Egy sorbanállási feladat megoldása

Gergely József

I. A feladat megfogalmazása

Az [1] /és néhány azt megelőző/ cikkben Gaver a következő sorbanállási feladatot vizsgálja: Egy kiszolgáló berendezéshez kétféle áramlat érkezik (A és B tipusu). A kiszolgálási idők T_1 és T_2 függetlenek és különkülön azonos eloszlásuak $B_1(t)$ és $B_2(t)$ eloszlásfüggvényekkel. Ha a készülék egy A tipusu után B tipusut szolgál ki, vagy forditva, szükség van egy T_{12} ill. T_{21} átkapcsolási időre. T_{12} és T_{21} függetlenek és külön-külön azonos $C_{12}(t)$ ill. $C_{21}(t)$ eloszlásuak. Az érkezés a_1 ill. a_2 intenzitásu Poisson folyamat. Az érkezési, kiszolgálási és átkapcsolási idők egymástól függetlenek.

A feladatot Gaver a következő esetekre oldotta meg:

1./ Kiszolgálás érkezési sorrendben történik.

2./ B-nek elsőbbsége van A-val szemben. Itt különböző prioritási eseteket vizsgál (pl. az elsőbbség csak a kiszolgálások befejezése után érvényesül; B megszüntetheti A kiszolgálását, majd B kiszolgálásának befejezése után A kiszolgálása folytatódik, vagy ujrakezdődik stb.).

A rendszerben lejátszódó folyamat erősen függ az üres rendszer esetén követett stratégiától. Ezzel kapcsolatban Gaver vizsgálta a következő eseteket:

a/ Ha a kiszolgálás B tipusuval fejeződött be és nincs a rendszerben se A se B tipusu, akkor megkezdődik a készülék átkapcsolása A-ra (feltételezi, hogy $a_1 > a_2$).

b/ Ha egy kiszolgálás után a rendszer üresen marad, csak egy érkezés után kezdi meg az átkapcsolást, ha szükség van arra.

Az alábbiakban a következő esetet vizsgáljuk:

Alkossanak külön sort az A és a B tipusuak. Ha a készülék A tipusuakat szolgált ki, akkor csak abban az esetben kapcsol át B-re, ha nincs A tipusu sorbanálló és a B sorban legalább n_2, ill. B-ről A-ra, ha az A sorban legalább n_1 várakozó van ($n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$). Az általunk vizsgált rendszer akkor előnyös, ha az átkapcsolási idők a kiszolgálási időhöz viszonyitva nagyok.

Tegyük fel, hogy léteznek a szereplő eloszlások momentumai.

II. Az egyenletek felállitása

Jellemezze a kiszolgálási rendszer egy kiszolgálás befejezése utáni állapotát az (i, k_1, k_2) számhármas, ahol $i = 1$, ha az utolsó befejeződött kiszolgálás egy A tipusu egység kiszolgálása volt és $i = 2$, ha B tipusu, és a kiszolgálás befejezése után az A sorban k_1, a B sorban k_2 egység maradt.

Jelöljük $p_{i, k_1, k_2, N}$ -el annak valószinüségét, hogy az N.-ik kiszolgálás után a rendszer állapota (i, k_1, k_2).

Bevezetjük a következő függvényeket:

$$P_{i,N}(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 \geq 0} p_{i, k_1, k_2, N} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \qquad /1/$$

$$\beta_i(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dB_i(t) ; \quad \gamma_{ij}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dC_{ij}(t) \qquad /2/$$

ahol

$$i = 1,2 ; \quad j = 1,2 ; \quad i \neq j$$
$$0 \leq z_1 \leq 1 \quad 0 \leq z_2 \leq 1 \quad 0 \leq z \qquad /3/$$

Bebizonyitjuk, hogy az /1/, /2/ és /3/-al definiált függvények kielégitik a következő egyenleteket ($i=1$; $j=2$, vagy $i=2$, $j=1$):

$$z_i P_{i,N+1}(z_1,z_2)=\Big\{P_{i,N}(z_1,z_2)-P_{i,N}(0,z_2)+ \tag{4}$$

$$+\frac{a_i}{a_1+a_2} z_i \sum_{k_j=0}^{n_j-1}\Big[q_{i,k_{2N}} z_j^{k_j} \sum_{l=0}^{n_j-k_j-1}\Big(\frac{a_j}{a_1+a_2}\Big)^l+\Big[P_{j,N}(z_1,0)-$$

$$-\sum_{k_1=0}^{n_i-1}\Big\{q_{j,k_1,N} z_i^{k_i}\Big[1-\Big(\frac{a_i}{a_1+a_2}z_i\Big)^{n_i-k_i}\Big]\Big\}\Big]\gamma_{ji}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)\Big\}\beta_i(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)$$

ahol

$$q_{1,k_2,N}=p_{1,0,k_2,N} \quad \text{és} \quad q_{2,k_1,N}=p_{2,k_1,0,N}$$

Bizonyitás: Bevezetjük a következő kiegészitő eseményeket /lásd [2] /. Legyenek a kiszolgáló rendszerbe érkező egységek pirosak és kékek. Legyen z_1 ill. z_2 annak valószinüsége, hogy egy A ill. B sorba érkező egység piros, akkor $p_{i,k_1,k_2,N} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ annak valószinüségét adja meg, hogy az N.-ik kiszolgálás befejezése után a rendszer állapota (i, k_1, k_2) és a rendszerben maradó minden egység piros. Az /1/-el definiált $P_{i,N}(z_1,z_2)$ értelmezhető, mint a következő esemény valószinüsége: az N.-ik kiszolgálás után a rendszerben nincs kék egység, az N.-ik kiszolgált egység A tipusu volt, ha $i = 1$ és B tipusu, ha $i = 2$.

Kiszámoljuk annak valószinüségét, hogy egy egység kiszolgálási ideje (T_1 vagy T_2), valamint az átkapcsolási idők (T_{12} vagy T_{21}) alatt kék egység nem érkezik a rendszerbe. A kiszolgálási időkre vonatkozóan ezek a valószinüségek $i = 1$, vagy $i = 2$-re /az érkezések Poisson eloszlás szerint történnek/:

$$\sum_{k_1,k_2\geq 0} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \int_0^\infty \frac{(a_1 t)^{k_1}}{k_1!} e^{-a_1 t} \cdot \frac{(a_2 t)^{k_2}}{k_2!} e^{-a_2 t}\, dB_i(t) =$$

$$= \beta_i(a_1 + a_2 - a_1 z_1 - a_2 z_2)$$

Az átkapcsolási időkre vonatkozóan hasonló felirásból következően $i = 1$, $j = 2$ ill. $i = 2$, $j = 1$-re:

$$\gamma_{ij}(a_1 + a_2 - a_1 z_1 - a_2 z_2)$$

A /4/ egyenlet $i = 1$, $j = 2$-re annak valószinüségét adja meg, hogy az N+1.-ik kiszolgált egység A tipusu és piros, és a kiszolgálásának befejezése után a rendszerben nem maradt kék egység. Teljesen hasonlóan $i = 2$, $j = 1$ esetén.

III. Ergodicitás bizonyitása

Jelöljük a kiszolgálási és átkapcsolási idők várható értékét β_{i1} ill. γ_1^{ij} -vel, vagyis i=1,2; j=1,2; i≠j-re

$$\beta_{i1}=\int_0^\infty t\,dB_i(t)\ ;\quad \gamma_1^{ij}=\int_0^\infty t\,dC_{ij}(t)$$

Bebizonyitjuk a következő állitást: Ha

$$a_1\beta_{11}+a_2\beta_{21}<1 \qquad /5/$$

akkor a kiszolgálási rendszer $(i,\ k_1,\ k_2)$ állapotai ergodikusak.

Bizonyitás: Rendezzük a rendszer állapotait olyan sorrendben, hogy először szerepeljen minden olyan állapot, melyre $k_1 \leq n_1$, $k_2 \leq n_2$ és azután a többi állapot. Jelölje $s = s\,(i,\ k_1,\ k_2)$ az ilymódon elrendezett $(i,\ k_1,\ k_2)$ állapot sorszámát, és legyen

$$S_0=\max_{k_1\leq n_1;\,k_2\leq n_2} s(i,k_1,k_2)$$

A rendszer állapotai Markov láncot alkotnak. Jelöljük a t sorszámu állapotból az s sorszámba való átmenet valószinüségét q_{st} -vel, valamint y_s-el azt a közepes időt, ami szükséges az s.-ik állapotból kiindulva a kiszolgálás befejezéséig, feltéve, hogy közben ujabb érkezés nem történik.

Igy

$$y_s = \begin{cases} k_i\beta_{i1} + \gamma_1^{ij} + k_j\beta_{j1} & \text{ha } k_j \geq n_j \\ k_i\beta_{i1} & \text{ha } k_j < n_j \end{cases} \qquad /6/$$

Rögzitsünk egy s-et, akkor a $\sum_t q_{st} y_t$ jelenti egy kiszolgálás befejezése utáni állapotból a kiszolgálás befejezéséig eltelt közepes időt, feltéve, hogy közben uj érkezés nincs. Ha $s \leq s_o$, akkor

$$\sum_t q_{st} y_t < \infty \qquad /7/$$

tekintve, hogy véges összegről van szó. Egyébként a $\sum_t q_{st} y_s$ kiszámitásánál a következő eseteket különböztetjük meg:

a/ $k_i > 0$, $k_j \geq n_j$ akkor /6/-ból $y_s = k_i\beta_{i1} + \gamma_1^{ij} + k_j\beta_{j1}$

és

$$\sum_t q_{st} y_t = (k_i - 1)\beta_{i1} + a_i\beta_{i1}\beta_{j1} + \gamma_1^{ij} + k_j\beta_{j1} + a_j\beta_{i1}\beta_{j1} =$$

$$= y_s - \beta_{i1}(1 - a_i\beta_{i1} - a_j\beta_{j1}) = y_s - \varepsilon_1 \qquad /8/$$

b/ $k_i > 0$, $k_j < n_j$, akkor /6/-ból $y_s = k_i\beta_{i1}$ és igy

$$\sum_t q_{st} y_t = (k_i - 1)\beta_{i1} + a_i\beta_{i1}\beta_{i1} =$$

$$= y_s - \beta_{i1}(1 - a_i\beta_{i1}) = y_s - \varepsilon_2 \qquad /9/$$

c/ $k_i=0$, $k_j \geq n_j$, akkor /6/-ból $y_s=\gamma_1^{ij}+k_j\beta_{j1}$
és igy

$$\begin{aligned}\sum_t q_{st} y_t &= (k_j-1)\beta_{j1} + (\gamma_1^{ij}+\beta_{j1}) a_j \beta_{j1} = \\ &= y_s - (\beta_{j1}+\gamma_1^{ij})(1-a_j\beta_{j1}) = y_s - \varepsilon_3\end{aligned} \qquad /10/$$

(A $k_i=0$, $k_j<n_j$ esetben $s \leq s_0$, melyre teljesül /7/.)
Az /5/ feltevés miatt /8/, /9/ és /10/-ben szereplő

$$\varepsilon_1 = \beta_{i1}(1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}) > 0$$

$$\varepsilon_2 = \beta_{i1}(1-a_i\beta_{i1}) > 0$$

$$\varepsilon_3 = (\beta_{j1}+\gamma_1^{ij})(1-a_j\beta_{j1}) > 0$$

Másrészt minthogy az $s \leq s_0$ végesszámu esetben teljesül /7/, ezért alkalmazható [2] 45. §-nak 2. következménye, amely szerint a vizsgált Markov lánc állapotai ergodikusak.

Az ergodicitás következtében léteznek a

$$p_{i,k_1,k_2} = \lim_{N\to\infty} p_{i,k_1,k_2,N} \qquad /11/$$

$$P_i(z_1,z_2) = \lim_{N\to\infty} P_{i,N}(z_1,z_2) = \sum_{k_1,k_2 \geq 0} p_{i,k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \qquad /12/$$

határértékek. Terjesszük ki /12/ érvényességét a

$$|z_1| \leq 1; \quad |z_2| \leq 1 \tag{/13/}$$

komplex tartományra, akkor itt $P_i(z_1, z_2)$ mint két változós generátorfüggvény analitikus lesz. Másrészt /2/-ben legyen z olyan komplex szám, amelyre $\mathrm{Re}\, z \geq 0$. Igy a $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ komplex félsikon /2/ a $B_i(t)$ és $C_{ij}(t)$ eloszlás függvények Laplace-Stieltjes transzformáltjait definiálja.

Végezzük el a /11/ és /12/ határ-átmenetet, valamint a szereplő függvények értelmezésének kiterjesztését (/13/-ra ill. $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ -ra/, akkor /4/-ből ($i=1,2$; $j=1,2$; $i \neq j$-re) a következő egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned} z_i P_i(z_1,z_2) = \Big\{ & P_i(z_1,z_2) - P_i(0,z_2) + \\ & + \frac{a_i}{a_1+a_2} z_i \sum_{k_j=0}^{n_j-1} \Big[q_{i,k_2} z_j^{k_j} \sum_{l=0}^{n_j-k_j-1} \Big(\frac{a_j}{a_1+a_2}\Big)^l + \Big[P_j(z_1,0) - \\ & - \sum_{k_i=0}^{n_i-1} \Big\{ q_{j,k_1} z_i^{k_i} \Big[1 - \Big(\frac{a_i}{a_1+a_2} z_i\Big)^{n_i-k_i} \Big]\Big\}\Big] \gamma_{ji}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)\Big\} \beta_i(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2) \end{aligned} \tag{/14/}$$

ahol

$$q_{1,k_2} = p_{1,0,k_2} \quad \text{és} \quad q_{2,k_1} = p_{2,k_1,0}$$

IV. Optimalizálási probléma

A tárgyalt problémával kapcsolatban a következő feladat állitható fel: Ha ismerjük az a_1, a_2 intenzitásokat, valamint a kiszolgálási és átkapcsolási idők eloszlásfüggvényeit ($B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_{12}(t)$, $C_{21}(t)$), hogyan kell megválasztani az n_1 és n_2 számokat ahhoz, hogy a kiszolgáló rendszerünk a leghatékonyabb, vagyis hogy a várakozó egységek várakozási ideje vagy a várakozó sorok hossza minimális legyen. Az utóbbit például kiszámolhatjuk a $P_1(z_1, z_2)$ és $P_2(z_1, z_2)$ függvények z_1 és z_2 szerinti parciálisainak $z_1=1$, $z_2=1$ helyen kapott értékei segitségével. Azonban ehhez a /14/ egyenletből meg kellene határozni az emlitett függvényeket vagy parciálisaikat.

A /14/ egyenlet nagyon bonyolult, ahhoz hogy az itt felvetett kérdés megoldásához szükséges mennyiségeket kiszámitsuk, vagy azoknak n_1 és n_2-től való függését megállapitsuk. Igy a rendszernek az n_1 és n_2 paraméterek szerinti optimalizálási kérdésével nem foglalkozunk.

A továbbiakban a /14/ egyenlet egy speciális esetének megoldásával foglalkozunk. Legyen $n_1=1$, $n_2=1$, akkor

$i=1$, $j=2$ és $i=2$, $j=1$-re /14/-ből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$z_1 P_1(z_1,z_2) = \Big\{ P_1(z_1,z_2) - P_1(0,z_2) + \frac{a_1}{a_1+a_2} p_{1,0,0} z_1 + $$
$$+ \Big[P_2(z_1,0) - p_{2,0,0}\Big(1-\frac{a_1}{a_1+a_2} z_1\Big)\Big] \gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)\Big\} \beta_1(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2) \quad /15/$$

$$z_2 P_2(z_1,z_2) = \Big\{ P_2(z_1,z_2) - P_2(z_1,0) + \frac{a_2}{a_1+a_2} z_2 p_{2,0,0} + $$
$$+ \Big[P_1(0,z_2) - p_{1,0,0}\Big(1-\frac{a_2}{a_1+a_2} z_2\Big)\Big] \gamma_{12}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)\Big\} \beta_2(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2) \quad /16/$$

V. Az $n_1=n_2$ speciális eset megoldása

Helyettesitsünk a /15/ egyenletbe $z_1=1$, $z_2=1$-et:

$$P_1(1,1) = \Big\{ P_1(1,1) - P_1(0,1) + \frac{a_1}{a_1+a_2} p_{1,0,0} + $$
$$+ \Big[P_2(1,0) - P_2\Big(1-\frac{a_2}{a_1+a_2}\Big)\Big] \gamma_{21}(0)\Big\} \beta_1(0) \quad /17/$$

$P_1(1,1)$ annak valószinüségét adja meg, hogy egy kiszolgálás éppen A tipusu egység kiszolgálása volt, ami $\frac{a_1}{a_1+a_2}$. Helyettesitsünk /17/-be

$$P_1(1,1) = \frac{a_1}{a_1+a_2}, \quad \gamma_{21}(0) = \beta_1(0) = 1, \quad 1-\frac{a_1}{a_1+a_2} = \frac{a_2}{a_1+a_2}$$

értéket kapjuk:

$$P_1(0,1)-P_2(1,0)=\frac{a_1}{a_1+a_2}p_{1,0,0}-\frac{a_2}{a_1+a_2}p_{2,0,0} \qquad /18/$$

/Megjegyezzük, hogy /16/-ból kiindulva ugyanerre az eredményre jutottunk volna./

Helyettesitsünk /15/-be $z_1=1$, $z_2=0$-t, /16/-ba $z_1=0$, $z_2=1$-et, a kapott egyenlőségeket a következő alakra hozhatjuk:

$$P_1(1,0)\left[1-\frac{1}{\beta_1(a_2)}\right]+P_2(1,0)\gamma_{21}(a_2)=\frac{a_2}{a_1+a_2}\left[p_{1,0,0}+p_{2,0,0}\gamma_{21}(a_2)\right] \qquad /19/$$

$$P_1(0,1)\gamma_{12}(a_1)+P_2(0,1)\left[1-\frac{1}{\beta_2(a_1)}\right]=\frac{a_1}{a_1+a_2}\left[p_{2,0,0}+p_{1,0,0}\gamma_{12}(a_1)\right] \qquad /20/$$

Differenciáljuk /15/ és /16/-ot z_1 szerint és helyettesitsük $z_1=z_2=1$-et, használva a várható értékekre III-ban bevezetett $\beta_{11}, \beta_{21}, \gamma_1^{12}$, és γ_1^{21} jelöléseket, /15/-ből kapjuk:

$$P_2^{(z_1)}(1,0)=P_1(0,1)a_1\beta_{11}-P_2(1,0)a_1[\beta_{11}+\gamma_1^{21}]-p_{1,0,0}\frac{a_1}{a_1+a_2}[1+a_1\beta_{11}]-$$
$$-p_{2,0,0}\left[\frac{a_1}{a_1+a_2}(1-a_2[\beta_{11}+\gamma_1^{21}])\right]+\frac{a_1}{a_1+a_2}(1-a_1\beta_{11}) \qquad /21/$$

$$P_2^{(z_1)}(1,0)=P_1(0,1)a_1[\gamma_1^{12}+\beta_{21}]-P_2(1,0)a_1\beta_{21}-p_{1,0,0}\frac{a_1}{a_1+a_2}a_1[\gamma_1^{12}+\beta_{21}]+$$
$$+p_{2,0,0}\frac{a_2}{a_1+a_2}a_1\beta_{21}+\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\beta_{21} \qquad /22/$$

/21/ és /22/ jobboldalait egyenlővé téve és rendezve, /18/ felhasználásával a következő egyenlethez jutunk:

$$P_1(0,1)\gamma_1^{12}+P_2(1,0)\gamma_1^{21}=\frac{1}{a_1+a_2}\left[1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}-(1-\gamma_1^{12})p_{1,0,0}-(1-a_2\gamma_1^{21})p_{2,0,0}\right] \qquad /23/$$

A /18/, /19/, /20/ és /23/ egyenletek $P_1(0,1)$, $P_1(1,0)$, $P_2(0,1)$ a $P_2(1,0)$ mennyiségekre vonatkozóan egy lineáris egyenletrendszert adnak. Ha egyenletrendszer determinánsa

$$\left[1-\frac{1}{\beta_1(a_2)}\right]\left[1-\frac{1}{\beta_2(a_1)}\right]\left[\gamma_1^{21}+\gamma_1^{12}\right] \qquad /24/$$

0-tól különböző (azaz $\beta_1(a_2)\neq 1$, $\beta_2(a_1)\neq 1$ és $\gamma_1^{21}+\gamma_1^{12}\neq 0$) a $P_1(0,1)$, $P_1(1,0)$ és $P_2(1,0)$ mennyiségek kifejezhetők $P_{1,0,0}$ és $P_{2,0,0}$ lineáris kombinációjaként, ahol az együtthatók az ismert β_1, β_2, γ_{21} és γ_{12} függvények momentumait vagy helyettesitési értékeit tartalmazzák. Fejezzük ki /15/-ből a $P_1(z_1,z_2)$ függvényt. A kifejezés nevezőjébe az

$$1-\frac{z_1}{\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)} \qquad /25/$$

függvény kerül. Tekintsük azon z_1 és z_2 helyeket ahol /25/ azonosan 0. Használjuk a $z_1=z$ jelölést és legyen $z_2=f(z)$, melyre teljesül a

$$\beta_1(a_1+a_2-a_1z-a_2f(z))-z\equiv 0 \qquad /26/$$

azonosság, vagyis β_1 definiciója szerint

$$\int_0^{\infty} e^{-[a_1+a_2-a_1z_1-a_2f(z)]t}\, dB_1(t) \equiv z \qquad /27/$$

/27/-et z szerint differenciálva a $z=1$ helyen, majd rendszerezve kapjuk az

$$f'(1) = \frac{1-a_1\beta_{11}}{a_2\beta_{11}} > 0 \qquad /28/$$

egyenlőtlenséget, amiből következik, hogy $z=1$ bizonyos környezetében $|f(z)|<1$. Minthogy $P_1(z_1,z_2)$ analitikus a /13/ tartományon, a /15/-ből kifejezett $P_1(z_1,z_2)$ számlálójának is azonos 0-nak kell lenni a $z_1=z$, $z_2=f(z)$ helyen azaz fenn kell állni a

$$P_1(0,f(z)) - P_2(z,0)\gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2f(z)) +$$
$$+p_{2,0,0}\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}z\right)\gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2f(z)) - \frac{a_1}{a_1+a_2}p_{1,0,0} \equiv 0 \qquad /29/$$

azonosságnak. Hasonló megoldásból /16/-ból kiindulva a

$$\beta_2(a_1+a_2-a_1g(z)-a_2z) - z \equiv 0 \qquad /30/$$

azonossággal definiált $g(z)$ függvényre teljesül a

$$g'(1) = \frac{1-a_2\beta_{21}}{a_1\beta_{21}} > 0$$

egyenlőtlenség és /29/-hez hasonlóan érvényes a

$$P_2(g(z),0) - P_1(0,z)\gamma_{12}(a_1+a_2-a_1g(z)-a_2z) +$$
$$+p_{1,0,0}\left(1-\frac{a_2}{a_1+a_2}z\right)\gamma_{12}(a_1+a_2-a_1g(z)-a_2z) - \frac{a_2}{a_1+a_2}p_{2,0,0} \equiv 0 \qquad /31/$$

azonosság. (/29/ és /31/-be $z=1$-et helyettesitve egyaránt a /18/ egyenlethez jutunk.)

Differenciáljuk most a /29/ és /31/ azonosságokat és helyettesitjük $z=1$-et. Jelöljük a $P_1(0,z)$ és $P_2(z,0)$ függvények n-edik differenciálhányadosait $P_1^{(n)}(0,z)$ és $P_2^{(n)}(z,0)$-al, akkor /29/ és /31/-ből kifejezhetők $P_1^{(1)}(0,1)$ és $P_2^{(1)}(1,0)$ mint $P_1(0,1)$, $P_2(1,0)$, $P_{1,0,0}$ és $P_{2,0,0}$ lineáris kombinációi és ismert függvények jellemző adatai. A /29/ és /31/ második differenciálhányadosából pedig $P_1^{(2)}(0,1)$ és $P_2^{(2)}(1,0)$ fejezhető ki lineárisan $P_1^{(1)}(0,1)$, $P_2^{(1)}(1,0)$-al, valamint a felsorolt mennyiségekkel, és igy tovább $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ az alacsonyabb deriváltak és a felsorolt mennyiségek segitségével. $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ kiszámolásához alapul szolgáló /29/ és /31/-ből kapott egyenletrendszer determinánsa:

$$\begin{vmatrix} f'(1)^n & -1 \\ -1 & g'(1)^n \end{vmatrix} = f'(1)^n g'(1)^n - 1 = \left[\frac{1-a_1\beta_{11}}{a_2\beta_{11}} \cdot \frac{1-a_2\beta_{21}}{a_2\beta_{21}}\right]^n - 1 > 0$$

A /29/ és /31/-ből kapott $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ számok segitségével épitsük fel a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_1^{(k)}(0,1)}{k!}(z-1)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_2^{(k)}(1,0)}{k!}(z-1)^k \qquad /32/$$

hatványsorokat ezek éppen a $P_1(0,z)$ és a $P_2(z,0)$ függvények z=1-hez tartozó hatványsorai. Helyettesitsünk /32/-be z=0-t kapjuk:

$$P_1(0,0)=p_{1,0,0}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{P_1^{(k)}(0,1)}{k!}\quad;\quad P_2(0,0)=p_{2,0,0}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{P_2^{(k)}(1,0)}{k!}\qquad /33/$$

Minthogy $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ a $P_1^{(k)}(0,1)$, $P_2^{(k)}(1,0)$, $k=0,1,2,\dots,n-1$, $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ lineáris kifejezései, ezért /33/ jobboldalán $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ lineáris kifejezései állnak, és ezek /23/ miatt inhomogének. Igy /33/ egyértelmüen meghatározza a $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ valószinüségeket. A $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ ismeretében /18/, /19/, /20/ és /23/-ból megkaphatjuk $P_1(0,1)$, $P_1(1,0)$, $P_2(1,0)$ és $P_2(0,1)$ értékeit, majd /32/ hatványsorait n-szer differenciálva és z=0-at helyettesitve kapjuk a $p_{1,0,n}$ és $p_{2,n,0}$ valószinüségeket.

A $\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)$, $\beta_2(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)$, $\gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)$ és $\gamma_{12}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)$ függvények analitikusak a /13/ tartományban és igy ott előállithatók hatványsorokkal. Helyettesitsük a /15/ egyenletbe z_2=0-t és legyen a $\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1)$; $\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1)$; $\gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1)$ függvények z_1=0-hoz tartozó z_1 szerinti sorelőállitásai

$$\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{1,k} z_1^{k_1}$$

$$\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1)\gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1)=\sum_{k=0}^{\infty} d_{1,k} z_1^{k_1} \qquad /34/$$

/34/-et /15/-be helyettesitve és /12/-t felhasználva $z_2=0$ mellett a következő egyenletet kapjuk:

$$z_1\sum_{i=0}^{\infty} p_{1,i,0} z_1^i=\Big[\sum_{i=0}^{\infty} p_{1,i,0}z_1^i-p_{1,0,0}\Big(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}z_1\Big)\Big]\sum_{k=0}^{\infty} b_{1,k} z_1^k+$$
$$+\Big[\sum_{i=0}^{\infty} p_{2,i,0}z_1^i-p_{2,0,0}\Big(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}z_1\Big)\Big]\sum_{k=0}^{\infty} d_{1,k} z_1^k \qquad /35/$$

/35/ bal és jobboldalán a z_1^k együtthatóit egyenlővé téve, a kapott egyenletek a következőképpen rendezhetők:

$$p_{1,k,0}b_{1,0}=p_{1,k-1,0}+p_{1,0,0}\Big(b_{1,k}-\frac{a_1}{a_1+a_2}b_{1,k-1}\Big)-$$
$$-\sum_{i=0}^{k-1} p_{1,i,0}b_{1,k-i}+p_{2,0,0}\Big(d_{1,k}-\frac{a_1}{a_1+a_2}d_{1,k-1}\Big)+\sum_{i=0}^{k} p_{2,i,0}d_{1,k-i} \qquad /36/$$

Minthogy a $p_{2,k,0}$ valószinüségeket az előzőek alapján ismertnek tételezhetjük fel, a $p_{1,k,0}$ valószinüségeket /36/-ból k=1,2,...-ra egymásutáni helyettesitésekkel nyerhetjük.

Hasonló meggondolásokkal a /16/-ból kiindulva a /36/-nak megfelelő

$$p_{2,0,k}b_{2,0}=p_{2,0,k-1}+p_{2,0,0}\Big(b_{2,k}-\frac{a_2}{a_1+a_2}b_{2,k-1}\Big)-$$
$$-\sum_{i=0}^{k-1} p_{2,0,i}b_{2,k-i}+p_{1,0,0}\Big(d_{2,k}-\frac{a_2}{a_1+a_2}d_{2,k-1}\Big)+\sum_{i=0}^{k} p_{1,0,i}d_{2,k-i} \qquad /37/$$

egyenlethez juthatunk, ahol $b_{2,k}$ és $d_{2,k}$ a $\beta_2(a_1+a_2-a_2z_2)$ és $\beta_2(a_1+a_2-a_2z_2)\cdot\gamma_{21}(a_1+a_2-a_2z_2)$ függvények z_2 szerinti sorfejtésben az együtthatók. /37/-ből a $p_{2,0,k}$ valószinüségek nyerhetők szukcesszív helyettesitésekkel.

Vezessük be a következő jelöléseket, legyen

$$m^1_{1,i}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{1,i,k} \qquad m^2_{1,i}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{1,k,i}$$
$$m^1_{2,i}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{2,i,k} \qquad m^2_{2,i}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{2,k,i} \qquad /38/$$

Az eddigiek alapján ismerjük a

$$P_1(0,1)=m^1_{1,0}\ ;\ P_1(1,0)=m^2_{1,0}\ ;\ P_2(0,1)=m^1_{2,0}\ ;\ P_2(1,0)=m^2_{2,0} \qquad /39/$$

mennyiségeket.

Helyettesitsünk /15/-be $z_2=1$-et és irjuk fel az egyenlőség mindkét oldalának z_1 szerinti, majd $z_1=1$-et és irjuk fel a z_2 szerinti hatványsorát. A kapott egyenlőségekből z_1^k ill. z_2^k hatványok együtthatóit összehasonlitva kapjuk:

$$m^1_{1,k}b_{3,0}=m^1_{1,k-1}+m^1_{1,0}b_{3,k}-\frac{a_1}{a_1+a_2}p_{1,0,0}b_{3,k-1}-$$
$$-\sum_{i=0}^{k-1}m^1_{1,i}b_{3,k-i}+p_{2,0,0}d_{3,k}-\frac{a_1}{a_1+a_2}p_{2,0,0}d_{3,k-1}-\sum_{i=0}^{k}p_{2,i,0}d_{3,k-i} \qquad /40/$$

$$m^2_{1,k}(1-b_{4,0})=\frac{a_1}{a_1+a_2}p_{1,0,0}b_{4,k}+\sum_{i=0}^{k-1}m^2_{1,i}(b_{4,k-i}-1)-$$
$$-p_{2,0,0}\frac{a_2}{a_1+a_2}d_{4,k}-\sum_{i=0}^{k}p_{1,0,i}\,b_{4,k-i} \qquad /41/$$

ahol $b_{3,k}$, $b_{4,k}$, $d_{3,k}$ és $d_{4,k}$ rendre a $\beta_1(a_1-a_1z_1)$ $\beta_2(a_2-a_2z_2)$; $\beta_1(a_1-a_1z_1)\gamma_{21}(a_1-a_1z_1)$ és a $\beta_2(a_2-a_2z_2)\gamma_{12}(a_2-a_2z_2)$ függvények hatványsorában szereplő együtthatók. /Megjegyezzük, hogy /41/ k=0-ra a /19/ egyenletet adja./

/40/ és /41/-be rendre k=1,2,... helyettesitésével a jobboldalon ismert mennyiségek szerepelnek, igy kapjuk az $m^1_{1,k}$, $m^2_{1,k}$ értékeit.

Hasonló meggondolásokkal a /16/-ból kiindulva a /40/ és /41/-el analóg egyenleteket nyerhetünk, amelyekből $m^1_{2,k}$, $m^2_{2,k}$, k=1,2,... számolhatók.

VI. Az eredmények értelmezése

Megjegyzések az egyenletek megoldásával kapcsolatban.

Az egyenletekben szereplő mennyiségek a vizsgált kiszolgáló rendszer egy-egy kiszolgálás utáni állapotának valószinüségeit adják. Igy a $p_{1,a,k}$; $p_{1,k,0}$; $p_{2,0,k}$ ill. $p_{2,k,0}$ jelenti annak valószinüségét, hogy a befejezett kiszolgálás A ill. B tipusu egység kiszolgálása volt és utána az A ill. B tipusu sorban éppen k egység, mig a másik sor üresen maradt. Ennek megfelelően $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ az A vagy B tipusu egység kiszolgálása utáni üres rendszer valószinüsége. A /38/ definició szerint $m^1_{1,i}$ annak a valószinüségét jelenti, hogy egy A tipusu egység kiszolgálásának befejezése után az A sorban i várakozó marad, függetlenül attól, hogy a B sorban milyen a sor állapota. Hasonlóan értelmezhetők az $m^2_{1,i}$, $m^1_{2,i}$ és az $m^2_{2,i}$ mennyiségek. Ennek speciális eseteként kapjuk /39/-ben szereplő mennyiségek valószinüségi jelentését.

Azoknak az egyenleteknek a felirása, amelyek /29/ és /31/-ből kiindulva adódnak a $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ mennyiségek meghatározására, általános esetben nagyon bonyolultak, konkrét $\beta_1, \beta_2, \gamma_{21}$ és γ_{12} esetén azonban könnyen keresztülvitelezhetők. Bizonyos esetben a /33/ jobboldalai is zár alakban felirhatók és akkor könnyen megoldhatók $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ -ra és /32/-ből is egyszerüen nyerhetők a $p_{1,0,k}$ és $p_{2,k,0}$ valószinüségek.

Ha viszont a /29/ és /31/-ből csak numerikusan számolhatók ki a $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ mennyiségek, akkor /33/ jobboldalai is numerikus sort jelentenek. Ebben az esetben valamilyen $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ -ra becsült értékből kiindulva kiszámoljuk a /33/ jobboldalait és hasonlitjuk a baloldalakhoz, majd a kétoldali eltérések különbségének megfelelően korrigáljuk $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ -at mindaddig, mig a /33/-ban egyenlőséget nem kapunk. Ez elvégezhető a következőképpen: /33/ egyenletek jobboldalai a $p_{1,0,0}$, $p_{2,0,0}$ valószinüségek inhomogén lineáris függvényei, vagyis $A p_{1,0,0} + B p_{2,0,0} + C$ ill. $\alpha p_{1,0,0} + \beta p_{2,0,0} + \gamma$ alakuak.

Kiindulásul válasszuk $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ -at rendre az x_1, y_1 ; x_2, y_2 és x_3, y_3 számpároknak. A /33/ jobboldalán kapott $A x_i + B y_i + C$ és $\alpha x_i + \beta y_i + \gamma$ (i=1,2,3) értékből A, B, C, α, β és γ kiszámolhatók, amiből aztán könnyen adódik a $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ megoldás.

Ha a megoldás folyamán felhasznált egyenletekben szereplő függvények analitikusan nem kezelhetők, akkor a numerikus megoldásuknál szereplő mennyiségek csak bizonyos pontosságig számolhatók és az értékek végtelen rendszerei és végtelen sorai helyett véges számu értékrendszerrel és véges összeggel dolgozhatunk. Ezeknek a számát is a kivánt pontosság szabja meg.

A számolás pontosságának ellenőrzésére felhasználjuk a

$$\sum_{i=0}^{\infty} m_{1,i}^{1} = \sum_{i=0}^{\infty} m_{1,i}^{2} = \frac{a_1}{a_1+a_2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} m_{2,i}^{1} = \sum_{i=0}^{\infty} m_{2,i}^{2} = \frac{a_2}{a_1+a_2}$$

egyenleteket.

Irodalom:

[1] P.Gaver: Competitive queueing: idleness probabilities under Priority disciplines, J.R. statist. Soc B, 25, No.2. 489-499, 1963.

[2] G.P. Klimov: Sztochaszticseszkie szisztemü obszluzsiványija, Moszkva, Izdatyelsztvo, Nauka, 1966.

Summary

Two kinds of Poisson flows arrive to a device of service. The device must switch over when beginning with the service of the second type after having served the first type. Times of switching over and service are independent and may be arbitrarily distributed. The paper proves the ergodicity of the Markov chain characteristic of the system, gives an equation for the generator function of the state probabilities and solves them in a special case. It raises also the question of the optimalization of the rule of switching over.