

Elektrosztatikus és stacionárius elektromágneses tér alapegyen-
leteinek megoldása elektronikus számológéppel

Renner Gábor

Bevezetés

A villamosságtan stacionárius téregyenleteinek megoldása zárt alakban többnyire csak egyszerűbb elrendezések és határfeltételek esetén sikerül. Ezért konkrét problémák megoldására már régebben kidolgoztak olyan matematikai módszereket (analitikus és numerikus közelítő módszerek), amelyek jóval általánosabb feltételek mellett lehetővé teszik a téregyenletek megoldását, a térjellemzők meghatározását. Ezek a módszerek sok esetben igen nagy mennyiségű számolási munkát követelnek, ezért kiterjedt alkalmazásuk a nagysebességű elektronikus számológépek megjelenésével vált időszerűvé.

Az MTA Számítástechnikai Központjában 1967. nyarán elkészült diplomaterv foglalkozik a számológépi térszámításra leginkább szóbajövő matematikai módszerekkel. Tárgyalja a potenciálfüggvény sorfejtését, mint analitikus eljárást, valamint a differenciálegyenletek módszerét; ezen belül az egyenletrendszer két megoldási lehetőségét. (Iteráció és Monte-Carló módszer.) A diplomatervben megtalálható ezen módszerek alkalmazása, konkrét probléma megoldására.

1. A térszámítás alapjai

Stacionárius és sztatikus villamosterek potenciál-elosztásának meghatározására a Maxwell egyenletekből adódó

$$\Delta U = - \frac{\rho}{\epsilon} \quad /1/$$

Laplace-Poisson egyenlet szolgál. Ha a potenciálelosztás a tér olyan részében keresendő, ahol a töltéssűrűség: $\rho(x,y,z) = 0$ akkor a Laplace-Poisson egyenlet az egyszerűbb

$$\Delta U = 0 \quad /2/$$

Laplace-egyenletre egyszerűsödik. Fenti egyenletek hely szerint nem változó dielektromos állandóra (ϵ) érvényesek.

Az /1/, /2/ parciális differenciálegyenletek megoldásához a töltéssűrűségeen kívül a peremfeltételeket is meg kell adni. Ezek matematikai szempontból a következők lehetnek.

- 1./ Zárt tartomány határán a potenciálnak előírt értékét kell felvenni. (Dirichlet probléma.) Ez az eset áll elő, ha meghatározott potenciálra kötött elektródák terét kell meghatározni.
- 2./ A szóbanforgó tartomány határán a térerősség normális irányu komponense, azaz $E_n = - \frac{\partial u}{\partial n}$ adott, például töréstörvényekből adódó határfeltételek esetén. (Neumann probléma.)
- 3./ Előfordulhat természetesen, hogy mind 1./, mind 2./ típusu határfeltételek szerepelnek a peremfeltételek között.

A fenti differenciálegyenleteket kielégítő függvények közül sokat ismerünk, azonban az előírt peremfeltételek érvényesítése általában nehéz feladat. A peremfeltételeknél is többnyire nem U , vagy $\frac{\partial U}{\partial n}$ tetszőleges változása, hanem a perem szabálytalan alakja okoz nehézséget. Ezért számológépi alkalmazás szempontjából is elsősorban azok a módszerek jöhetnek számításba, amelyek a tartomány alakjára vonatkozóan tág lehetőségeket biztosítanak.

Áramok mágneses terét általában nem jellemezhetjük skalár potenciállal, mert a $\vec{H}$ mágneses térerősség rotációja nem azonosan zérus. De megadhatunk egy $\vec{A}$ vektorpotenciált, melynek rotációja a mágneses indukcióvektort adja: $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$. Ezen vektorpotenciál kiszámítására a Maxwell egyenletek alapján $\text{div} \vec{A} = 0$ választással a $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$ egyenletet kapjuk. Descartes koordinátákra kiírva: $\Delta A_x = -\mu J_x$, $\Delta A_y = -\mu J_y$, $\Delta A_z = -\mu J_z$ vagyis az $\vec{A}$ vektorpotenciál mindhárom komponense Laplace-Poisson egyenleteket elégít ki.

Ha a térszerkezet a térnek csak áramvezetőktől mentes részében érdekes, a mágneses térerősség egy egyszeresen összefüggő térrészben levezethető az U_m ciklikus mágneses potenciálból: $\vec{A} = -\text{grad} U_m$. Ezen mágneses potenciál meghatározására a $\Delta U_m = 0$ Laplace egyenlet adódik.

Mindezek az egyenletek csak térben állandó és az indukciótól független mágneses permeabilitás (μ) feltételezésével igazak, így a gyakorlatban előforduló inhomogén és ferromágneses

anyagokat tartalmazó terekben átalakításra szorulnak. A diplomaterv tárgyalja a potenciálegyenletek alakját hely függvényében változó permeabilitás esetén $[\mu = \mu(\bar{r})]$ és számítási módszerrel ad az indukciótól függő permeabilitás figyelembevételére is.

2. Megoldás sorbafejtés segítségével

A térszámítási problémák nagy csoportja megoldható, ha sikerül a határgörbe menti potenciálváltozást olyan függvények szerint haladó sorba fejteni, melyek

1. ortogonális függvényrendszerre alkotnak
2. megoldásai a Laplace egyenletnek.

Nevezetesen szeparációval a Laplace egyenlet következő általános megoldásaihoz juthatunk ([1]).

Descartes koordináták esetén:

$$U(xyz) = \sum_k \prod_{i=1}^3 (A_{ki} e^{\sqrt{k_i} x} + B_{ki} e^{-\sqrt{k_i} x}) \quad /3/$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

A k szeparációs állandók előjelétől függően az exponenciális függvények átmennek hiperbólikus, illetve trigonometrikus függvényekbe.

Hengerkoordináták esetén:

$$U(r\varphi z) = \sum_k \sum_m [A_{km} J_m + B_{km} N_m] [A_m \sin m\varphi + B_m \cos m\varphi] \cdot /4/$$

$$\cdot [A_k e^{kz} + B_k e^{-kz}]$$

ahol $J_m(kr)$ és $N_m(kr)$ az m -edrendű Bessel illetve Neumann függvények. Itt k valós vagy képzetes voltától függ, hogy az exponenciális függvények milyen függvényekbe mennek át. Gömbkoordináták esetén:

$$U(r, \vartheta, \psi) = \sum_k \sum_m \left[A_k r^k + \frac{B_k}{r^{k+1}} \right] [A_m \cos m\psi + B_m \sin m\psi] P_k^m(\cos \vartheta) \quad /5/$$

Itt $P_k^m(\cos \vartheta)$ a k -adrendű kapcsolt Legendre függvény. Sok esetben k és m értékei folytonosan oszlanak el, és ekkor a summákat mindenütt integrálok helyettesítik.

A módszer használata akkor előnyös, ha koordinátafelületek határolják a vizsgált térrészt, és - a határfeltételt jelentő - potenciálváltozás ezek mentén adott. Ekkor a peremfelület paraméterét a /3/, /4/ és /5/ egyenletekbe helyettesítve, a potenciálváltozást a megmaradó változókhoz tartozó függvények szerint kapjuk sorbafejtve (Trigonometrikus sor, Bessel függvények, felületi gömbfüggvények szerinti sor). Ha az előírt potenciálváltozást is sikerül a függvények szerint sorbafejtett alakban előállítani, akkor együttható összehasonlítással a /3/, /4/ és /5/ egyenletek eddig ismeretlen A_k , B_k együtthatóit meghatározhatók.

Számológépre alkalmazva ezt a módszert mindenekelőtt szükség van olyan szubrutinra, amely az itt szereplő függvények értékeit bármely helyen kiszámítja. Trigonometrikus függvényeket számoló szubrutinok rendszerint minden számológépnél megtalálhatók, a Bessel és gömbfüggvényekre pedig el kell készíteni ezeket, ha

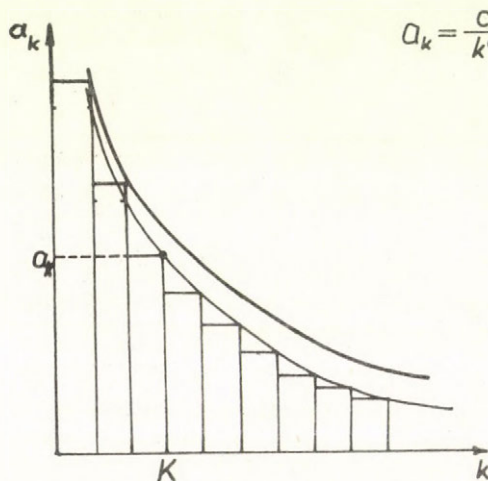
nem szerepelnek a számológép szubrutin könyvtárában. A diplomaterv speciális részében hengerszimmetrikus térszámítási probléma kidolgozása szerepel; így itt a Bessel függvény helyettesítési értékeit kiszámító szubrutin is megtalálható. A függvényértékeket konvergens hatványsor segítségével, nagy változók esetén a Poincaré féle semikonvergens sorral lehet kiszámítani, előre megadható maximális hibával.

Előzőek szerint a számológéppel végrehajtandó műveletek a következők:

- a./ A határon adott potenciálváltozást leíró függvény sorbafejtése a fenti függvények szerint. Digitális számológépek esetében az is megfelelő, ha diszkrét adatok állnak rendelkezésre, például mérési eredmények formájában. Maga a sorfejtés integrálok kiszámítását kívánja meg, ami valamilyen numerikus (trapéz, Simpson, Monte-Carló stb.) módszer segítségével történhet.
- b./ A_k , B_k együtthatók kiszámítása együtthatóösszehasonlítással, ami egyszerű aritmetikai műveletek elvégzését teszi szükségessé.
- c./ A kapott eredmény kiértékelése. Mivel a végeredmény is végtelen sor alakjában adódik, numerikus eredményt úgy kapunk, hogy e sor egy részletösszegét tekintjük.

Az összegezést célszerűen egy ciklikus program fogja végezni. A ciklus lehet kötött hosszú; ez esetben előre ki kell számítani

maradékbecsülő formulák segítségével, hogy az adott pontosság eléréséhez hány tagot kell figyelembe venni. De a ciklus hosszát a ciklusban szereplő eredmény (részletösszeg, maradék) értékétől is függővé tehetjük. Adott pontosság eléréséhez szükséges összeadandó tagok száma megállapítható, ha tudjuk, hogy a sor tagjai legalább milyen rendben csökkennek, azaz mennyi az $\alpha > 1$ kitevő maximális értéke, hogy



$$a_k = \frac{C}{k^\alpha} ; \quad \text{ha } k \geq K \quad /6/$$

A C állandót úgy kell megválasztani, hogy $k = K$ esetén a lépcsős, és a folytonos görbe egybeessen, vagyis /6/ szerint:

$$a_K = \frac{C}{K^\alpha}$$

$$C = a_K K^\alpha$$

Az első K tag összeadása után a hiba (ε) az elhagyott tagok összege, ami a lépcsős függvény görbe alatti területével egyezik meg. Ez biztosan kisebb, mint a folytonos görbe alatti terület:

$$\varepsilon < \int_K^\infty \frac{C}{x^\alpha} dx = \int_K^\infty \frac{a_K K^\alpha}{x^\alpha} dx = \frac{a_K K^\alpha}{-\alpha+1} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_K^\infty$$

$$\varepsilon < \frac{a_K K^\alpha}{(\alpha-1)K^{(\alpha-1)}}$$

/7/

Jelen esetben tehát a lépcsős és a folytonos függvényt a még éppen összeadott tagnál illesztettük. Ez a hibára a valóságoshoz közelebb eső értéket ad, mintha az illesztés egy rögzített helyen (pl. az első tagnál) történne. (Lásd az ábrát.)

Az eljárás jól használható pozitív tagu sorok esetén. Váltakozó előjelű soroknál - mivel a lépcsős görbe területei előjelesen adódnak össze, - a /7/ kifejezés rossz becslést ad.

3. Differenciálegyenletek módszere

Az előző módszer alkalmazásakor komoly megkötést jelent, hogy többnyire csak akkor kivitelezhető a számítás, ha a peremfelületek a megfelelően választott koordinátarendszer koordinátafelületeivel esnek egybe. Jóval nagyobb szabadsággal rendelkezünk a peremek alakjára vonatkozóan a véges differencia egyenletek használatakor. Mivel a határmenti potenciáeloszlást csak diszkrét pontokban kell ismerni, az ezt leíró függvény igen általános lehet. Ugyanez vonatkozik a Poisson egyenletben a töltéeloszlást leíró függvényre is.

a./ A differencia egyenletek felírása.

A differencia egyenletek felírására először elkészítjük a vizsgált tartomány koordinátavonalakból, illetve koordinátafelületekből álló beosztását. (A probléma természetéhez igazodó koor-

dinátarendszer használata jelen esetben is előnyös.) Így a tartomány belsőjében és határán metszéspontokat kapunk. A differenciálegyenletet ezen pontokban felírt differenciálegyenletekkel helyettesítjük.

A különböző koordinátarendszerekben felírt Laplace kifejezés a potenciálfüggvény első és második deriváltjait, valamint a változók különböző függvényeit tartalmazza. A differenciáloperációkat helyettesítjük olyan differenciakifejezésekkel, amelyek a függvény értékeit tartalmazzák a környező pontok valamelyikében (lásd 3). Így Δu -ra a következő kifejezéseket kapjuk:

Descartes koordináták esetén:

$$\begin{aligned}\Delta u \cong & \frac{1}{(\Delta x)^2} [u(x+\Delta x, y, z) - 2u(x, y, z) + u(x-\Delta x, y, z)] + \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2} [u(x, y+\Delta y, z) - 2u(x, y, z) + u(x, y-\Delta y, z)] + \\ & + \frac{1}{(\Delta z)^2} [u(x, y, z+\Delta z) - 2u(x, y, z) + u(x, y, z-\Delta z)]\end{aligned}\quad /8/$$

Hengerkoordináták esetén:

$$\begin{aligned}\Delta u \cong & \frac{1}{(\Delta r)^2} [u(r+\Delta r, \phi, z) + u(r-\Delta r, \phi, z) - 2u(r, \phi, z)] + \\ & + \frac{1}{2r(\Delta r)} [u(r+\Delta r, \phi, z) - u(r-\Delta r, \phi, z)] + \\ & + \frac{1}{r^2(\Delta \phi)^2} [u(r, \phi+\Delta \phi, z) - 2u(r, \phi, z) + u(r, \phi-\Delta \phi, z)] + \\ & + \frac{1}{(\Delta z)^2} [u(r, \phi, z+\Delta z) - 2u(r, \phi, z) + u(r, \phi, z-\Delta z)]\end{aligned}\quad /9/$$

Mivel azonban $\Delta u = 0$ illetve Poisson egyenletnél $\Delta u = f$; a /8/ és /9/ egyenlet alapján összefüggést kapunk u rácspontbeli, és az ezt körülvevő pontokban felvett értékei között. A /8/ és /9/ kifejezésben Δu -t a potenciálfüggvény rácspontban és az azt körülvevő pontokban felvett értékeivel fejeztük ki. A diplomaterv tárgyalja Δu pontosabb felírásait is, távolabbi pontok potenciáljainak figyelembevételével.

Javíthatjuk a pontosságot úgy is, hogy a /8/ és /9/ egyenletek jobboldalán álló - u értékeit diszkrét pontokban tartalmazó - kifejezést (u_p^*) a vizsgált P pontbeli Laplace-operált egy függvényének tekintjük:

$$u_p^* = F(\Delta u_p) \quad /10/$$

$$(\text{/8/ és /9/ esetén } u_p^* = \Delta u_p)$$

Mivel a Laplace egyenlet szerint $\Delta u_p = 0$; következik, hogy

$$u_p^* = F(0) \quad /11/$$

illetve Poisson egyenletnél $\Delta u_p = f_p$; így

$$u_p^* = F(f_p) \quad /12/$$

Az F függvény konkrét alakja, és így /11/ és /12/ részletes felírása a diplomatervben szerepel.

Végeredményben az eddigi egyenleteket minden csomópontra felírva lineáris egyenletrendszert kapunk, melyben a csomóponti potenciálértékek az ismeretlenek.

b./ Határfeltételek érvényesítése

Legegyszerűbb a peremfeltételeket kielégíteni, ha úgy sikerül felvenni a hálót, hogy a peremgörbe rácspontokon halad keresztül. Ez esetben a peremhez tartozó csomópontok potenciáljai az egyenletekben mint ismert mennyiségek szerepelnek. (Dirichlet probléma.)

Át kell alakítani azonban a /8/, /9/ kifejezéseket, ha a határgörbe metszi a látó vonalait, és ha $\frac{\partial u}{\partial n}$ kerületmenti értékei adottak (ld. a dolgozatot).

c./ Egyenletrendszer megoldása

Igen általános feltételek mellett bebizonyítható (lásd [3]), hogy az említett módon felírt egyenletrendszernek létezik egyetlen megoldása. Ennek megtalálása azonban számítástechnikailag nehézséget jelent. Ugyanis a pontosság fokozása érdekében a rácsávolságot célszerű minél kisebbre választani (az elkövetett hiba h magasabb hatványaival - 2,4,6, - arányos), ami a rácspontok növekedését jelenti. De ezt követeli a határgörbe jó megközelítése is. Így végeredményben az ismeretlenek száma nagyon megszorodik, nemritkán eléri az ezres nagyságrendet.

- Ha a tartomány nagyon egyszerű (négyzet, téglalap) az egyenletrendszer együtthatómátrixa szimmetrikus és ez lehetővé teszi - a specialitást kihasználva - nagy ismeretlen-szám esetén is a szimultán egyenletmegoldást. Így viszont éppen a módszer legnagyobb előnyét - hogy a határgörbe alakja tetszőleges lehet - nem tudjuk kihasználni.

Ezért szinte valamennyi gyakorlatilag szóbjövő esetben az egyenletrendszer megoldására iterációs módszereket célszerű használni. Ehhez először az ismeretlen potenciálokra kiinduló értékeket veszünk fel. Bebizonyítható, hogy ez tetszés szerint történhet, de a módszer sokkal gyorsabban konvergál, ha a megoldáshoz közeleső értékeket sikerül felvenni. Ezért célszerű először egy nagy ráctávolságú háló pontjaiban szimultán egyenletmegoldással meghatározni a potenciálértékeket (keves ismeretlen). Ezután pl. a ráctávolságok felezésével áttérünk egy finomabb hálóra, amelynek pontjaiban iterációval folytatjuk az egyenletrendszer megoldását. Az áttéréskor szükséges újabb kiinduló értékeket a már meglevőkből interpolációval határozhatjuk meg.

Az egyszerű iterációs módszerek (Gauss-, Jacobi-módszer) a jelen problémára alkalmazva általában kis konvergenciasebességet adnak. Ugyanis a konvergencia gyorsaságára jellemző az egymásutáni iterációk különbségének hányadosa:

$$\lambda = \frac{d^{(k)}}{d^{(k-1)}} = \frac{u^{(k)} - u^{(k-1)}}{u^{(k-1)} - u^{(k-2)}}$$

amely azt mutatja, hogy milyen gyorsan csökkennek a hibák ($u^{(k)}$, u értéke a k -adik iterációban). λ határértéke, a határárány, Laplace egyenlet és téglalap tartomány esetében ([5] szerint):

$$\lambda_h = \left[-\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{R} + \cos \frac{\pi}{S} \right) \right]^2 \quad /13/$$

Itt ha a és b a téglalap oldalai, $R = \frac{a}{\Delta x}$ $S = \frac{b}{\Delta y}$.

Nem téglalap tartomány esetén λ_h -t olyan téglalapra számíthatjuk, amely magában foglalja az illető tartományt - így a határárányra valamivel kedvezőtlenebb értéket kapunk.

R és S növelésével (a csomópontok számának növelésével) λ_h igen erősen tart az egységhez, így a hibák lassan csökkennek.

A konvergenciasebesség hatékonyan növelhető a szukcesszív hiperrelaxáció módszerével (lásd [5]). E módszer alkalmazásakor - úgy mint a Gauss-módszernél - először meghatározzuk $u^{(k)}$ értékét, de a további számítás számára nem ezt tartjuk meg, hanem u -nak egy relaxált értékét:

$$u_{\text{relaxált}} = \omega u^{(k)} - (\omega - 1) u^{(k-1)} \quad /14/$$

Itt az ω relaxációs tényező értékére: $1 \leq \omega \leq 2$. ($\omega = 1$ esete a Gauss-módszert adja). Young dolgozata [5] alapján a relaxációs tényező optimális értékét a következő kifejezés adja:

$$\omega_{\text{opt}} = 1 + \frac{\lambda_h}{(1 + \sqrt{1 - \lambda_h})^2} \quad /15/$$

ahol a λ_h határárány /13/-ből számítható. Young kimutatja azt is, hogy ω felülbecsülése - ami λ_h pontatlan számításából adódhat, nem téglalap tartomány esetén - lényegesen nem csökkenti a konvergenciasebességet.

d./ Hibabecslés

A módszer alkalmazásakor hibát három ok miatt követhetünk el:

1. a differenciálegyenletet differenciaegyenlettel helyettesítettük. Globálisan az egész tartományra vonatkozóan megbecsülhetjük azt a hibát, amelynél mindegyik csomóponti potenciálérték hibája kisebb lesz (lásd [3]). E célból a tartományt befoglaló ellipszis tengelyeit (t, s) kell ismerni. Ezekkel a hiba a kétdimenziós esetre:

$$r \leq \frac{M_4 ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) s^2 t^2}{24 (s^2 + t^2)}$$

Itt M_4 az $u(xy)$ függvény negyedik deriváltjai abszolút értékének maximuma a vizsgált tartományban. Mint ilyen, előre nem ismeretes, de u kiszámított csomópontbeli értékei alapján meghatározható [2]:

$$\begin{aligned} \text{pl. } \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = & \frac{1}{(\Delta x)^4} [u(x+2\Delta x, y, z) - 4u(x+\Delta x, y, z) + \\ & + 6u(x, y, z) - 4u(x-\Delta x, y, z) + u(x-2\Delta x, y, z)] \end{aligned}$$

Számológépeknél igen egyszerűen felhasználható hibabecslésre és korrekcióra Richardson módszere [4]. Megoldjuk a differen-

cia egyenleteket $2h$ rácstávolsággal, (U_{2h}) és h rácstávolsággal (U_h). Ha feltehetjük, hogy a hiba h valamilyen hatványával (n) arányos, az említett módszer szerint a hiba nagyságára

$$\varepsilon_h = \frac{U_h - U_{2h}}{2^n - 1}$$

adódik és mivel ez előjeles mennyiség, vele a korrekció is elvégezhető (pl. $n = 2$ esetben):

$$U_{\text{kor}} = \frac{4}{3} U_h - \frac{1}{3} U_{2h}$$

2. Hiba származik abból, hogy a görbevonalu határt szögletes határral helyettesítjük, illetve a valóságos határpontpotenciálokat a csomópontokra interpoláljuk. Ennek az interpolációnak a hibaokozó hatását igen nehéz becsülni, és lényegében csak az a kézenfekvő megállapítás tehető, hogy a rács finomítása (a határgörbe jobb megközelítése miatt) erősen csökkenti az így adódó hibát.

3. Ha az egyenleteket nem szimultán módon oldjuk meg, az iteráció újabb hibát hoz be. A hiba nagysága pontosan nehezen becsülhető, ezért azt az utat követhetjük, hogy a

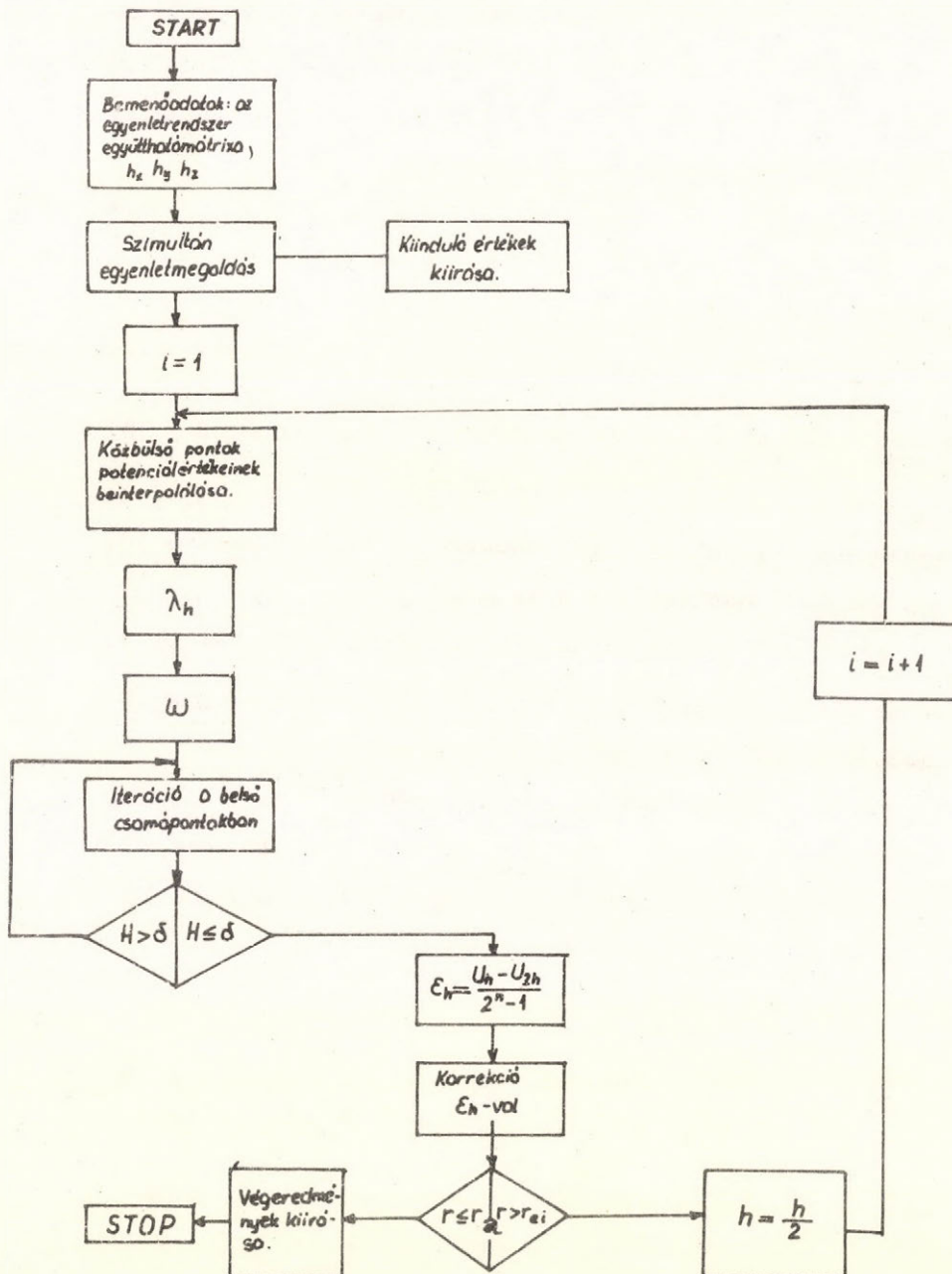
$$\max_i |u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}| = H$$

vagy

$$\sqrt{\sum_i [u_i^{(k)}]^2 - [u_i^{(k-1)}]^2} = H$$

és $H \leq \delta$ feltételek teljesülése esetén fejeződik be az iteráció (δ előre megadott hibahatár).

Fentiek alapján a számítást a számológép a következő séma szerint végzi:



4. Monte-Carló módszer.

Ismeretes, hogy lineáris differenciálegyenletek peremértékfeladatainak numerikus megoldására előnyösen alkalmazható a probléma valószínűségszámítási modellje, illetve annak kísérleti vizsgálata.

Tekintsük a vizsgált tartomány koordinátavonalakból álló hálózatát.

Tetszőleges csomópontban megkaphatjuk a potenciál értékét

(Dirichlet probléma esetén) a következőképpen. A vizsgált belső pontból (P) bolyongásokat indítunk, amelyek valamely Q_1 határpontban végződnek. A bolyongásokat úgy végezzük, hogy minden pontból a szomszédos pontok mindegyikébe egyenlő valószínűséggel jussunk el. Annak a valószínűsége, hogy P-ből éppen a határon levő Q_1 -be jutottunk, legyen $p_1(PQ_1)$. A kérdéses potenciál akkor az u_1 határpontpotenciálok p_1 valószínűségekkel súlyozott közepe:

$$U(P) = \sum_{i=1}^n p_i(PQ_i) U_i \quad /16/$$

A számológéppel a bolyongásokat szimuláljuk és a $p_1(PQ_1)$ valószínűségeket a P-ből induló és Q_1 -ben végződő bolyongások relatív gyakoriságával helyettesítjük. Ha N bolyongás közül N_1 végződik Q_1 -ben, akkor nagy N -ekre:

$$p_i(PQ_i) \rightarrow \frac{N_i}{N}$$

A szükséges bolyongások számát (N) nyilván a relatív pontosság (δ) befolyásolja (lásd [6]):

$$N \cong \frac{9 U_{i\max}^2}{\delta^2}$$

ahol $U_{i\max}$ a határpontok potenciáljának maximális értéke.

A gyakorlatilag szükséges pontosságok eléréséhez is már elég sok bolyongást kell szimulálni, így a módszer akkor alkalmazható előnyösen, ha kitüntetett pontokban kell a potenciál értékét meghatározni.

A $p_1(PQ_i)$ valószínűségek nyilván nem függnek U_1 -től, így adott tartomány esetén előre kiszámíthatók. Ezek ismeretében bármilyen peremponti potenciáelosztásra $u(P)$ értéke könnyen meghatározható, mert csak a /16/ alatti összegezést kell elvégezni. (Ezzel tulajdonképpen a tartomány alakjára és az $U_1(Q_1)$ függvényre vonatkozó peremfeltételt egymástól függetlenül lehet érvényesíteni.)

Elkészíthető egy olyan program, amelynek segítségével bármilyen Dirichlet típusú probléma tárgyalható. A véletlenszerű továbbhaladáshoz a számgenerátor a $0 \leq x \leq 1$ számközben egyenletes eloszlású véletlen számokat produkál. Ha minden hatod-intervallumhoz egy továbbhaladási irányt rendelünk, véletlenszerűen jutunk tovább minden csomópontból.

A véletlen számot generáló program szerkesztésekor ügyelni kell arra, hogy a véletlen szám ismétlődési periódusa lényegesen nagyobb legyen, mint az egyes bolyongások alatt megtett lépések maximális száma.

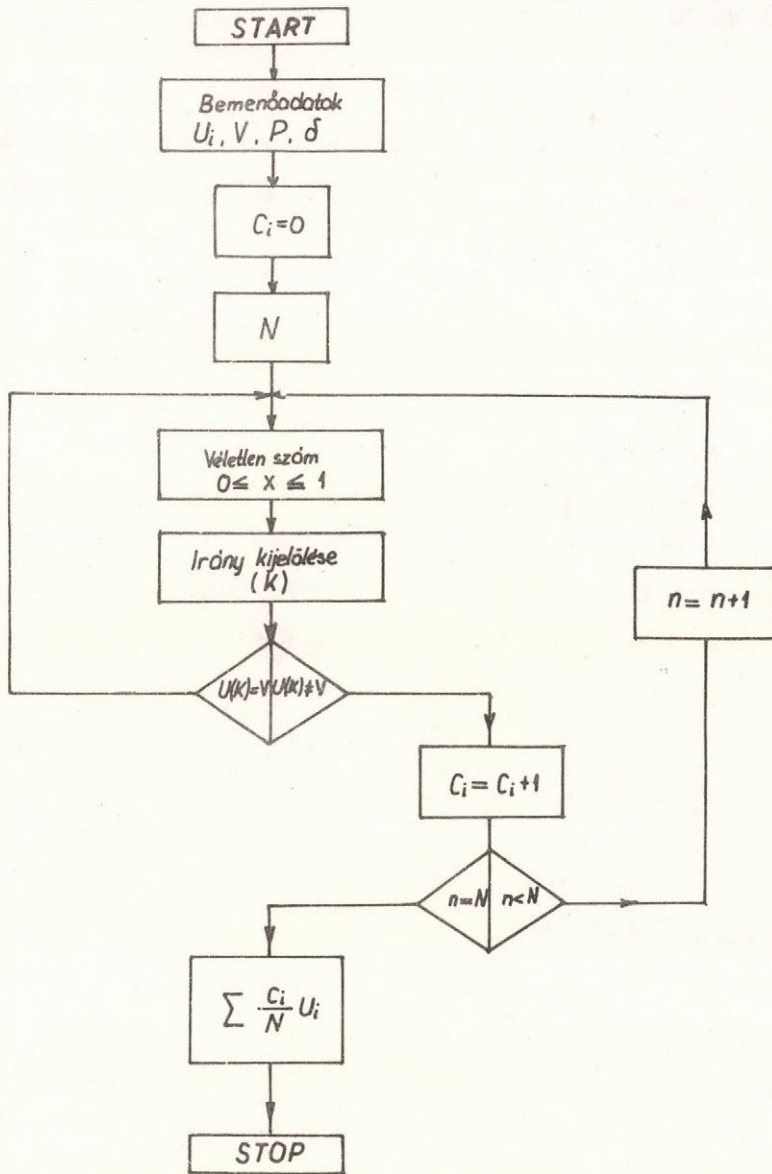
Egy bolyongást ezek után úgy szimulálunk, hogy a tartomány csomópontjait valahogy megszámozzuk (pl. sorfolytonosan) és a vizsgált belső pont (P) sorszámából kiindulva a véletlen szám éppen aktuális értéke szerint lépünk a szomszédos pontok valamelyikébe.

A kiindulási pont sorszámán és a relatív pontosságon (δ) kívül a bemenő adatok a pontokhoz tartozó potenciálértékek:

- a határpontokhoz az adottak: U_1
- az összes többihez pedig egy olyan (tetszőleges) érték, amely nem szerepel U_1 -k között (V).

A program vázlatában szereplő egyéb jelölések:

- P = a vizsgált pont sorszáma
- K = a pontok sorszáma
- C_1 = U_1 -be végződő bolyongások száma
- n = megtett bolyongások száma.



Összefoglalás.

A számológéppel történő térszámítások szempontjából szóbajövő eljárások tehát alapvetően kétfélék: analitikus és véges differencia módszerek. Az előbbiek esetében a megoldást jelentő függvényt analitikus függvényekkel kifejezve kapjuk meg, míg a másodikonál véges differenciaegyenletek segítségével, amelyek a megoldást a tér kijelölt pontjaiban numerikus eredmény formájában szolgáltatják. Ebből következik, hogy ez utóbbi esetben bár a numerikus eredményt megkapjuk, általánosabb következtetések levonása többnyire nem lehetséges. Analitikus tárgyalásnál általában áttekinthető a paraméterek változásának hatása, az eredmények pedig felhasználhatók hasonló feladatok tárgyalására, egyszerűsítési lehetőségekre utalhatnak. Mindezek következtében a problémakör mélyebb ismeretére vezetnek; míg a véges differencia módszerek általában csak a konkrét problémát oldják meg. Ehhez járul még, hogy az utóbbi módszerek esetében a hibabecslés, a konvergencia és a megoldás stabilitásának kérdései még elég kidolgozatlanok, analitikus módszereknél pedig a megoldás pontossága általában tetszőleges és előre megadható.

Mindezek mellett van egy szempont, amely a differenciaegyenletek módszerét előtérbe helyezi. Nevezetesen az, hogy míg az analitikus módszerek speciális feladattípusokra adhatók, a véges differenciaegyenletek módszerével csaknem valamennyi probléma tárgyalható, illetve csak technikai feltételek (idő, memóriakapa-

citás) korlátozzák a megoldható feladatok körét.

Irodalom:

- [1] Simonyi: Elméleti Villamosság, Tankönyvkiadó, 1960.
- [2] Boast: Vector Field, Harper and Row Publishers.
- [3] Kantorovics Krülov: A felsőbb analízis közelítő módszerei.
Akadémiai Kiadó, 1953.
- [4] Berezin Zsitkov: Metodü vücsiszlenyij 2. rész. Moszkva, 1961
- [5] Young: Iterative Methods for Solving Partial Difference
Equation of Elliptic Type. Trans. Amer. Math.Soc.
1954.
- [6] Buszlenkó: Monte-Carló módszerek. Mészaki Könyvkiadó, 1965.

S u m m a r y

The paper describes on basis of the thesis prepared with the Computing Centre numerical methods which can be used to the best advantage to the solution on computers of problems of calculation of electric and magnetic fields. Various forms of basic space equations describing the fields, as well as three available methods of solution are outlined; serial development, difference equations and Monte Carlo methods. Beside the expounding of mathematical procedures special computer application problems are dealt with and programs for computation are given.