

Néhány újabb stabilitáselméleti eredményről
/Ajzerman egy sejtésének bizonyítása./

Frey Tamás

1.§. Bevezetés

A modern szabályozástechnika nagy jelentőségűvé tette a differenciálegyenlet-rendszerek megoldásaival kapcsolatos, Ljapunov-értelmenben vett stabilitás-vizsgálatokat. A gyakorlati alkalmazások szempontjából különösen fontosnak látszanak Ajzerman vizsgálatai, aki először foglalkozott olyan szabályozókörök stabilitásával, amelyek jelfogókat, ill. diódás kapcsolóelemeket is tartalmaznak. A probléma döntő jelentőségűnek mondható a nemlineáris elemeket is tartalmazó szabályozókörök általános elmélete szempontjából, mert a nemlineáris elemek karakterisztikái törtvonalal jól approximálhatók, ez utóbbiak pedig olyan elemekkel realizálhatók, amelyeket kapcsolóelemekből és lineáris karakterisztikájú elemekből építhetünk fel. A legegyszerűbb strukturájú - egyetlen kapcsolóelemet, resp. nemlineáris elemet is tartalmazó - szabályozóköröket Ajzerman az alábbi strukturájú differenciálegyenlet-rendszerrel írta le:

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + f(x_n) \quad /1/$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

Az $f(x_k)$ függvényről Ajzerman feltette, hogy két lineáris függvénnyel "behatárolható", azaz kielégít egy

$$Q_1 x_k \leq f(x_k) \leq Q_2 x_k \quad /2/$$

tipusu egyenlőtlenséget, emellett a Lipschitz-feltételt is /unicitás/, végül azt is, hogy az

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^n Q_{1j} x_j + Q_{1k} x_k \quad ; \quad \dot{x}_2 = \sum_{j=1}^n Q_{2j} x_j \quad (i=2, \dots, n) \quad /3/$$

differentiálegyenlet-rendszer $\underline{x} = \underline{0}$ megoldása asszimptotikusan stabilis $t \rightarrow \infty$ esetén, ha csak $Q \in (A_1, A_2)$ és $[Q_1, Q_2] \subset (A_1, A_2)$ is teljesül. /L. pl. [1] ./ Ajzerman mármost úgy vélte, hogy a tett feltevések mellett az /1/ alatti rendszer $\underline{x} = \underline{0}$ megoldása is asszimptotikusan stabilis, e sejtést azonban csak $n=2$ esetén tudta igazolni.

Az alábbiakban mi általános stabilitáselméleti eredményeket ismertetünk, amelyek révén, a sok kapcsolóelemet és nemlineáris részrendszereket is tartalmazó szabályozókörök stabilitására tudunk következtetni. Az Ajzerman által sejtett tétel igazolása - az eredetinel sokkal általánosabb fogalmazásban - az igazolt tételek alapján könnyen adódik.

A 2. §-ban a kitűzött programnak megfelelően a perturbált lineáris rendszerek stabilitásával foglalkozunk. Az így adódó eredmények alapján Cesari egy stabilitáselméleti tételét (l. pl. [2], [3], ill. [4], ill. ennek Bihari által adott általánosítását) is lényegesen élesíteni fogjuk. A 3. §-ban olyan lineáris rendszerekkel foglalkozunk, amelyeknél az együttható mátrixok szakaszonként állandók; az adódó tétel több korolláriumát ismertetjük. Végül a 4. §-ban - lényegesen általánosított formában - bebizonyítjuk Ajzerman sejtését.

2.§. Perturbált lineáris, ill. majdnem lineáris rendszerek stabilitása.

Jónéhány eredmény ismeretes az

$$\dot{\underline{x}} = [\underline{A}(t) + \underline{B}(t)] \underline{x} \quad /4/$$

lineáris rendszer megoldásainak asszimptotikus viselkedéséről, ha az

$$\dot{\underline{y}} = \underline{A}(t) \underline{y} \quad /5/$$

lineáris rendszer megoldásai ismeretek, és vagy majorálhatók és minorálhatók is egy-egy exponenciális függvényvel, vagy pedig $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \text{tr}(\underline{A}(\tau)) d\tau > -\infty$ érvényes. Az alábbiakban egy olyan tételt igazolunk, amelyben a /4/ és /5/

rendszer megoldásainak asszimptotikus összehasonlítása során csak azt tesszük fel, hogy $\underline{A}$ és $\underline{B}$ minden véges intervallumon integrálhatók.

1. tétel. Az /5/ egyenlet egy alaprendszerét $\underline{Y}(t)$ -vel, /4/-ét pedig $\underline{X}(t)$ -vel jelölve, érvényes a két alaprendszer asszimptotikus viselkedését jellemző

$$\|\underline{X}^{-1}(t) \underline{Y}(t) - \underline{E}\| \leq \int_{t_0}^t \|\underline{B}(\tau)\| d\tau \cdot \exp \int_{t_0}^t \|\underline{B}(\tau)\| d\tau \quad /6/$$

ill.

$$\|\underline{Y}^{-1}(t) \underline{X}(t) - \underline{E}\| \leq \int_{t_0}^t \|\underline{B}(\tau)\| d\tau \cdot \exp \int_{t_0}^t \|\underline{B}(\tau)\| d\tau \quad /7/$$

reláció, ha $\underline{X}(t_0) = \underline{Y}(t_0)$ teljesül, ahol $\|\cdot\|$ olyan - egyébként tetszőleges - mátrixnormát jelöl, amely invariáns a hasonlósági transzformációra. Ha emellett $\int_{t_0}^{\infty} \|\underline{B}(\tau)\| d\tau < \infty$ is teljesül, akkor minden $\underline{Y}(t)$ -hez található olyan $\underline{X}^{(0)}(t)$ alaprendszer is, hogy

$$\|\underline{X}^{(0)-1}(t) \underline{Y}(t) - \underline{E}\| \leq 2 \cdot \|\underline{E}\| \cdot \int_t^{\infty} \|\underline{B}(\tau)\| d\tau \quad /8/$$

ill.

$$\|\underline{Y}^{-1}(t) \underline{X}^{(0)}(t) - \underline{E}\| \leq 2 \cdot \|\underline{E}\| \cdot \int_t^{\infty} \|\underline{B}(\tau)\| d\tau \quad /9/$$

is teljesül, ha t már elég nagy.

Bizonyítás: Tekintsük a /4/ egyenletnek megfelelő

$$\dot{\underline{X}} = (\underline{A} + \underline{B}) \underline{X} \quad /10/$$

mátrixegyenletet. Ekkor (10)-et szukcessziv approximációval és az $\underline{X}(t_0) = \underline{Y}(t_0)$ kezdeti feltétellel, az

$$\underline{X}_{n+1}(t) = \underline{Y}(t) + \int_{t_0}^t \underline{Y}(t) \underline{Y}^{-1}(\xi) \underline{B}(\xi) \underline{X}_n(\xi) d\xi \quad /11/$$

iterációs sorozat révén lehet - mint az jólismert - megoldani. Tekintsük tehát a következő transzformációt:

$$\underline{T}(\underline{U}) = \underline{Y}(t) + \int_{t_0}^t \underline{Y}(t) \underline{Y}^{-1}(\xi) \underline{B}(\xi) \underline{U}(\xi) d\xi \quad /12/$$

és a minden véges intervallumon integrálható n -dimenziós kvadratikus mátrixok terében vezessük be az alábbi pszeudotávolságot /1. pl. [5] /:

$$S(\underline{U}, \underline{V}) = \|\underline{Y}^{-1}(t) \{\underline{U}(t) - \underline{V}(t)\}\|$$

ahol $\|\cdot\|$ tetszőleges, olyan mátrixnormát jelöl, amely egyrészt a hasonlósági transzformációra invariáns, másrészt a $\|\underline{C} \cdot \underline{D}\| \leq \|\underline{C}\| \cdot \|\underline{D}\|$ relációt is kielégíti. Emellett nyilván $S \in L$, továbbá $S_1 \leq S_2$ azt jelenti, hogy majdnem mindenütt $S_1(t) \leq S_2(t)$ érvényes.

Ilymódon

$$\begin{aligned} S(\underline{T}(\underline{U}), \underline{T}(\underline{V})) &= \|\underline{Y}^{-1}(t) \int_{t_0}^t \underline{Y}(t) \underline{Y}^{-1}(\xi) \underline{B}(\xi) \{\underline{U}(\xi) - \underline{V}(\xi)\} d\xi\| = \\ &= \left\| \int_{t_0}^t \{\underline{Y}^{-1}(\xi) \underline{B}(\xi) \underline{Y}(\xi)\} \cdot \{\underline{Y}^{-1}(\xi) [\underline{U}(\xi) - \underline{V}(\xi)]\} d\xi \right\| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\underline{Y}^{-1}(\xi) \underline{B}(\xi) \underline{Y}(\xi)\| \cdot S(\underline{U}, \underline{V}) d\xi = \int_{t_0}^t \|\underline{B}(\xi)\| S(\underline{U}, \underline{V}) d\xi \end{aligned} \quad /15/$$

ha $t \geq t_0$. Alkalmazhatjuk tehát az [5] dolgozat 1., 2., ill. 3. tételét, a $P_n \equiv 0$,

$$Q_S = \int_{t_0}^t \| \underline{B}(\xi) \| S(\xi) d\xi \quad /16/$$

továbbá a $v = w_0$, $G_0 = 0$, $\underline{u}_0 = \underline{Y}(t)$ választással. Ekkor

$$\begin{aligned} G_1 = \tau \leq S(u_0, u_1) &= \| \underline{Y}^{-1}(t) \cdot \{ \underline{Y}(t) + \int_{t_0}^t \underline{Y}(t) \cdot \underline{Y}^{-1}(\xi) \underline{B}(\xi) \underline{Y}(\xi) d\xi - \underline{Y}(t) \} \| = \\ &= \| \int_{t_0}^t \underline{Y}^{-1}(\xi) \underline{B}(\xi) \underline{Y}(\xi) d\xi \| \leq \int_{t_0}^t \| \underline{B}(\xi) \| d\xi \end{aligned} \quad /17/$$

Emellett G_∞ a

$$G_\infty = \tau + \int_{t_0}^t \| \underline{B}(\xi) \| G_\infty(\xi) d\xi \quad /18/$$

egyenletet elégíti ki és így a Bellman-lemma alapján

$$G_\infty - G_0 = G_\infty \leq \tau \exp \int_{t_0}^t \| \underline{B}(\xi) \| d\xi \leq \int_{t_0}^t \| \underline{B}(\xi) \| d\xi \exp \int_{t_0}^t \| \underline{B}(\xi) \| d\xi \quad /19/$$

Az [5] dolgozat 2. tétele alapján ilymódon $I(\underline{U})$ -nak egyetlen fixpontja van, amely /12/ alapján kielégíti az

$$\dot{\underline{X}} = (\underline{A} + \underline{B}) \underline{X} ; \quad \underline{X}(t_0) = \underline{Y}(t_0)$$

kezdeti-értékfeladatot, továbbá a 3. tétel szerint

$$S(\underline{X}, \underline{Y}) = S(u_\infty, u_0) = \| \underline{Y}^{-1}(t) \{ \underline{X}(t) - \underline{Y}(t) \} \| \leq G_\infty - G_0 \quad /20/$$

azaz /19/ és /20/ alapján tételünk /7/ alatti állítása valóban teljesül.

Ha mármost $\int_{t_0}^{\infty} \| \underline{B}(\xi) \| d\xi < \infty$ is teljesül, akkor - amint ez /7/-ből leolvasható - t_0 -t elég nagyra választva,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{Y}^{-1} \underline{X} - \underline{E}\|$ tetszőlegesen kicsivé tehető; ha tehát $t, < t_0$ -ban nem az $\underline{X}(t) = \underline{Y}(t)$ relációnak megfelelő alaprendszerből indulunk ki, hanem olyan $\underline{X}^{(0)}(t)$ -ből, amelyre ezen elég nagy t_0 -nál teljesül az $\underline{X}^{(0)}(t_0) = \underline{Y}(t_0)$ egyenlőség, akkor erre $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{Y}^{-1} \underline{X}^{(0)} - \underline{E}\|$ tetszőlegesen kicsi. Megfelelő $\underline{X}^{(0)}$ alaprendszerre biztosítható tehát a $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{Y}^{-1} \underline{X}^{(0)} - \underline{E}\| = 0$ reláció is. Ezen $\underline{X}^{(0)}$ alaprendszer és $\underline{Y}^{-1}$ szorzata - a szereplő improprius integrál /20/ szerinti konvergenciája miatt - kielégíti az

$$\begin{aligned} \underline{Y}^{-1}(t) \underline{X}^{(0)}(t) &= \underline{E} - \int_t^\infty \underline{Y}^{-1}(\xi) \underline{B}(\xi) \underline{X}^{(0)}(\xi) d\xi = \\ &= \underline{E} - \int_t^\infty \{ \underline{Y}^{-1}(\xi) \underline{B}(\xi) \underline{Y}(\xi) \} \{ \underline{Y}^{-1}(\xi) \underline{X}^{(0)}(\xi) \} d\xi \end{aligned} \quad /21/$$

relációt, és így

$$\begin{aligned} \|\underline{Y}^{-1}(t) \underline{X}^{(0)}(t) - \underline{E}\| &\leq \int_t^\infty \|\underline{B}(\xi)\| \cdot \|\underline{Y}^{-1}(\xi) \underline{X}^{(0)}(\xi)\| d\xi < \\ &< 2 \|\underline{E}\| \int_t^\infty \|\underline{B}(\xi)\| d\xi \end{aligned} \quad /22/$$

hacsak t már elég nagy, hiszen ekkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{Y}^{-1} \underline{X}^{(0)} - \underline{E}\| = 0$ és így elég nagy t -re $\|\underline{Y}^{-1} \underline{X}^{(0)}\| < 2 \|\underline{E}\|$

Ezzel tételünk /9/ alatti állítását is igazoltuk. A másik két reláció egyszerű szerepcserével, ti. az $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$, $\underline{A} = \underline{C} - \underline{B}$ jelölések bevezetése révén azonnal adódik.

2. tétel. Tekintsük most az előző tétel feltételei mellett az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x} + \underline{B}(t)\underline{\varphi}(\underline{x}) \quad /23/$$

differentiálegyenletet, ahol $\underline{\varphi}(\underline{x})$ olyan, $\underline{x}$ -ben folytonos és $\|\underline{x}\| > 0$ -ra Lipschitz-feltételt kielégítő függvény, amelyre $\underline{\varphi}(0) = 0$, továbbá a szigorúan monoton, folytonos és konkáv $\omega(t)$ -vel, amelyre $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\omega(\xi)} d\xi$ létezik és véges, kielégíti az

$$\omega(t) \leq \max_{\|\underline{x}\| \leq t} \|\underline{\varphi}(\underline{x})\| \quad /24/$$

relációt. Ezen esetben az $\underline{X}(t_0) = \underline{Y}(t_0)$ relációt kielégítő alaprendszer a /23/ egyenletnek kielégíti az

$$\|\underline{Y}^{-1}(t)\underline{X}(t) - \underline{E}\| \leq \Omega^{-1}\left\{\Omega\left(\int_{t_0}^t \|\underline{B}(\xi)\| d\xi\right) + \int_{t_0}^t \|\underline{B}(\xi)\| d\xi\right\} \quad /25/$$

relációt, ahol

$$\Omega(u) = \int_0^u \frac{d\xi}{\omega(\xi)} \quad /26/$$

$\Omega^{-1}(v)$ pedig $\Omega(u)$ inverze.

Ha $\int_{t_0}^{\infty} \|\underline{B}(\xi)\| d\xi < \infty$, akkor létezik olyan $\underline{X}^{(0)}(t)$ alaprendszer, amelyre

$$\|\underline{Y}^{-1}(t)\underline{X}^{(0)}(t) - \underline{E}\| \rightarrow 0, \quad \text{ha } t \rightarrow \infty \quad /27/$$

E tétel bizonyítása az előző tétel gondolatmenetét követi, csak az [5] dolgozat 1^{**} , 2^{**} ill. 3^{**} tételét, ill. a Bellmann-lemma Bihari-féle általánosítását /l. pl. [6] ill. [7] / kell felhasználnunk.

A kapott eredményt a Cesari-féle asszimptotikus tétel, ill. annak Bihari-féle általánosítása, élesítésére használjuk /l. pl. [4] ill. [6] /; az egyszerűség kedvéért a [4] -ben szereplő jelöléseket használjuk. Tekintsük tehát a

$$\dot{z} = (\underline{A} + \underline{V}(t))z + \underline{R}(t)\psi(z) \quad /28/$$

differentiálegyenletet, ahol $\underline{V}(t) \rightarrow \underline{0}$, ha $t \rightarrow \infty$ továbbá $\text{Var}_{(t_0, \infty)}(\|\underline{V}(t)\|) < \infty$ és $\int_{t_0}^{\infty} \|\underline{R}(\xi)\| d\xi < \infty$ teljesül. Jelöljük az $\underline{A}$ mátrix sajátértékeit λ_k -val, az $\underline{A} + \underline{V}(t)$ mátrix megfelelő sajátértékeit pedig $\lambda_k(t)$ -vel $k=1, 2, \dots, n$; a sajátértékek nem szükségképp egyszeresek.

3. tétel. A tett feltevések mellett minden k -hoz található olyan $\underline{z}_k$ megoldása a /28/ egyenletnek, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{z}_k(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\xi) d\xi} = \underline{s}_k \quad /29/$$

ahol $\underline{A}\underline{s}_k = \lambda_k \underline{s}_k$, azaz $\underline{s}_k$ az $\underline{A}$ -nak λ_k -hoz tartozó sajátvektora. Ha λ_k többszörös sajátértéke $\underline{A}$ -nak, akkor $\underline{s}_k^{(1)}, \underline{s}_k^{(2)}, \dots$ stb. jelöljék a megfelelő másod-, harmad-, stb. fővektorokat. Található ekkor min-

den szóba jövő i -hez olyan $\underline{z}_k^{(i)}$ megoldás is, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{i-1}} \left[\underline{z}_k^{(i)} \exp \left(- \int_t^t \lambda_k^{(i)}(\xi) d\xi \right) - \underline{s}_k^{(i)} \right] = 0 \quad /30/$$

teljesül.

Bizonyítás: Alapgondolatában követhetjük a Cesari-tétel [4]-ben, ill. általánosításának [7]-ben található bizonyítását. Lényeges eltérés egyfelől az, hogy az 1. tételre támaszkodva elhagyhatjuk az $\underline{A}$ sajátértékeinek egyszeres voltával kapcsolatos kikötést, hasonlóképp az $\underline{A} + \underline{V}(t)$ -nek a t -től függő sajátértékeivel kapcsolatos megkötéseket; ezért az $\underline{A} + \underline{V}(t)$ transzformációban szereplő $\underline{S}(t)$ mátrix korlátos variációjú voltát is [4]-től eltérően kell kimutatnunk. A $\underline{V}(t) \rightarrow 0$ feltételből következik, hogy $\underline{A}$ egyszeres sajátértékeihez egyértelműen hozzá lehet rendelni t elég nagy értékeinél $\underline{A} + \underline{V}(t)$ ugyancsak egyszeres sajátértékeit, amelyek $t \rightarrow \infty$ esetén $\underline{A}$ megfelelő sajátértékeihez konvergálnak. A többszörös sajátértékeihez viszont még akkor is csak egy sajátvektort és megfelelő számú fővektort rendelünk hozzá, ha a szóbanforgó sajátérték $\underline{A}$ minimál polinomjában egyszeres multiplicitású, mert $\underline{A} + \underline{V}(t)$ minimálpolinomjában t -től függően változhat a megfelelő sajátérték multiplicitása, sőt t -től

függően hasadhat szét, ill. olvadhat össze a megfelelő sajátértékcsoport. Ezért $\underline{A}$ -nak az l -szeres multiplicitásu

λ_j sajátértékéhez a transzformációs részmatrixot úgy rendeljük hozzá, hogy a $\underline{T}^{(j)} \underline{A} \underline{T}^{(j)-1}$ matrixnak megfelelő l -dimenziós blokk, $\underline{\Lambda}^{(j)}$ strukturája

$$\begin{bmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_j & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{bmatrix}$$

alaku legyen, függetlenül attól, hogy λ_j hány-szoros multiplicitásu $\underline{A}$ minimálpolinomjában. Ugyanilyen alakban állítjuk elő t valamilyen elég nagy, rögzített t_0 értékénél $\underline{A} + \underline{V}(t)$ transzformáltját is, jöllehet a megfelelő $\underline{s}^{(j)} (\underline{A} + \underline{V}(t)) \underline{s}^{(j)-1}$ l dimenziós hiperblokkja, $\underline{\Lambda}^{(j)}(t)$ melynek strukturája eszerint

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^{(1)}(t) & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_j^{(2)}(t) & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \lambda_j^{(l)}(t) \end{bmatrix}$$

esetleg csupa különböző sajátértéket tartalmaz. Minden-esetre $\underline{s}^{(j)}(t)$ megfelelő megválasztása esetén biztosítható, hogy $\underline{V}(t)$ minden folytonossági pontjában $\underline{s}^{(j)}(t)$ is, $\lambda_j^{(r)}(t)$ is folytonos legyen, továbbá a $\underline{V}(t) \rightarrow \underline{0}$ feltétel miatt $\underline{s}^{(j)}(t) \rightarrow \underline{T}^{(j)}$ és $\lambda_j^{(r)}(t) \rightarrow \lambda_j$

is teljesüljön. A transzformáció végrehajtása esetén - az $\underline{S}^{-1}(t) \cdot \underline{Z}(t) = \underline{X}(t)$ változót bevezetve - differenciálegyenletünk az

$$\begin{aligned} \dot{\underline{X}} = & \underline{A}(t) \underline{X} + \frac{d\underline{S}}{dt} \underline{S}^{-1} \underline{X} + \\ & + \underline{S}(t) \underline{R}(t) \underline{S}^{-1}(t) \cdot \underline{\varphi}(\underline{S}^{-1}(t) \cdot \underline{X}(t)) \end{aligned} \quad /31/$$

egyenletbe megy át. A továbbiakban elsősorban azzal kell foglalkoznunk, hogy hogyan lehet $\underline{S}(t)$ -t $\underline{V}(t)$ szakadási pontjaiban egyértelműen definiálni, továbbá $\left\| \frac{d\underline{S}}{dt} \right\|$ -t $\left\| \frac{d\underline{V}}{dt} \right\|$ -vel, resp. $\text{Var}(\|\underline{S}(t)\|)$ -t $\text{Var}(\|\underline{V}(t)\|)$ -vel becsülni.

Ezekre a kérdésekre a [8] dolgozatban szereplő perturbációs tételek alapján lehet válaszolni. A $\underline{V}(t) \rightarrow \underline{0}$ reláció következtében ugyanis található olyan t_0 , hogy [8] 1. tétele, ill. annak a 4. pontban többszörös sajátértékekre vonatkozó általánosítása alkalmazható, azaz $t_1 > t_0$ és $t_2 > t_0$ esetben $\underline{A} + \underline{V}(t_2)$ sajátértékei és saját - ill. fővektorai perturbációval $\underline{A}$ -ból is, $\underline{A} + \underline{V}(t_1)$ -ből is származtathatók. Így $\underline{S}(t)$ elemei - épp e perturbációs tételek alapján - $\underline{V}(t)$ ugráshelyein is egyértelműen folytathatóak. Emellett az idézett tételek szerint $t > t_0$

esetben érvényes a

$$\text{Var} (\| \underline{s}(t) \|) \leq \frac{1}{1-q} \text{Var} (\| \underline{V}(t) \|) \quad /32/$$

ill. a

$$\text{Var} (|\lambda_i^{(j)}(t)|) \leq \frac{1}{1-q_i} \text{Var} (\| \underline{V}(t) \|) \quad /33/$$

reláció is, ahol - ha t_0 már elég nagy -

$$\begin{aligned} 0 < q = q(t_0) = q \left(\sup_{t \geq t_0} \| \underline{V}(t) \| \right) < 1 \\ \text{és} \\ 0 < q_i = q_i(t_0) = q_i \left(\sup_{t \geq t_0} \| \underline{V}(t) \| \right) < 1 \end{aligned} \quad /34/$$

teljesül.

Minthogy emellett t_0 elég nagy értékére $\| \underline{s}(t) \| \leq 2 \| \underline{I} \|$ és $\| \underline{s}^{-1}(t) \| \leq 2 \| \underline{I}^{-1} \|$ is érvényes, azért /31/ jobboldalának második tagjában $\underline{x}$ együttthatója kielégíti az 1. tétel feltételeit.

Hasonlóképp /31/ jobboldalának harmadik tagjában ψ együttthatója is kielégíti a 2. tétel feltételeit, hogy itt ψ argumentumában $\underline{x}$ helyett $\underline{s}(t)\underline{x}$ szerepel, az nem gátolja a 2. tétel alkalmazhatóságát - amint ezt Bihari [7] -ben igazolta. Alkalmazhatjuk tehát az 1. ill. a 2. tételt. Ilymódon $\underline{A}$ egyszeres sajátértékeivel kapcsolatban a /29/ reláció közvetlenül adódik. A /30/ relációt illető-

en meg kell gondolnunk, hogy az 1. tétel alkalmazása szempontjából alapul választott,

$$\dot{y} = \underline{\underline{\Lambda}}(t) y$$

differentiálegyenlet megfelelő megoldásában aszerint szerepel az $\exp\left\{\int_{t_0}^t \lambda_k^{(r)}(\xi) d\xi\right\}$ alakú tagok ($r=1,2,\dots,i$) lineáarkombinációja, ill. ilyenek és t -nek i -nél nem nagyobb hatványainak szorzatai, ahogy $\int_{t_0}^t \lambda_k^{(r_1)}(\xi) d\xi \neq \int_{t_0}^t \lambda_k^{(r_2)}(\xi) d\xi$ fennáll, ill. sem /33/-ból azonban azonnal következik, hogy az egyes $\exp\int_{t_0}^t \lambda_k^{(r)}(\xi) d\xi$ alakú tagok hányadosa két pozitív korlát közé szorítható minden $t \geq t_0$ -ra, és így az $\frac{1}{t^i}$ -vel szorzott kifejezés mindegyik lehetséges esetben zérushoz tart. Ezzel a tételt igazoltuk.

Annyit kell megjegyeznünk befejezésül, hogy a többszörös sajátértékekkel kapcsolatos /30/ reláció sokkal pontatlábbul jellemzi $\underline{z}_k^{(i)}$ asszimptotikus viselkedését, mint /29/- $\underline{z}_k$ -ét, $\underline{z}_k^{(i)}$ nagyságrendi viselkedése azonban csak akkor marad bizonytalan /30/ alapján, ha a $\operatorname{Re}\{\lambda_k^{(i)}(t)\} \rightarrow 0$ esettel állunk szemben.

3. §. Szakaszonként állandó rekurrens együtthatóju differenciálegyenletek megoldásainak asszimptotikus vizsgálata

Tekintsük először az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t) \underline{x} \quad /35/$$

lineáris differenciálegyenletet, és tegyük fel, hogy az egymáshoz csatlakozó (t_i, t_{i+1}) intervallumokon $(i=0,1,2,\dots)$ $\underline{A}(t)$ felváltva a $\underline{B}$ ill. $\underline{C}$ mátrixszal egyenlő. Jólismert az a tény, hogy a /35/ egyenlet $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldásának asszimptotikus stabilitását nem biztosítja (általános) integrálható $\underline{A}(t)$ együtthatómátrix esetén az a követelmény, hogy $\underline{A}(t)$ mindegyik sajátértéke minden t -re negatív valós részű. (Egyszerű ellenpélda pl. az $\dot{x}_1 = -ix_1$; $\dot{x}_2 = e^{2i} x_1 - 2x_2$ differenciálegyenletrendszer.) Igazoljuk azonban az alábbi

4. tétel-t: Ha $\underline{B}$ és $\underline{C}$ minden sajátértéke negatív valós részű (és $\underline{A}(t) = \underline{B}$, ha $t \in (t_{2i}, t_{2i+1})$ ill. $\underline{A}(t) = \underline{C}$ ha $t \in (t_{2i+1}, t_{2i+2})$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) akkor a /35/ differenciálegyenlet $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldása asszimptotikusan stabil.

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy $\underline{B}$ és $\underline{C}$ minimálpolinomjában minden sajátérték egyszeres multiplicitású.

Jelöljük $\underline{B}$ sajátértékeit (esetleges multiplicitásukkal számlálva) β_j -vel ($j=1,2,\dots,n$), a hozzájuk tartozó jobboldali sajátvektorokat $\underline{b}_j$ -vel, hasonlóképp $\underline{C}$ sajátértékeit ill. sajátvektorait γ_j resp. $\underline{c}_j$ -vel ($j=1,2,\dots,n$). A (t_{2i}, t_{2i+1}) intervallumon bontsuk fel $\underline{x}(t)$ -t a $\underline{b}_j$ -k-kel párhuzamos, hasonlóképp a (t_{2i+1}, t_{2i+2}) intervallumon a $\underline{c}_j$ -kkel párhuzamos komponensekre:

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^n \xi_j \underline{b}_j \quad (\text{ha } t \in (t_{2i}, t_{2i+1})) \quad /36/$$

resp.

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^n \eta_j \underline{c}_j \quad (\text{ha } t \in (t_{2i+1}, t_{2i+2}))$$

A megoldásnak az intervallumok határpontjain folytonosan kell átmennie, azaz minden k -ra fenn kell állnia a

$$\underline{x}(t_k-0) = \underline{x}(t_k+0) ; \quad \sum_{j=1}^n \xi_j(t_k) \underline{b}_j = \sum_{j=1}^n \eta_j(t_k) \underline{c}_j \quad (k=0,1,\dots) \quad /37/$$

relációnak. Minthogy a $\underline{b}_j$ és $\underline{c}_j$ vektorrendszer teljes és független, a $\xi_j(t_k)$ -k az $\eta_j(t_k)$ lineáris kombinációiként állíthatók elő (egy nem szinguláris $\underline{T}$ transzformációs mátrix segítségével, a $\underline{\xi}(t_k) = \underline{T} \underline{\eta}(t_k)$

alakban), és viszont

$$\underline{\eta}(t_k) = \underline{I}^{-1} \underline{\xi}(t_k) \quad /38/$$

Mint hogy a $\underline{b}_j$ vektorok $\underline{B}$, a $\underline{c}_j$ -k pedig $\underline{C}$ sajátvektorai, azért a megfelelő intervallumon $\int$ ill. $\underline{\eta}$ kielégíti a

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\xi}} &= \underline{\Delta}(\underline{B}) \underline{\xi} \\ \dot{\underline{\eta}} &= \underline{\Delta}(\underline{C}) \underline{\eta} \end{aligned} \quad /39/$$

differentiálegyenletet, ahol $\underline{\Delta}(\underline{B}) = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$; $\underline{\Delta}(\underline{C}) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$

Ha tehát $t_0 + 0$ -ban, $\underline{x}(t_0) = \xi_{1,0} \underline{b}_1 + \dots + \xi_{n,0} \underline{b}_n$ azaz

a $\underline{\xi}_0 = \underline{\xi}(t_0)$ vektorral van meghatározva, akkor
 $t \in (t_0 + 0, t_1 - 0)$ -ban

$$\underline{\xi}(t) = \exp\{(t - t_0) \underline{\Delta}(\underline{B})\} \underline{\xi}_0 \quad /40/$$

Emellett /38/ szerint

$$\begin{aligned} \underline{\eta}(t_1 + 0) &= \underline{I}^{-1} \underline{\xi}(t_1 - 0) = \\ &= \underline{I}^{-1} \exp\{(t_1 - t_0) \underline{\Delta}(\underline{B})\} \underline{\xi}_0 \end{aligned} \quad /41/$$

Igy tehát $t \in (t_1 + 0, t_2 - 0)$ -ban

$$\underline{\eta}(t) = \exp\{(t_1 - t_0) \underline{\Delta}(\underline{C})\} \underline{I}^{-1} \cdot \exp\{(t_1 - t_0) \underline{\Delta}(\underline{B})\} \underline{\xi}_0 \quad /42/$$

Altalában is $t \in (t_{2i}+0, t_{2i+1}-0)$ esetén

$$\underline{\xi}(t) = \exp\{(t-t_{2i})\underline{\Delta}(\underline{B})\}\underline{T} \cdot \exp\{(t_{2i}-t_{2i-1})\underline{\Delta}(\underline{C})\}\underline{T}^{-1} \cdot \quad /43/$$

$$\cdot \exp\{(t_{2i-1}-t_{2i-2})\underline{\Delta}(\underline{B})\}\underline{T} \cdots \underline{T}^{-1} \exp\{(t_1-t_0)\underline{\Delta}(\underline{B})\}\underline{\xi}_0.$$

és hasonlóan $t \in (t_{2i+1}+0, t_{2i+2}-0)$ esetén

$$\underline{\eta}(t) = \exp\{(t-t_{2i+1})\underline{\Delta}(\underline{C})\}\underline{T}^{-1} \cdots \underline{T}^{-1} \exp\{(t_1-t_0)\underline{\Delta}(\underline{B})\}\underline{\xi}_0. \quad /44/$$

$\underline{T}^{\frac{1}{2}}$ -del jelölve a nemszinguláris $\underline{T}$ (pozitív) négyzetgyökét, $\underline{T}^{-\frac{1}{2}}$ -del pedig ennek reciprokát, bevezetjük a

$$\underline{T}^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\{(t_{2i+1}-t_{2i})\underline{\Delta}(\underline{B})\}\underline{T}^{\frac{1}{2}} = \underline{\xi}_{2i}(\underline{B}) \quad /45/$$

ill.

$$\underline{T}^{\frac{1}{2}} \exp\{(t_{2i}-t_{2i-1})\underline{\Delta}(\underline{C})\}\underline{T}^{-\frac{1}{2}} = \underline{\xi}_{2i}(\underline{C}) \quad /46/$$

jelöléseket. Ezekkel /43/ ill. /44/ így írható fel:

$$\underline{\xi}(t) = \exp\{(t-t_{2i})\underline{\Delta}(\underline{B})\}\underline{T}^{\frac{1}{2}} \cdot \underline{\xi}_{2i}(\underline{C}) \cdot \underline{\xi}_{2i-2}(\underline{B}) \cdot \quad /47/$$

$$\cdot \underline{\xi}_{2i-2}(\underline{C}) \cdots \underline{\xi}_0(\underline{B})\underline{T}^{-\frac{1}{2}}\underline{\xi}_0.$$

resp.

$$\underline{\eta}(t) = \exp\{(t-t_{2i+1})\underline{\Delta}(\underline{C})\}\underline{T}^{-\frac{1}{2}} \cdot \underline{\xi}_{2i}(\underline{B}) \cdot \underline{\xi}_{2i}(\underline{C}) \cdot \quad /48/$$

$$\cdot \cdots \underline{\xi}_0(\underline{B})\underline{T}^{-\frac{1}{2}}\underline{\xi}_0.$$

Tekintsük mármost egy ugyanolyan tulajdonságu mátrixnormát, mint a 2. §-ban, ill. egy vele kompatibilis vektornormát. Ekkor

$$\| \underline{\underline{\xi}}_{2i}(\underline{\underline{B}}) \| = \| \exp(t_{2i+1} - t_{2i}) \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{B}}) \| \quad /49/$$

és

$$\| \underline{\underline{\xi}}_{2i}(\underline{\underline{C}}) \| = \| \exp(t_{2i} - t_{2i-1}) \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{C}}) \| \quad /50/$$

lévén a mátrixnorma invariáns a hasonlósági transzformációra. Ily módon tehát

$$\begin{aligned} \| \underline{\underline{\xi}}(t) \| &\leq \| \underline{\underline{T}}^{\frac{1}{2}} \| \cdot \| \underline{\underline{T}}^{-\frac{1}{2}} \| \cdot \| \exp[(t - t_{2i}) \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{B}})] \| \cdot \| \underline{\underline{\xi}}_0 \| \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{s=1}^i \{ \| \underline{\underline{\xi}}_{2s}(\underline{\underline{B}}) \| \cdot \| \underline{\underline{\xi}}_{2s}(\underline{\underline{C}}) \| \} = \quad /51/ \\ &= \| \underline{\underline{T}}^{-\frac{1}{2}} \| \cdot \| \underline{\underline{T}}^{\frac{1}{2}} \| \cdot \| \underline{\underline{\xi}}_0 \| \cdot \| \exp(t - t_i) \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{B}}) \| \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{s=1}^i \| \exp(t_{2s+1} - t_{2s}) \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{B}}) \| \cdot \| \exp(t_{2s} - t_{2s-1}) \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{C}}) \| \end{aligned}$$

Hasonlóképp

$$\begin{aligned} \| \underline{\underline{\eta}}(t) \| &\leq \| \underline{\underline{T}}^{-\frac{1}{2}} \|^2 \cdot \| \underline{\underline{\xi}}_0 \| \cdot \| \exp(t - t_{2i+1}) \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{C}}) \| \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{s=1}^i \| \exp(t_{2s} - t_{2s-1}) \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{C}}) \| \cdot \| \exp(t_{2s-1} - t_{2s-2}) \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{B}}) \| \quad /52/ \end{aligned}$$

és /51/-ből és /52/-ből állításunk azonnal leolvasható.

Amennyiben $\underline{B}$ ill. $\underline{C}$ egyes sajátértékei a minimálpolinomban többszörös multiplicitásuak, akkor gondolatmenetünket mindössze annyit kell változtatnunk, hogy a megfelelő fővektorokat használjuk az előállításban a sajátvektorok helyett, továbbá, hogy ekkor $\underline{\Lambda}(\underline{B})$, resp. $\underline{\Lambda}(\underline{C})$ nem diagonálmátrix, hanem Jordan-mátrix. Amennyiben azonban $\underline{B}$ és $\underline{C}$ valamennyi sajátértéke negatív valós részű, a tétel következtetése a kevésbé összevont alakból, ti. a /49/ ill. /50/ alatti kifejezések szorzatából is azonnal levonható. Ezzel tételünket igazoltuk.

Könnnyen belátható, hogy tételünk, sőt a bizonyítás gondolatmenete átvihető arra az általánosabb esetre is, amikor $\underline{A}(t)$ intervallumról intervallumra ismétlődően a $\underline{B}_1, \underline{B}_2, \dots, \underline{B}_k$ sorozat soronkövetkező elemével egyenlő. Mindössze annyit kell változtatni a bizonyításon, hogy $\underline{B}_2$ -ről $\underline{B}_3$ -ra áttérve, a transzformációs mátrixot $\underline{T}_2 \cdot \underline{T}_1^{-1}$ alakban, $\underline{B}_3$ -ról $\underline{B}_4$ -re áttérve $\underline{T}_3 \cdot \underline{T}_2^{-1}$ alakban, stb. kell előállítani, végül $\underline{B}_k$ -ről $\underline{B}_1$ -re visszatérve, így a $\underline{T}_1 \cdot \underline{T}_k^{-1}$ transzformációs mátrix adódik ($\underline{T}_1$ itt azt a mátrixot jelöli, amelyet a $\underline{B}_1$ -ről $\underline{B}_2$ -re való áttérésnél használunk). Érvényes tehát az

5. tétel. Ha a /35/ differenciálegyenlet $\underline{A}(t)$ együtt-
ható mátrixa az egymáshoz csatlakozó (t_i, t_{i+1}) in-
tervallumokon rendre a ciklikusan ismétlődő állandókból
álló $\underline{B}_1, \underline{B}_2, \dots, \underline{B}_k, \underline{B}_1, \dots$ sorozat megfelelő elemével egyen-
lő és e sorozat minden mátrixának mindegyik sajátértéke
negatív valós részű, akkor a /35/ egyenlet $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldása asszimptotikusan stabil $(t_i \leq t_{i+1})$.

Megemlítjük végül, hogy - és ez (51)-(52)-ből azonnal
leolvasható, - az $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldás Ljapunov-stabilitását,
sőt megfelelő kombináció esetén asszimptotikus stabilitá-
sát is biztosítani tudjuk, ha egyes sajátértékek valós
része zérussal egyenlő, sőt - a részintervallumokra vonat-
kozó megfelelő kikötések mellett - még akkor is, ha egyes
sajátértékek pozitív valós részűek. Így pl. abban az eset-
ben, amikor a /35/ egyenlet $\underline{A}(t)$ együttthatómátrixa periódus-
dikus és Riemann-integrálható, elég finom felosztásban sza-
kaszonként állandó mátrix-sorozattal közelítve azonnal be-
látható a

6. tétel érvényessége: Legyen a /35/ egyenlet $\underline{A}(t)$ együtt-
thatómátrixa T periódusu, Riemann-integrálható függvény.
Jelöljék ennek t -től függő sajátértékeit a $\lambda_j(t)$

függvények. Amennyiben érvényes a

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sup_{j(\xi)} \operatorname{Re} \{ \lambda_j(\xi) \} d\xi < 0 \quad /53/$$

reláció, akkor a /35/ egyenlethez tartozó valamennyi karakterisztikus exponens is negatív valós részű, azaz az $\underline{x} \equiv 0$ megoldás asszimptotikusan stabil.

Megemlítjük azt is - és ez is leolvasható 4. tételünk bizonyításából - hogy $\int_{t_0}^{t_0+T} \sup_j \operatorname{Re} \lambda_j d\xi$ egy felső korlátja a megfelelő karakterisztikus exponens valós részének.

4. §. Ajzerman sejtésének bizonyítása.

Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}} = [\underline{A} + \underline{B}(\underline{x}) + \underline{C}(\underline{x})] \underline{x} + \underline{D}(\underline{x}) \underline{\psi}(\underline{x}) \quad /54/$$

differentiálegyenletet, ahol $\underline{A}$ állandó mátrix, $\underline{B}(\underline{x})$ is állandó mindaddig, amíg $\underline{x}$ egyik komponense se vált előjelet, ilyen előjelváltozásoknál viszont ugrásszerűen változik, de úgy, hogy a $\underline{B}(\underline{x}) \cdot \underline{x}$ szorzat Lipschitz-feltételt elégít ki. $\underline{C}(\underline{x})$ olyan mátrix, amely $\underline{x}(t) \in L$; $\|\underline{x}\| \leq \exp\{-\varepsilon t\}$, $\varepsilon > 0$ feltétel mellett valamely rögzített t_0 -tól (pl. $t_0 = 0$ -tól) kielégíti a

$$\int_0^t \|\underline{C}(\underline{x}(t))\| dt \leq t^{v(\varepsilon)}, \quad \text{ahol } v < 1, \text{ ha } \varepsilon > 0 \quad /55/$$

feltételt és hasonló feltétel vonatkozik $\underline{D}(\underline{x})$ -re is, azzal az eltéréssel, hogy $\underline{x}(t) \in L$, $\|\underline{x}\| \leq \exp\{-\varepsilon t\}$ mellett legyen

$$\int_0^\infty \|\underline{D}(\underline{x}(t))\| dt < \infty \quad /56/$$

Végül a $\underline{C}(\underline{x}) \cdot \underline{x} + \underline{D}(\underline{x}) \underline{\psi}(\underline{x})$ szorzat elégítsen ki egy

$$\begin{aligned} \|\underline{C}(\underline{x}_2) \underline{x}_2 + \underline{D}(\underline{x}_2) \underline{\psi}(\underline{x}_2) - \underline{C}(\underline{x}_1) \underline{x}_1 - \underline{D}(\underline{x}_1) \underline{\psi}(\underline{x}_1)\| \leq \\ \leq k \psi(\|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\|) \end{aligned} \quad /57/$$

tipusu feltételt, ahol ψ folytonos, monoton növekvő konkáv függvény a $\psi(0)=0$ feltétellel, amelyre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{d\xi}{\psi(\xi)} < \infty \quad /58/$$

továbbá $\underline{\psi}(\underline{x})$ önmaga is elégítsen ki egy ilyen típusu feltételt.

Végül feltesszük, hogy $\underline{C}$ és $\underline{D}$ minden $\underline{x}$ -re korlátosak.

Azonnal látható, hogy az /55/-/58/ feltételek mellett /54/ speciális esetként tartalmazza az /1/-/3/ problémát, ha még azt is feltesszük, hogy tetszőleges $\underline{x}(t) \in C$; $\|\underline{x}(t)\| \leq k$,

mellett az $\underline{A}$ és az $\underline{A} + \underline{B}(\underline{x}(t)) = \underline{F}(t)$ szakaszonként konstans mátrixok minden sajátértéke (minden t -nél) kielégít egy

$$\operatorname{Re}\{\lambda_v(A)\} \leq -\varepsilon_0; \operatorname{Re}\{\lambda_v(t)\} \leq -\varepsilon_0 < 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m) \quad /59/$$

feltételt. Az is látható, hogy az /55/-/59/ feltételek mellett /54/ sokkal általánosabb, mint /1/-/3/; minden olyan szabályozó rendszer, amely kapcsolóelemeket és lineáris szakaszokkal jól approximálható nemlineáris karakterisztikájú elemeket tartalmaz, leírható a fenti módon, ha "elég folytonos" módon írható le a kapcsolóelemek hatása, és minden linearizált részzszakasz egy asszimptotikusan stabil "teljesen" lineáris szabályozórendszerrel ekvivalens. Érvényes e feltételek mellett a

7. tétel. Az /55/-/59/ feltételek mellett az /54/ egyenlet $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldása asszimptotikusan stabil, ha $\underline{C}$ és $\underline{D}$ minden $\underline{x}$ -re korlátosak.

Bizonyítás: Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy az [5] dolgozat pontjában szereplő tétel speciális eseteként azonnal be lehet látni, hogy az /54/ egyenletre alkalmazott

szukcesszív approximáció-sorozat minden véges intervallumon az /54/ egyenlet egyetlen fixpontjához konvergál. Mi azonban egy más típusú sukceszív approximációt alkalmazunk: kiinduló elemként (az $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ kezdeti feltétel mellett) tekintjük a

$$\dot{\underline{z}} = \underline{A} \underline{z} ; \quad \underline{z}(0) = \underline{x}_0 \quad /60/$$

kezdeti-érték feladat $\underline{z}(t) = \underline{x}_0(t)$ megoldását. A következő közelítést, $\underline{x}_1(t) - t$ ill. általában $\underline{x}_{n+1}(t) - t$ az $\underline{x}_n(t)$ ismeretében mármint a következő iterációs eljárással hozzuk létre:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1}(t) = \underline{z}(t) + \int_0^t \underline{Y}(t-\tau) \{ \underline{C}[\underline{B}(\underline{x}_n(\tau))] + \underline{C}[\underline{x}_n(\tau)] \} \underline{x}_{n+1}(\tau) + \\ + \underline{D}[\underline{x}_n(\tau)] \cdot \underline{\varphi}(\underline{x}_n(\tau)) \} d\tau \end{aligned} \quad /61/$$

ahol $\underline{Y}(t)$ a /60/ egyenlet $\underline{Y}(0) = \underline{E}$ feltételt kielégítő alaprendszer, azaz $\underline{x}_n(t)$ ismeretében $\underline{x}_{n+1}(t)$ az

$$\dot{\underline{x}}_{n+1} = \{ \underline{A} + \underline{B}[\underline{x}_n(t)] + \underline{C}[\underline{x}_n(t)] \} \underline{x}_{n+1}(t) + \underline{D}[\underline{x}_n(t)] \underline{\varphi}[\underline{x}_n(t)] \quad /62/$$

differentiálegyenlet megfelelő kezdeti értékekből induló megoldása. Allításunk igazolására mármint először is igazoljuk, hogy a létrehozott $\underline{x}_n(t)$ sorozat minden véges intervallumon egyenletesen konvergál az /54/ egyenlet

egyértelműen meghatározott megoldásához, másodszor azt, hogy $x_n(t)$ egy elég nagy és n -től független T korlától kezdve kielégíti egy $\|x_n(t)\| \leq C \cdot \exp\{-\frac{n+1}{2n} \varepsilon_0 \cdot t\}$

alaku becslést, és így határértéke, $\underline{x}(t)$ egy

$\|x(t)\| \leq C \cdot \exp\{-\frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot t\}$ alaku becslést, majd ennek alapján azt is, hogy ily módon $\underline{x}(t)$ kielégít tetszőleges $0 < \varepsilon' < \varepsilon_0$ mellett egy $\|x(t)\| \leq C_1 \exp\{-\varepsilon' \cdot t\}$ alaku becslést is, amivel állításunkat teljesen igazoltuk.

Először második állításunkat igazoljuk, amely $x_0(t) = \underline{z}(t)$

-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy igaznak bizonyult még

$n = N$ -re is. Mármint /61/ alapján $\|x_{n+1}(t)\|$ -t az

alábbi módon becsülhetjük: $x_{n+1}(t)$ egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása, amely a homogén egyenlet megfelelő megoldásából és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásából tevődik össze. A homogén résznek a kezdeti feltételt is kielégítő részét, $x_{n+1}^{(h)}(t)$ -t az 1,2, ill. 6. tétel, továbbá $\underline{C}$ korlátos voltára tekintettel így becsülhetjük:

$$\|x_{n+1}^{(h)}(t)\| \leq C \cdot \exp\left\{t^{\nu\left(\frac{N+1}{2N} \varepsilon_0\right)}\right\} \cdot \left\{\exp(-\varepsilon_0 t)\right\} \quad /63/$$

ahol C a $\underline{B}$ -ben szereplő transzformációktól, $\|\underline{x}_0\|$ - tól és $\underline{C}$ korlátjától függő állandó. Minthogy $v(\varepsilon)$ csökkenő függvénye ε -nak, legyen $v_0 = v(\frac{1}{2}\varepsilon_0)$ és T_1 az a korlát, amelytől kezdve

$$\exp(t^{v_0}) \cdot \exp(-\varepsilon_0 t) \leq \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{3}{4}\varepsilon_0 t\right\}$$

$t \geq T$ -re érvényes. Ekkor innét

$$\|\underline{x}_{N+1}^{(h)}\| \leq \frac{1}{2} \cdot C \cdot \exp\left(-\frac{N+2}{2N+2}\varepsilon_0 t\right) \quad /64/$$

még inkább teljesül. Az inhomogén részt, $\underline{x}_{N+1}^{(i)}(t)$ -t az

$$\int_0^t \underline{Y}(t-\tau) \cdot \underline{D}[\underline{x}_N(\tau)] \cdot \underline{\Psi}[\underline{x}_N(\tau)] d\tau$$

alakban tekintjük, és itt $\|\underline{Y}(t-\tau)\| \leq C_2 \cdot \exp\{-\varepsilon_0(t-\tau)\}$

továbbá $\|\underline{D}[\underline{x}_N(\tau)]\| = S_1(\tau)$ egy a $(0, \infty)$ intervallumon

korlátos integrállal rendelkező függvény, az $\underline{x}_N(\tau)$ -ra

tett feltevések alapján, végül $\|\underline{\Psi}[\underline{x}_N(\tau)]\| \leq \|\underline{x}_N(\tau)\| \cdot \log^2 \|\underline{x}_N(\tau)\|$,

hacsak τ már elég nagy, pl. nagyobb, mint T_2 , hiszen

egyébként $\int_0^1 \frac{1}{\psi(\tau)} d\tau < \infty$ érvényes lenne. Ilymódon elég

nagy t -re, pl. $t \geq T_3$ -ra

$$\left\| \int_0^t \underline{Y}(t-\tau) \cdot \underline{D}[\underline{x}_N(\tau)] \cdot \underline{\Psi}[\underline{x}_N(\tau)] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq C_4 e^{-\varepsilon_0 t} \int_0^t e^{\frac{N+1}{2N}\varepsilon_0 \tau} \cdot \frac{S_1(\tau)}{(1+\tau)^2} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} C \exp\left(-\frac{N+2}{2N+2}\varepsilon_0 t\right), \quad \text{hacsak } t \geq T_3$$

Igy /64/ és /65/ szerint elég nagy $t \geq \max\{T_1, T_2\}$ -ra

$$\| \underline{x}_{n+1}(t) \| \leq C \cdot \exp \left\{ -\frac{N+2}{2N+2} \varepsilon \cdot t \right\} \quad /66/$$

teljesül, azaz a teljes indukció szerint /66/ ilyen t -kre minden N -nél érvényes. Ezzel második állításunkat beláttuk. Mármost eddig igazolt állításainkból, $\underline{D}$ korlátosságából és a /61/ formulából azonnal leolvasható, hogy az $\underline{x}_n(t)$ approximációs sorozat egyenletesen korlátos és egyenletesen eleget tesz egy l kitevős Lipschitz-feltételnek (tehát annál inkább egyenlő mértékben folytonos) a $[0, \infty)$ intervallumon. Az Ascoli-lemma értelmében van tehát egy egyenletesen konvergens $\underline{x}_{nk}(t)$ részsorozata itt, amely a folytonos (sőt, Lipschitz-feltételt kielégítő) $\underline{x}^{(1)}(t)$ határfüggvényhez konvergál. Így /61/ szerint az $\underline{x}_{nk+1}(t)$ részsorozat is egyenletesen konvergál egy $\underline{x}^{(2)}(t)$ függvényhez, úgy hogy $\underline{x}^{(1)}$ és $\underline{x}^{(2)}$ kielégítik az

$$\begin{aligned} \underline{x}^{(2)}(t) = \underline{z}(t) + \int_0^t \underline{Y}(t-\tau) \{ \underline{B}[\underline{x}^{(1)}(\tau)] + \underline{C}[\underline{x}^{(1)}(\tau)] \underline{x}^{(2)}(\tau) + \\ + \underline{D}[\underline{x}^{(1)}(\tau)] \cdot \underline{\psi}[\underline{x}^{(1)}(\tau)] \} d\tau \end{aligned} \quad /67/$$

Ha tehát igazoljuk, hogy a /61/ alatti approximációs sorozatra $\| \underline{x}_{n+1}(t) - \underline{x}_n(t) \| \rightarrow 0$ ha $n \rightarrow \infty$, akkor ez /67/-

tel együtt első állításunk érvényességét is bizonyítja. Mármost

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1}(t) - \underline{x}_n(t) &= \int_0^t \underline{Y}(t-\tau) \{ \underline{B}[\underline{x}_n(\tau)] \underline{x}_{n+1}(\tau) - \underline{B}[\underline{x}_{n-1}(\tau)] \underline{x}_n(\tau) + \\ &\quad + \underline{C}[\underline{x}_n(\tau)] \underline{x}_{n+1}(\tau) - \underline{C}[\underline{x}_{n-1}(\tau)] \underline{x}_n(\tau) + \underline{D}[\underline{x}_n(\tau)] \underline{\psi}[\underline{x}_n(\tau)] - \\ &\quad - \underline{D}[\underline{x}_{n-1}(\tau)] \cdot \underline{\psi}[\underline{x}_{n-1}(\tau)] \} d\tau = \\ &= \int_0^t \underline{Y}(t-\tau) \{ \underline{B}[\underline{x}_n(\tau)] \langle \underline{x}_{n+1}(\tau) - \underline{x}_n(\tau) \rangle - \underline{B}[\underline{x}_{n-1}(\tau)] \langle \underline{x}_n(\tau) - \underline{x}_{n-1}(\tau) \rangle + \\ &\quad + \langle \underline{B}[\underline{x}_n(\tau)] \underline{x}_n(\tau) - \underline{B}[\underline{x}_{n-1}(\tau)] \cdot \underline{x}_{n-1}(\tau) \rangle + \underline{C}[\underline{x}_n(\tau)] \langle \underline{x}_{n+1}(\tau) - \underline{x}_n(\tau) \rangle - \\ &\quad - \underline{C}[\underline{x}_{n-1}(\tau)] \cdot \langle \underline{x}_n(\tau) - \underline{x}_{n-1}(\tau) \rangle + \langle \underline{C}[\underline{x}_n(\tau)] \underline{x}_n(\tau) - \underline{C}[\underline{x}_{n-1}(\tau)] \cdot \underline{x}_{n-1}(\tau) \rangle + \\ &\quad + \underline{D}[\underline{x}_n(\tau)] \underline{\psi}[\underline{x}_n(\tau)] - \underline{D}[\underline{x}_{n-1}(\tau)] \underline{\psi}[\underline{x}_{n-1}(\tau)] \} d\tau \end{aligned}$$

Vezessük be itt a $\Delta_{n+1}(t) = \|\underline{x}_{n+1}(t) - \underline{x}_n(t)\|$ jelölést, és vegyük figyelembe a $\underline{B}$, $\underline{C}$ ill. $\underline{D}$ -vel kapcsolatos korlátossági, ill. folytonossági modulusbeli kikötéseket $\underline{B}$, $\underline{C}$ ill. $\underline{D}$ jelöli $\|\underline{B}\|$, $\|\underline{C}\|$ ill. $\|\underline{D}\|$ egy-egy korlátját.

Igy /68/-ból a

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1}(t) &\leq \int_0^t \exp\{-\varepsilon_0(t-\tau)\} \cdot \{ \underline{B} \Delta_{n+1}(\tau) + \underline{B} \Delta_n(\tau) + \\ &\quad + \underline{L} \Delta_n(\tau) + \underline{C} \Delta_{n+1}(\tau) + \underline{C} \Delta_n(\tau) + K \psi(\Delta_n(\tau)) \} d\tau \end{aligned}$$

egyenlőtlenség adódik, azaz

$$\Delta_{n+1}(t)e^{\varepsilon_0 t} \leq \int_0^t (B+C)e^{\varepsilon_0 \tau} \Delta_{n+1}(\tau) d\tau + \int_0^t \{[B+C+L_1]\Delta_n(\tau) + K\psi[\Delta_n(\tau)]\}e^{\varepsilon_0 \tau} d\tau \quad /69/$$

Felhasználva itt a Gronwall-lemmát,

$$\Delta_{n+1}(t) \leq \int_0^t \{[B+C+L_1]\Delta_n(\tau) + K\psi[\Delta_n(\tau)]\}e^{\varepsilon_0 \tau} d\tau \cdot \exp(B+C-\varepsilon_0)t \quad /70/$$

adódik. Mármint a szereplő együtthatók pozitivitása és ψ monotonitása miatt a $\tilde{v}_n(t)$ függvény minden n -re majorálja $\Delta_n(t)$ -t, ha $\tilde{v}_1(t) \geq \Delta_1(t)$ és a $\tilde{v}_n$ sorozat a

$$\tilde{v}_{n+1}(t) = \exp(B+C-\varepsilon_0)t \cdot \int_0^t \{[B+C+L_1]\tilde{v}_n(\tau) + K\psi(\tilde{v}_n(\tau))e^{\varepsilon_0 \tau}\} d\tau \quad /71/$$

egyenletet elégíti ki. /71/ viszont ekvivalens azzal, hogy a

$$\exp\{-(B+C-\varepsilon_0)t\} \cdot [\dot{\xi} - (B+C-\varepsilon_0)\xi] = [B+C+L_1]\xi + K\psi(\xi) \exp\{\varepsilon_0 t\}$$

differenciálegyenlet megoldását keressük meg szukcessziv approximációval, olymódon, hogy azt inhomogén lineáris differenciálegyenletnek tekintjük. Ha itt bevezetjük az $\eta = e^{-(B+C-\varepsilon_0)t} \cdot \xi$ új változót, akkor differenciálegyen-

letünk az

$$\dot{\eta} = (B+C+L_1)e^{(B+C)t} \cdot \eta + Ke^{\epsilon_0 t} \cdot \psi(e^{(B+C-\epsilon_0)t} \cdot \eta) \quad /72/$$

differentiálegyenletbe megy át. /72/ szukcessziv approxi-
mációval történő megoldása az $\eta_1(t) = e^{-(B+C-\epsilon_0)t} \cdot \vartheta_1(t)$
választással az $\eta_n(t) = e^{-(B+C-\epsilon_0)t} \cdot \vartheta_n(t)$ sorozatot szol-
gáltatja. Mármost $\Delta_1(0) = 0$, így a ϑ_1 , azaz az η_1
függvényt is választhatjuk úgy, hogy $\vartheta_1(0) = 0$ resp.

$\eta_1(0) = 0$ érvényes legyen. E kezdeti feltételt azonban
/72/-nek csak az $\eta \equiv 0$ megoldása elégíti ki. Tett felte-
véseink alapján azonban ekkor a szukcessziv approximáció-
val adódó $\eta_n(t)$ sorozat bármely véges intervallumon egyen-
letesen e megoldáshoz konvergál /1. pl. [4] ill. [5]/. Így
bármely véges intervallumon $\Delta_n(t)$ is egyenletesen zé-
rushoz konvergál, és ezzel első állításunkat is igazoltuk.
E két állítás együttesen azt mutatja, hogy /54/ megoldása,
 $\underline{x}(t)$ kielégíti a /66/ relációt. Behelyettesítve ezt az
/54/-ben szereplő mátrixokba, /54/ megoldása kielégíti az

$$\dot{\underline{x}} = \{ \underline{A} + \underline{B}[\underline{x}(t)] + \underline{C}[\underline{x}(t)] \} \underline{x} + \underline{D}[\underline{x}(t)] \underline{\psi}(\underline{x}) \quad /73/$$

differentiálegyenletet, és itt

$$\int_0^t \|\underline{C}[\underline{x}(\tau)]\| d\tau < t^{\nu_0}; \quad \int_0^\infty \|\underline{D}[\underline{x}(\tau)]\| d\tau < \infty \quad /74/$$

teljesül. Ekkor azonban az 1., 2., ill. 6. tétel szerint
/73 / megoldása kielégíti t elég nagy értékeire az

$$\|\underline{x}\| \leq \exp(-\varepsilon'_0 t)$$

becslést, hacsak $\varepsilon'_0 < \varepsilon_0$. Tételünket ezzel igazoltuk. Megemlítjük még, hogy a gondolatmenet lényeges változtatása nélkül igaz marad a tétel akkor is, ha $\underline{B}$, $\underline{C}$ ill. $\underline{D}$ megfelelő feltételeket kielégítve t -től is függenek.

Irodalom:

- [1] Minorsky: Nonlinear Oscillations. Princeton, 1962.
- [2] Cesari, L.: Un nouvo criterio di stabilita per le solutioni delle equazioni differenziali lineari. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) 9. 1940.
- [3] Cesari, L.: Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ord. Diff. Equ., Springer, 1959.
- [4] Coddington E.A.-Levinson N.: Theory of Ord.Diff. Equ. Mc Graw-Hill Book C. 1955.
- [5] Frey T.: Über die Konvergenz von Iterationsfolgen mit veränderlichen Operatoren Studia Sc. Math. Ac. Sc. Hung. 1. 1966. /sajtó alatt/
- [6] Bihari I.: A generalization of a lemma of Bellmann... Acta Math. Ac. Sc. Hung. VII. 1. 1956.

- [7] Bihari I.: Researches of the Boundedness and Stability of the Solutions of non-linear Diff. Equ. Acta Math. Ac. Sc. Hung. VIII. 3-4. 1957.
- [8] Frey T.: Einige neue Methoden zur Berechnung von Eigenwerten Aplikace Matematiky 10. 1965.

S u m m a r y

On some new results of stability theory.

The paper verifies some new comparative items in order to prove the guess of Aizerman. These assure the asymptotic comparability of the perturbed linear differential equation system and of the unperturbed solution system. Besides, the paper examines the asymptotic behaviour of such differential equation systems with coefficient matrices constant by phases which are no periodical functions of the parameter, but repeat themselves periodically. Supported by the same, a partly weakened, partly sharpens variety of Aizerman's guess is verified.