Optimális vezérlés bizonyos tipusu parciális differenciálegyenletek esetén.

Szelezsán János

Tekintsünk olyan folyamatokat, amelyeknek viselkedését az

$$L \cdot u = 0 \qquad 1/$$

parciális differenciálegyenlet irja le:

$$u = u(x,t)$$
$$x = [x_1, x_2, \dots \dots, x_n]$$

és tegyük fel, hogy a perem-, valamint a kezdeti feltételek olyanok, hogy az 1/ differenciálegyenlet megoldása

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \, u_i(t) \, v_i(x) \qquad 2/$$

alaku, $b_i = \int_{\Omega} \varphi(x) \, v_i(x) \, d\Omega$ ahol a $\{v_i(x)\}$ rendszer az Ω tartományban ortonormált teljes függvényrendszer $(\Omega \in R_n \; ; \; d\Omega = dx_1 \dots \dots dx_n)$. A $\varphi(x)$ függvényt tekintsük vezérlő függvénynek.

Ismeretes, hogy a matematikai fizika számos differenciálegyenletének megoldását lehet 2/ alakban előállitani. 2/ tipusu megoldása van a matematikai fizika számos olyan feladatának, amelynél a $\varphi(x)$ függvény a t=o ponthoz tartozó kezdeti feltétel. Ebben az esetben a $\varphi(x)$ függvény a tartomány határán történő vezérlést jelenti.

A/ Lineáris korlátozó feltétel

Legyen A egy konstans; legyen p(x) egy adott függvény. Vezessük be a $c_i = \int_\Omega p(x)\, v_i(x)\, d\Omega$ jelölést.

Legyen a Ø halmaz az alábbi "hipersík":

$$\phi = \left\{ \varphi(x) : \int_\Omega p(x)\, \varphi(x)\, d\Omega = A \right\}$$

Legyen q(x) egy adott függvény, legyen

$$a_i = \int_\Omega q(x)\, v_i(x)\, d\Omega$$

Tekintsük a

$$J = \int_\Omega [q(x) - u(x,t_0)]^2\, d\Omega$$

funkcionált.

A.1.Feladat: Keressük meg a Ø halmaznak azt az elemét, amelyen a J funkcionál minimumot vesz fel.

A feladat megoldásához szükségünk lesz az alábbi segédtételre:

Lemma

Tekintsük az

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \qquad 3/$$

funkcionált, és a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = a \qquad 4/$$

feltételt, ahol α_i (i=1,2,...) adott. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$$

Állitás: az f funkcionál minimumát a 4/ feltétel mellett

$$x_i^* = \frac{a}{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2} \alpha_i \qquad i=(1,2,...)$$

adja.

Bizonyitás: Megmutatjuk, hogy minden más, a 4/ feltételt kielégitő $x_1, \dots, x_n, \dots$ értékekre $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{*2}$

A 4/ feltétel szerint ugyanis

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = a$$

azaz

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\right)^2 = a^2$$

Viszont a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség alapján

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \geq \frac{a^2}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2}$$

Ugyanakkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{*2} = \frac{a^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 = \frac{a^2}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2}$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{*2}$$

A fenti lemma segitségével bizonyitjuk az alábbi tételt.

<u>Tétel:</u>

Tegyük fel,

1/ hogy $0 < k_2 < |\mu_i(t_0)| < k_1$

2/ hogy létezik a feladatnak megoldása

3/ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i c_i < \infty$

Akkor a megoldás

$$\varphi^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\, v_i(x)$$

ahol

$$b_i = \frac{a_i - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{a_i c_i}{u_i(t_o)} - A}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{u_i^2(t_o)} c_i^2} \cdot \dfrac{1}{u_i(t_o)} \cdot c_i}{u_i(t_o)} \qquad i = 1,2,\ldots$$

<u>Bizonyitás:</u>

A J funkcionál a következő alakban irható fel:

$$J = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} b_i u_i(t_o) v_i(x) \right)^2 d\Omega$$

Mivel mindkét az integrál alatt szereplő sor konvergens, ezért a

$$\sum_{i=1}^{\infty} [a_i - b_i u_i(t_o)] \, v_i(x)$$

Fourier sor konvergens és valamilyen $\varrho(x)$ függvényt állit elő.

Ekkor

$$J = \int_\Omega \varrho^2(x) \, d\Omega = \| \varrho(x) \| = \sum_{i=1}^{\infty} [a_i - b_i u_i(t_o)]^2$$

Az 5/ feltétel alakja viszont

$$\int_\Omega [p(x) \sum_{i=1}^{\infty} b_i v_i(x)] \, d\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_\Omega p(x) v_i(x) \, d\Omega = A$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i c_i = A$$

Vezessük be az $a_i - b_i u_i(t_0) = I_i$

helyettesitést. Ekkor

$$b_i = \frac{a_i - I_i}{u_i(t_0)}$$

A funkcionál ekkor

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} I_i^2$$

a feltétel pedig

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{u_i(t_0)} I_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i c_i}{u_i(t_0)} - A$$

lesz

Mivel

$$\left| \frac{1}{u_i(t_0)} \right| < K$$

ezért

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i c_i}{u_i(t_0)} < \infty$$

Hasonlóan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{u_i(t_0)^2} c_i^2 < \infty$$

ezért alkalmazható a lemma.

Eszerint a minimumot az

$$I_i = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i c_i}{u_i(t_o)} - A}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{u_i^2(t_o)} c_i^2} \cdot \frac{1}{u_i(t_o)} c_i$$

vagyis a

$$b_i = \frac{a_i - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i c_i}{u_i(t_o)} - A}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{u_i^2(t_o)} c_i^2} \cdot \frac{1}{u_i(t_o)} c_i}{u_i(t_o)}$$

helyen éri el a J funkcionál.

A.2.Feladat:

Az előző módszerrel megoldható a következő feladat is.

Minimalizálandó a

$$J = \int_{\Omega} u^2(x,t_o)\, d\Omega + \gamma \int_{\Omega} \varphi^2(x)\, d\Omega$$

funkcionál $(\gamma > 0)$ a $\int_{\Omega} p(x)\varphi(x)\, d\Omega = A$ feltétel mellett (ahol $p(x)$; $u(x,t_o)$; $\varphi(x)$ jelentése ugyanaz, mint előbb).

Ebben az esetben a J funkcionál

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 u_i^2(t_o) + \gamma \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \left(u_i^2(t_o) + \gamma\right)$$

alakban irható fel, a feltétel pedig, mint fentebb:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i b_i = A$$

A $b_i \sqrt{u_i^2(t_0)+\gamma} = I_i$ helyettesitéssel a funkcionál

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} I_i^2$$

a feltétel pedig

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\sqrt{u_i^2(t_0)+\gamma}} I_i = A$$

alaku.

Tegyük fel, hogy $|u_i(t_0)| < K$. Akkor

$$\frac{c_i^2}{u_i^2(t_0)+\gamma} \leq \frac{c_i^2}{\gamma}$$

Alkalmazhatjuk tehát a lemmát; azt kapjuk, hogy

$$I_i = \frac{A}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{u_i^2(t_0)+\gamma}} \cdot \frac{c_i}{\sqrt{u_i^2(t_0)+\gamma}}$$

azaz

$$b_i^* = \frac{A}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{u_i^2(t_0)+\gamma}} \cdot \frac{c_i}{u_i^2(t_0)+\gamma}$$

A megoldás tehát

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^* v_i(x)$$

A.3.Feladat:

Az előbbi módszerrel megoldható a következő feladat is. Meghatározandó

$$\min_{\varphi \in \Phi} \int_{\Omega} [\varphi(x) - u(x,t_0)]^2 \, d\Omega$$

(Az $u(x,t_0)$ $\varphi(x)$, $p(x)$ függvények és a $\emptyset$ halmaz jelentése ugyanaz, mint előbb).

Ebben az esetben a célfüggvény

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} [b_i(1 - u_i(t_0))]^2$$

és a feltétel

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i b_i = A$$

alaku lesz.

Legyen:

$$b_i(1 - u_i(t_0)) = I_i$$

azaz

$$b_i = \frac{I_i}{1 - u_i(t_0)}$$

Akkor

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} I_i^2$$

és

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{1-u_i(t_0)} I_i = A$$

Tegyük fel, hogy

$$\left|\frac{1}{1-u_i(t_0)}\right| < K$$

akkor

$$\sum^{\infty} \frac{c_i^2}{[1-u_i(t_0)]^2} < \infty$$

Alkalmazva a lemmát, azt kapjuk, hogy

$$I_i = \frac{A}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{[1-u_i(t_0)]^2}} \cdot \frac{c_i}{1-u_i(t_0)}$$

azaz

$$b_i^* = \frac{\frac{A}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{(1-u_i(t_0))^2}} \cdot \frac{c_i}{1-u_i(t_0)}}{1-u_i(t_0)}$$

vagyis a megoldás

$$\varphi^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^* v_i(x)$$

B. Közelitő megoldás kvadratikus feltétel esetén

B.1. Feladat:

Tekintsük a

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} [q(x) - u(x,t_0)]^2 \, d\Omega$$

funkcionált, ahol az előbbiekhez hasonlóan

$$u(x,t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\, u_i(t_0)\, v_i(x)$$

valamilyen parciális differenciálegyenlet megoldása,

$b_i = \int_\Omega \varphi(x)\, v_i(x)\, d\Omega$ és $\{v_i(x)\}$ egy ortonormált rendszer. A vezérlőhatást jelentse $\varphi(x)$. Legyen

$$\phi = \left\{ \varphi(x) : \int_\Omega \varphi^2(x)\, d\Omega = 1 \right\}$$

Keressük meg a $J(\varphi)$ funkcionál minimumát a $\emptyset$ halmazon.

Ebben az esetben célszerü a feladatot matematikai programozási feladatra visszavezetni. /A módszer Ritz-tipusu módszer./

Vegyük az u (x,t) megoldás N-edik szeletét és tekintsük ezen a funkcionált: Ekkor

$$J(\varphi_N) = \int_\Omega [q(x) - u^{(N)}(x,t_0)]^2\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega q^2(x)\, d\Omega - 2\int_\Omega q(x)\, u^{(N)}(x,t_0)\, d\Omega + \int_\Omega u^{(N)^2}(x,t_0) =$$

$$= \int_\Omega q^2(x)\, d\Omega - 2\sum_{i=1}^{N} b_i\, u_i(t_0)\, a_i + \sum_{i=1}^{N} b_i^2\, u_i^2(t_0)$$

A feltétel alakja

$$\sum_{i=1}^{N} b_i^2 = 1$$

Az N-edik szeletre vonatkozóan tehát a $b_1, b_2, \ldots, b_N$ változókban egy kvadratikus programozási feladatot kapunk: minden $N < \infty$ -re vonatkozóan ki tudjuk számitani a $b_1^*, b_2^*, \ldots \ldots, b_N^*$ minimumhelyet. Az ezen b_i^* "Fourier" együtthatókhoz tartozó

$$\varphi_N^*(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i^* \, v_i(x)$$

függvényt tekintjük a feladat megoldása N-edik közelitésének.

Tétel: Tegyük fel, hogy az eredeti feladatnak létezik $\varphi^*(x) \in \phi$ megoldása és $\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t_0) < \infty$

Akkor

$$\lim_{N \to \infty} J(\varphi_N^*) = J(\varphi^*)$$

Bizonyitás:

Jelöljük Q_N -nel a $v_1, v_2, \ldots \ldots, v_N$ elemek által kifeszitett $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i$ lineáris térnek azt a részhalmazát, amelynek elemeire

$$\int_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i\Big)^2 d\Omega = 1$$

Először bebizonyitjuk, hogy bármely ε_1 esetén tetszőleges $\varphi \in \phi$ függvényhez megadható olyan N szám, hogy $\| \varphi(x) - \varphi_N(x) \| < \varepsilon_1$, ahol $\varphi_N(x) \in Q_N$

A $v_i(x)$ rendszer teljessége miatt ugyanis bármilyen $\varphi(x)$ esetén tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)$ összeg (a $\varphi(x)$ függvény Fourier sorának szelete) hogy

$$\| \varphi(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x) \| < \varepsilon^2$$

$$b_i = \int_{\Omega} \varphi(x) v_i(x) \, d\Omega$$

Viszont

$$\sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x) \notin Q_N$$

A $\sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)$ szelethez azonban található

olyan $\sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \in Q_N$, hogy

$$\| \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \| < \varepsilon^2 \qquad 6/$$

Ugyanis $\sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \in Q_N$ azt jelenti,

hogy

$$\| \sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \| = 1$$

azaz $\sum\limits_{i=1}^{N} b_i'^{\,2} = 1$

6/ viszont azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=1}^{N} (b_i - b_i')^2 < \varepsilon^2$$

Mivel $\|\varphi(x)\| = 1$, ezért $\|\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i v_i(x)\| = 1$

azaz $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i^2 = 1$. Ebből viszont

$$\sum_{i=1}^{N} b_i^2 = 1 - \sum_{N+1}^{\infty} b_i^2 \qquad 7/$$

Ugyanakkor:

$$\varepsilon^2 > \|\varphi(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)\| = \|\sum_{N+1}^{\infty} b_i v_i(x)\|$$

miatt $\sum\limits_{N+1}^{\infty} b_i^2 < \varepsilon^2$ és ezt összevetve

7/-tel azt kapjuk, hogy

$$1 - \varepsilon^2 < \sum_{i=1}^{N} b_i^2 < 1$$

A 6/ feltétel tehát a következőképpen fogalmazható:

Olyan b_i' számokat kell keresni, amelyekre

$$\sum_{i=1}^{N} (b_i - b_i')^2 < \varepsilon^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} b_i'^{\,2} = 1$$

$$1 - \varepsilon^2 < \sum_{i=1}^{N} b_i^2 < 1 \qquad 8/$$

A fenti egyenlőtlenség rendszer azonban tetszőleges (a 8/ feltételnek eleget tevő) b_i esetén megoldható. Mindig vehetők ugyanis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\dots, \varepsilon_N$ számok úgy, hogy $b_i' = b_i + \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \dots\dots, N)$ választással

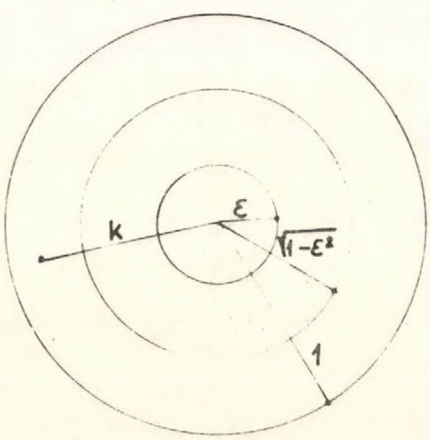
$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 < \varepsilon^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} (b_i + \varepsilon_i)^2 = 1$$

$$1 - \varepsilon^2 < \sum_{i=1}^{N} b_i^2 < 1$$

legyen.

Az első egyenlőtlenség ugyanis egy ε sugaru, N dimenziós gömb belső pontjait jelenti; a második pedig egy egységsugaru $(b_1, \dots, b_N)$ középpontu gömb határpontjait. A második gömb középpontja azonban a $\sqrt{1-\varepsilon^2}$ és 1 sugaru gömbök közötti részben van.



Legyen a $(b_1, \dots, b_N)$ középpont távolsága a középponttól k, azaz

$$k = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} b_i^2}$$

$$\sqrt{1-\varepsilon^2} < k < 1$$

Világos, hogy

$$k+\varepsilon>1$$

ugyanis

$$\sqrt{1-\varepsilon^2}<k$$

$$1-\varepsilon^2<k^2$$

$$1<k^2+\varepsilon^2<k+\varepsilon$$

Ez azt jelenti, hogy a $(b_1,\ldots,b_N)$ középpontu egységsugaru gömb határpontjai halmazának és az ε sugaru középpontu gömb belső pontjai halmazának van közös eleme. Azt kaptuk tehát, hogy a b_i' együtthatók megválaszthatók ugy, hogy

$$\Big\|\sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)-\sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x)\Big\|<\varepsilon^2$$

legyen.

Ekkor viszont

$$\Big\|\varphi(x)-\sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x)\Big\|=$$

$$=\Big\|\varphi(x)-\sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)+\sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)-\sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x)\Big\|\leq$$

$$\leq\Big\|\varphi(x)-\sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)\Big\|+\Big\|\sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)-\sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x)\Big\|<$$

$$<2\varepsilon^2$$

Ez azt jelenti tehát, hogy bármely $\varphi(x) \in \Phi$ esetén található $\varphi_N(x) \in Q_N$, hogy

$$\| \varphi(x) - \varphi_N(x) \| < \varepsilon_1$$

Bebizonyítjuk, hogy ha

$$\| \overset{*}{\varphi}(x) - \varphi_N(x) \| < \varepsilon, \text{ okkor } J(\varphi_N) - J(\varphi^*) < \delta$$

Ugyanis

$$0 \leq J(\varphi_N) - J(\varphi^*) = \| q(x) - u_N(x,t_0) \|^2 - \\ - \| q(x) - u^*(x,t_0) \|$$

ahol $u_N(x,t_0)$ a φ_N, $u^*(x,t_0)$ pedig a φ^* kezdőfeltételhez tartozó megoldás.

$$\| q(x) - u_N(x,t_0) \|^2 - \| q(x) - u^*(x,t_0) \|^2 = \\ = \left(\| q(x) - u_N(x,t_0) \| + \| q(x) - u^*(x,t_0) \| \right) \cdot \\ \cdot \left(\| q(x) - u_N(x,t_0) \| - \| q(x) - u^*(x,t_0) \| \right)$$

De

$$\| q(x) - u_N(x,t_0) \| + \| q(x) - u^*(x,t_0) \| < k$$

és

$$0 \leq (\| q(x) - u_N(x,t_0) \| - \| q(x) - u^*(x,t_0) \| \leq \| u^*(x,t_0) - u_N(x,t_0) \|$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$J(\varphi_N) - J(\varphi^*) \leq k \| u^*(x,t_0) - u_N(x,t_0) \| \qquad 9/$$

Azonban, ha $\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t_0) < \infty$, akkor a differenciálegyenlet $u(x,t_0)$ megoldása a kezdőfeltételtől folytonosan függ, azaz, ha

$$\| \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \| < \varepsilon_0$$

akkor

$$\| u_1(x,t_0) - u_2(x,t_0) \| < \delta$$

Legyen ugyanis

$$u_1(x,t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(1)} u_i(t_0) v_i(x)$$

$$u_2(x,t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(2)} u_i(t_0) v_i(x)$$

$$b_i^{(1)} = \int_{\Omega} \varphi_1(x) v_i(x) d\Omega$$

$$b_i^{(2)} = \int_{\Omega} \varphi_2(x) v_i(x) d\Omega$$

Ekkor

$$(b_i^{(1)} - b_i^{(2)})^2 = \int_{\Omega} (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))^2 v_i(x) d\Omega \leq$$

$$\leq \| \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \|^2 < \varepsilon_0^2$$

ezért

$$\| u_1(x,t_0) - u_2(x,t_0) \| = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i^{(1)} - b_i^{(2)})^2 \, u_i^2(t_0) <$$

$$< \varepsilon_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t_0) \leq k \varepsilon_0^2$$

Ezek felhasználásával 9/-ből azt kapjuk, hogy

$$J(\varphi_N) - J(\varphi^*) \leq \delta$$

Legyen φ_N^* a $J(\varphi)$ funkcionál minimuma a Q_N halmazon. Az előbbiek alapján bizonyos N-től kezdve felirhatjuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$J(\varphi^*) \leq J(\varphi_N^*) \leq J(\varphi_N) < J(\varphi^*) + \varepsilon^*$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{N \to \infty} J(\varphi_N^*) = J(\varphi^*)$$

És ezzel állitásunkat bebizonyitottuk.

<u>B.2.Feladat:</u> Legyen most a megengedett függvények halmaza a következő:

$$\phi^{(1)} = \left\{ \varphi(x) : \int_{\Omega} \varphi^2(x) \, d\Omega \leq 1 \right\}$$

A funkcionál és a jelölések legyenek ugyanazok mint előbb.

<u>Tétel:</u> Tegyük fel, hogy

1/ $\quad \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t_0) < \infty$

2/ $\quad |v_i(x)| < k \qquad i = 1, 2, \ldots$

3/ $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i u_i(t_0)| < \infty$

4/ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{u_i^2(t_0)} > 1$

Ekkor a feladat közelitő megoldása

$$\varphi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i^{(N)} v_i(x)$$

ahol

$$b_i^{(N)} = \frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(N)} + u_i^2(t_0)}$$

ahol $\lambda^{(N)}$ a $\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2 u_i^2(t_0)}{(\lambda + u_i^2(t_0))^2} = 1$

egyenlet pozitiv gyöke. (Ilyen gyök egyetlen egy van.)

A kapott $\varphi_N(x)$ sorozat konvergens, azaz

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(x) = \varphi^*(x)$$

és

$$\lim_{N\to\infty} J(\varphi_N(x)) = J(\varphi^*(x))$$

Bizonyitás:

Vegyük a $J(\varphi)$ funkcionált a $\varphi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)$ helyen.
Azt kapjuk, hogy

$$J(\varphi_N)=\int_\Omega q^2(x)\,d\Omega-2\sum_{i=1}^{N}a_i u_i(t_0)b_i+\sum_{i=1}^{N}b_i^2u_i^2(t_0)$$

Az $\int_\Omega \varphi^2(x)\,dx \leq 1$ feltétel alakja

$$\sum_{i=1}^{N}b_i^2 \leq 1$$

A $J(\varphi_N)$ funkcionált ugy tekinthetjük, mint a $b_1, b_2, \dots, b_N$ skalár számok függvényét. Ezzel feladatunkat matematikai programozási feladatra vezettük vissza. Ez utóbbi megoldása által kapott $b_1^*, b_2^*, \dots, b_N^*$ együtthatókkal felirjuk a $\varphi_N(x)=\sum_{i=1}^{N}b_i^* v_i(x)$ függvényt és ezt tekintjük az eredeti feladat közelitő megoldásának.

Világos, hogy a $J(b_1, \dots, b_N)$ függvény konvex, ugyanis a $J(x_1+\lambda y_1, \dots\dots\dots, x_N+\lambda y_N)$ függvény λ-nak konvex függvénye, mert $\frac{\partial^2 J}{\partial\lambda^2}=\sum_{i=1}^{N}{}_i^2 u_i^2>0$ és ez mint ismeretes azt jelenti, hogy a $J(b_1, \dots, b_N)$ függvény a $b_1, \dots, b_N$ változóknak konvex függvénye.

A $\sum_{i=1}^{N}b_i^2 \leq 1$ tartomány is konvex.

Ismeretes [1], hogy konvex függvény lokális minimuma konvex tartományon abszolut minimum is.

Alkalmazzuk az 1/ funkcionálra a 2/ feltétel mellett a Lagange multiplikátor módszert, azaz vegyük a

$$J^{(1)}(b_1, b_2, \dots \dots, b_N, \lambda) = \int_{\Omega} q^2(x)dx - 2\sum_{i=1}^{N} a_i u_i(t_0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} b_i^2 u_i^2(t_0) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} b_i^2 - 1 \right)$$

függvényt. A $J^{(1)}(b_1, b_2, \dots \dots, \lambda)$ függvény szélsőértékhelyei a

$$\frac{\partial J^{(1)}}{\partial b_i} = 0$$

$$\frac{\partial J^{(1)}}{\partial \lambda} = 0$$

egyenletek gyökhelyei lehetnek. Ezekből az egyenletekből a szélsőértékhelyekre az alábbiakat kapjuk

$$b_i^{(N)} = \frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(N)} + u_i^2(t_0)} \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

és a $\lambda^{(N)}$ számot a

$$\sum_{i=1}^{N} b_i^{(N)} = 1$$

feltételtől kapjuk.

Könnyen belátható, hogy létezik pozitiv $\lambda^{(N)}$ multiplikátor, vagyis a

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2 u_i^2(t_0)}{(\lambda + u_i^2(t_0))^2} = 1$$

egyenletnek létezik (mégpedig egyetlen) nem-negativ gyöke.

A $\varrho_N(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i u_i(t_0)}{(\lambda + u_i^2(t_0))^2}$ függvény

ugyanis $\lambda > 0$ esetén folytonos és monoton csökken.

A feltétel szerint azonban $\varrho_N(0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2}{u_i^2(t_0)} > 1$ ha $N > \nu$. Viszont

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varrho_N(\lambda) = 0$$

Ebből következik, hogy létezik egyetlen olyan $\lambda^{(N)} \geq 0$ amelyre $\varrho_N(\lambda^{(N)}) = 1$.

Felhasználjuk az alábbi tételt.

<u>Tétel</u> (Kuhn-Tucker)

Tekintsük az alábbi feladatot: minimalizáljuk az

$$f^0(x_1, \dots \dots, x_n)$$

függvényt, ha a megengedett halmaz

$$f^i(x_1, x_2, \dots \dots x_n) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

Irjuk fel a fenti feladatra az általánositott Lagrange-féle egyenleteket, ekkor az alábbi feladathoz jutunk: meghatározandók olyan x, u vektorok, amelyekre

$$\left.\begin{aligned} & f_x^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_x^i(x) = 0 \\ & f^{(i)}(x) \leq 0 \ ; \quad u_i \geq 0 \ ; \qquad i = 1, 2, \ldots \ldots, m \\ & \sum_{i=1}^{m} u_i f^i(x) = 0 \end{aligned}\right\} *$$

ahol

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

és

$$f_x^\nu(x) = \operatorname{grad} f^\nu(x)$$

Ha mármost az $\bar{x}$ vektor környezetében az

$$f^i(x) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

halmaz és az $f^0(x)$ célfüggvény is konvex, és teljesül a Sleiter feltétel, azaz létezik olyan $\tilde{x}$, amelyre $f^i(\tilde{x}) < 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$ akkor az $\bar{x}$ vektor, akkor és csak akkor ad lokális minimumot a fenti feladatra, ha létezik olyan $\bar{u}$, amelyre az $\bar{x}, \bar{u}$ vektorpár kielégiti a * rendszert.

A fenti tétel alkalmazása a mi esetünkre azt adja, hogy mivel a $J(b_1, \dots, b_N)$ függvény, valamint a $\sum_{i=1}^{N} b_i^2 \leq 1$ tartomány konvex és $\lambda^{(N)} > 0$ ezért a

$$b_i^{(N)} = \frac{a_i\, u_i(t_0)}{\lambda^{(N)} + u_i^2(t_0)}$$

helyen a $J(b_1, b_2, \dots, b_N)$ függvény lokális minimumot vesz fel, ahol

$$\lambda^{(N)} \quad a \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2\, u_i^2(t_0)}{(\lambda + u_i^2(t_0))^2} = 1$$

egyenlet pozitiv gyöke. A konvexicitások miatt azonban ez a hely egyuttal abszolut minimum is.

Most bebizonyitjuk, hogy a

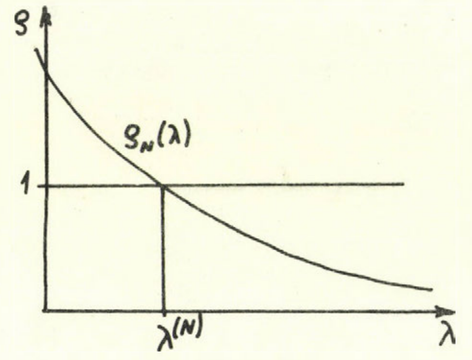
$$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(N)}, \dots$$

sorozat konvergens.

Világos ugyanis, hogy

$$\varrho_{N+1}(\lambda) > \varrho_N(\lambda)$$

A $\varrho_N(\lambda)$ függvény λ-nak folytonos monoton csökkenő függvénye, ha $0 \leq \lambda \leq \infty$, amely a



$\varrho = 1$ egyenest egyetlen pontban metszi (1. ábra).

Mivel $\varrho_{N+1}(\lambda) > \varrho_N(\lambda)$

ezért $\lambda^{(N+1)} > \lambda^{(N)}$

A $\lambda_1^{(1)} \dots \dots, \lambda_1^{(N)} \dots \dots$ sorozat tehát monoton növekvő.

Megmutatjuk, hogy korlátos is.

Ha ugyanis

$$\lambda > \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \, u_i^2(t_0) = K^2$$

akkor

$$\varrho_N(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2 \, u_i^2(t_0)}{[u_i^2(t_0) + \lambda]^2} <$$

$$< \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2 \, u_i^2(t_0)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \, u_i^2(t_0) <$$

$$< \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \, u_i^2(t_0) = \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 < 1$$

vagyis ha $\lambda > k$, akkor a $\varrho_N(\lambda)$ függvény értékei kisebbek 1-nél, ami azt jelenti, hogy a $\varrho_N(\lambda)$ görbe a $\varrho = 1$ egyenest olyan $\lambda^{(N)}$ pontban metszi, amelyre

$$\lambda^{(N)} < K \qquad (N = 1, 2, \dots\dots)$$

A $\lambda^{(1)}, \dots\dots, \lambda^{(N)}, \dots\dots$ sorozat tehát monoton növekvő és korlátos, ezért konvergens, vagyis $\lim \lambda^{(N)} = \lambda^{\infty}$ létezik.

Ez viszont azt jelenti, hogy $\lim\limits_{N\to\infty} b_i^{(N)} = b_i^{\infty}$ létezik.

Megmutatjuk, hogy a tett feltevés mellett az előzőkből következik, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(x) = \varphi^*(x)$$

ahol

$$\varphi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i^{(N)} v_i(x)$$

$$\varphi^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{\infty} v_i(x)$$

Ugyanis

$$|\varphi^*(x) - \varphi_N(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{\infty} v_i(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i^{(N)} v_i(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{N} (b_i^{(\infty)} - b_i^{(N)}) v_i(x) + \sum_{i=N+1}^{\infty} b_i^{(\infty)} v_i(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(\infty)} + u_i^2(t_0)} - \frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(N)} + u_i^2(t_0)} \right) v_i(x) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(\infty)} + u_i^2(t_0)} v_i(x) \right| \leq$$

$$\leq K\left\{\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{1}{\lambda^{(\infty)}+u_i^2(t_0)}-\frac{1}{\lambda^{(N)}+u_i^2(t_0)}\right|\left|a_i u_i(t_0)\right| +\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(\infty)}+u_i^2(t_0)}\right|\right.$$

ahol

$$|v_i(x)| < K$$

Mivel $\lambda^{(N)} \to \lambda^{(\infty)}$, ezért

$$\left|\frac{1}{\lambda^{(\infty)}+u_i^2(t_0)}-\frac{1}{\lambda^{(N)}+u_i^2(t_0)}\right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad N > N_0$$

Viszont

$$\left|\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(\infty)}+u_i^2(t_0)}\right| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty}\left|\frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{\infty}}\right| = \frac{1}{\lambda^{\infty}}\left|\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i u_i(t_0)\right|$$

Mivel a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i(t_0)$ sor a feltételek szerint abszolut konvergens, ezért N megválasztható ugy, hogy

$$\left|\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i u_i(t_0)\right| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad N > N_1$$

legyen.

Ezenkivül $\left|\sum_{i=1}^{N} a_i \mu_i(t_0)\right| < K_1$ (mivel $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i \mu_i(t_0)|$ konvergens).

Igy az $N \geq \max(N_0, N_1)$ választással

$$|\varphi^*(x) - \varphi_N(x)| < K \left\{ K_1 \varepsilon + \frac{1}{\lambda(\infty)} \varepsilon \right\} =$$

$$= K\left(K_1 + \frac{1}{\lambda^{(\infty)}}\right) \varepsilon = \delta$$

A norma folytonossága miatt azonban

$$\lim_{N \to \infty} J(\varphi_N) = J(\varphi^*)$$

is teljesül.

Irodalom:

[1] Ju.M.Jermolev: Metodi resenija nelinejnih eksztremalnih zadacs. (Kibernetika 1966. No.4; 1.

[2] G.Zoutendijk: Methods of feasible directions (1960).

[3] A.G.Butkovszkij; Teorija optimalnovo upravlenija szisztemami sz raszpredelennimi parametrami (Moszkva, 1965).

Summary

Optimal control with partial differential equations of a certain type

János Szelezsán

Let us consider processes whose behaviour can be described by the partial differential equation

$$L(u)=0$$
$$u=u(x,t) \qquad x=[x_1,x_2,\dots,x_n]$$

Let us furthermore assume that the boundary and the initial conditions are of the form that the solution of the differential equation under /1/ may be given in the following form

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i u_i(t) v_i(x)$$

$$b_i=\int_{\Omega} \varphi(x) v_i(x)\, d\Omega$$

where the system $\{v_i(x)\}$ is a full system of functions orthonormalized in the range Ω . Let us consider the function $\varphi(x)$ to be the control function.

In this paper the following problems are discussed.

A/ Let be given the functions $q(x), p(x)$. Let us assume that

$$\phi = \{\varphi(x) : \int_{\Omega} p(x)\,\varphi(x)\,d\Omega = A\}$$

We shall solve the following problems

α_1 $\quad \min\limits_{\varphi\in\phi} \int_{\Omega} [q(x) - u(x,t_0)]^2\,d\Omega$

β_1 $\quad \min\limits_{\varphi\in\phi} \int_{\Omega} u^2(x,t_0) + \gamma \int_{\Omega} \varphi^2(x)\,d\Omega$

γ_1 $\quad \min\limits_{\varphi\in\phi} \int_{\Omega} [\varphi(x) - u(x,t_0)]^2\,d\Omega$

The solutions will be given in the form of infinite series.

B/ Let $q(x)$ be the given function,

$$\phi_1 = \{\varphi(x) \int_{\Omega} \varphi^2(x)\,d\Omega = 1$$

Thenis the following problem:

$$\min_{\varphi\in\phi_1} \int_{\Omega} [q(x) - u(x,t_0)]^2\,d\Omega$$

The problem will be traced back to a problem of mathematical programming

C/ Be

$$\phi_2 = \{\varphi(x) : \int_{\Omega} \varphi^2(x)\,d\Omega \le 1\}$$

The problem:

$$\min_{\varphi \in \Phi_1} \int_{\Omega} [\varphi(x) - u(x,t_0)]^2 \, d\Omega$$

An approximative solution is given by means of the Lagrange multiplicator method and then we prove the convergence of the approximative solution under given conditions.