:

$$\begin{aligned} J^{(1)}(f^* + z) &= (B(f^* + z), f^* + z) + (f^* + z, h) = \\ &= J^{(1)}(f^*) + (2Bf^* + h, z) + (Bz, z) \end{aligned}$$

Legyen $z = f - f^{\#}$.

Ekkor:

$$J^{(1)}(f) = J^{(1)}(f^*) + (2Bf^* + h, f - f^*) + (B(f - f^*), f - f^*).$$

Viszont a feltevés szerint $(2Bf^{\#} + h, f - f^{\#}) \geq 0$ és $(B(f - f^{\#}), f - f^{\#}) > 0$, ezért fennáll az

$$J^{(1)}(f) - J^{(1)}(f^{\#}) > 0$$

azaz

$$J^{(1)}(f) > J^{(1)}(f^{\#})$$

egyenlőtlenség.

Ezzel tételünket bizonyítottuk.

Az 1. tételt a fenti tétel felhasználásával bizonyítjuk.

Vezessük be a

$$\mathcal{L}(t) = 2Bf^{\#} + h$$

jelölést.

Írjuk ki $\mathcal{L}(t)$ jelentését.

$$\mathcal{H}(t) = 2A^*Af^* + 2A^*g = 2A^*(Af^* + g) =$$

$$= 2 \int_t^T K(x_0, s, t) \left[\int_0^s K(x_0, s, \tau) f^*(\tau) d\tau + g(s) \right] ds$$

Mivel a feltevés szerint $K(x_0, s, t) \geq 0$, $g(s) \geq 0$

$f^*(\tau) \geq 0$; $(0 \leq s \leq T, 0 \leq t \leq T, 0 \leq \tau \leq T)$, ezért

$\mathcal{H}(t) \geq 0$; $(0 \leq t < T)$ és $\mathcal{H}(t)$ monoton csökken.

Most megmutatjuk, hogy $f^{(\zeta)}(t)$ optimális megoldás.

Az előbbi tétel értelmében a $J^{(1)}(f)$ funkcionál helyett elegendő az

$$\mathcal{L}(f) = (2Bf^* + h, f) = (\mathcal{H}, f)$$

lineáris funkcionált minimalizálni az F halmazon, ahol $f^* = f^{(\zeta)}$ az eredeti feladat optimális megoldása.

Tegyük fel, hogy létezik olyan $f^0(t) \in F$ függvény, melyre

$$\mathcal{L}(f^0) \leq \mathcal{L}(f^{(\zeta)})$$

azaz

$$(\mathcal{H}, f^0) \leq (\mathcal{H}, f^{(\zeta)})$$

vagyis, kiírva a skalárszorzat jelentését és rendezve

$$0 \leq \int_0^T \mathcal{H}(t) [f^{(\zeta)}(t) - f^0(t)] dt \quad 4/$$

Megmutatjuk, hogy $f^0(t) = f^{(\zeta)}(t)$.

A 4/ egyenlőtlenséget

$$0 \leq \int_0^{\xi} \mathcal{H}(t) [a(t) - f^0(t)] dt + \int_{\xi}^T \mathcal{H}(t) [b(t) - f^0(t)] dt$$

azaz

$$\int_0^{\xi} \mathcal{H}(t) [f^0(t) - a(t)] dt \leq \int_{\xi}^T \mathcal{H}(t) [b(t) - f^0(t)] dt$$

alakban is felírhatjuk.

Alkalmazzuk a fenti egyenlőtlenség mindkét oldalára

a középertéktételt, azt kapjuk, hogy bizonyos

$0 \leq \xi_1 \leq \xi$, $0 \leq \xi_2 \leq T$ mellett

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(0) \int_0^{\xi_1} (f^0(t) - a(t)) dt + \mathcal{H}(\xi) \int_{\xi_2}^{\xi} (f^0(t) - a(t)) dt \leq \\ & \leq \mathcal{H}(\xi) \int_{\xi_2}^{\xi} [b(t) - f^0(t)] dt + \mathcal{H}(T) \int_{\xi_2}^T [b(t) - f^0(t)] dt \end{aligned}$$

Mivel $\mathcal{H}(t) \geq 0$ monoton csökken és $f^0(t) - a(t) \geq 0$
 $b(t) - f^0(t) \geq 0$ ezért

$$\mathcal{H}(\xi) \int_0^{\xi} [f^0(t) - a(t)] dt \leq \mathcal{H}(\xi) \int_{\xi_2}^T [b(t) - f^0(t)] dt$$

azaz

$$\int_0^{\xi} [f^0(t) - a(t)] dt \leq \int_{\xi}^T [b(t) - f^0(t)] dt$$

vagyis

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\xi} [a(t) - f^0(t)] dt + \int_{\xi}^T [b(t) - f^0(t)] dt = \\ &= \int_0^T [f^{(\xi)}(t) - f^0(t)] dt \end{aligned} \quad 5/$$

Mivel $a(t) - f^0(t) \leq 0$, azaz $\int_0^{\xi} [a(t) - f^0(t)] dt \leq 0$
 és $b(t) - f^0(t) \geq 0$ azaz $\int_{\xi}^T [b(t) - f^0(t)] dt \geq 0$
 ezért

$$\int_t^T [f^{(\xi)}(\tau) - f^0(\tau)] d\tau \geq 0 \quad 6/$$

Ebből azonban következik, hogy

$$f^{(\xi)}(t) \equiv f^0(t).$$

Ugyanis $f^{(\xi)}(t)$ és $f^0(t)$ is megengedett
 megoldás, ezért

$$\int_0^T [(f(t) - f^0(t))] r(t) dt = 0$$

Integráljunk a fenti integrálban parciálisan, azt kapjuk, hogy

$$r(0) \int_0^T [f^{(j)}(t) - f^0(t)] dt + \int_0^T \left[\frac{dr}{dt} \left(\int_t^T [f^{(j)}(s) - f^0(s)] ds \right) \right] dt = 0$$

7/

Mivel a feltétel szerint $r(0) > 0$ és $\frac{dr}{dt} > 0$ ezért felhasználva az 5/ és 6/ egyenlőséget azt kapjuk, hogy 7/ csak úgy teljesülhet, ha $f^{(j)}(t) \equiv f^0(t)$.

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Irodalom:

- [1] . R.E.Bellman, I.Glicksberg, O.A.Gross: Some aspects of the mathematical theory of control processes (Rand Corporation Santa Monica, 1958).
- [2] A.G.Butkovszkij: Torija optimalnovo upravlenija szisztemami sz raszpregelitelnimi parametrami (Moszkva, 1965)
- [3] Szelezsán János: Optimális vezérlés parabolikus differenciálegyenlet peremfeltételeivel. (MTA Számítástechnikai Központja Tájékoztató 10. 96. old.)

S u m m a r y

Solution of an Optimal Control Problem in a
Distributed-Parameter System

Szelezsán János

Let us assume that the behaviour of the system is described by a state function $u(x,t)$ which can be expressed as

$$u(x,t) = K f = \int_0^t K(x,t,s) f(s) ds, \text{ where } K(x,t,s) \geq 0$$

$$\frac{\partial K(x,t,s)}{\partial s} < 0$$

Let us assume that $f(s)$ is the control function.

Let $g(t) > 0$ be given function.

Let us consider the functional:

$$J(f) = \int_0^T [g(t) + u(x_0, t)]^2 dt$$

Let F be the following control function set.

$$F = \{f(t) : 1. \text{ piece-wise continuous}$$

$$2. \int_0^T f(t) r(t) dt = q$$

where $r(t) > 0$ is monotonously increasing, q a given constant

$$3. \quad 0 \leq a(t) \leq f(t) \leq b(t); \quad a(t) < b(t)$$

Problem: It is required to minimize $J(f)$ subject to the constraint $f \in F$

Theorem: The solution of the problem is

$$f^{(\xi)}(t) = \begin{cases} a(t) & \text{if } \alpha \leq t \leq \xi \\ b(t) & \text{if } \xi < t \leq \beta \end{cases}$$

where ξ is the root of the equation

$$\int_0^T f^{(\xi)}(t) r(t) dt = q$$