Egy optimális vezérlési feladat

Szelezsán János

Tekintsük az

1) $u_t = a^2 u_{xx}$ parabolikus differenciálegyenletet, az

2) $u(x,0) = 0 \qquad x \geq 0$

$u(0,t) = h(t)$

feltételek mellett, ahol a $h(t)$ peremfeltétel olyan, hogy kielégiti az:

3) $F(t,h(t),h'(t)) = \varphi(t)$

közönséges elsőrendü differenciálegyenletet, $h(0) = 0$ feltétellel.

Legyen $F = \left\{ \varphi(t) : \varphi(t) \in C; \int_0^{t_0} \varphi(t) = A \right\}$

Feladat: Keressük meg az F halmaznak azt az elemét, amelyre az $u(x,t)$ függvény az (x_0,t_0) pontban minimumot vesz fel, azaz

$$J(\varphi) = \min_{\varphi(t) \in F} u(x_0,t_0)$$

Ha a $\varphi(t)$ függvényt vezérlő függvénynek tekintjük, akkor feladatunk egy speciális optimális vezérlésként fogható fel.

Ismeretes, hogy az (1) differenciálegyenlet megoldása az adott feltételekkel a

$$H(x,t-\tau) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} (t-\tau)^{-3/2}$$

jelöléssel

$$u(x,t) = \int_0^t H(x,t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

alakban állitható elő, ezért

$$u(x_0,t_0) = \int_0^{t_0} H(x_0,t_0-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

Tétel:

Tegyük fel, hogy a 3) differenciálegyenlet $h(t) = \emptyset(t, \varphi(t))$ megoldása olyan, hogy $\emptyset_{\varphi\varphi} = \mathrm{const} > 0$. Akkor a feladat megoldását a

$$H(x_0,t_0-t)\, \emptyset_{y'}(t,y'(t)) = C$$

differenciálegyenlet megoldásának deriváltja adja, azaz

$$\varphi(t) = y'(t)$$

ahol $y(t)$ a fenti differenciálegyenlet megoldása az $y(0)=0$, $y(t_0) = A$. **(A C egy integrálási állandó, amely a feltételekből meghatározható.)** feltételek mellett.

Bizonyitás:

A 3) differenciálegyenlet megoldása a feltételek szerint

$$h(t) = \emptyset\,(t, \varphi(t))$$

ezért

$$J(\varphi) = \int_0^{t_0} H(x_0, t_0 - \tau)\, \emptyset(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

Legyen

$$y(t) = \int_0^{t} \varphi(\tau)\, d\tau$$

Igy $y'(t) = \varphi(t)$ és $y(0) = 0$, $y(a) = A$

tehát:

$$J(\varphi) = J(y'(t)) = \int_0^{t_0} H(x_0, t_0 - t)\, \emptyset(t, y'(t))\, dt$$

Ismeretes, hogy a $J = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$ funkcionál esetén, annak szükséges feltétele, hogy az $y(x)$ függvény szélsőértéket szolgáltasson, az, hogy az $y(x)$ függvény kielégitse az

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Euler-Lagrange differenciálegyenletet.

Esetünkben az Euler-Lagrange egyenlet

$$\frac{d}{dt} \left\{ H(x_o, t_o - t) \, \phi_{y'} (t, y'(t)) \right\} = 0$$

ebből

$$H(x_o, t_o - t) \, \phi_{y'} (t, y'(t)) = C$$

A fenti differenciálegyenlet megoldásával (az $y(o) = 0$, $y(t_o) = A$ feltételek figyelembevételével) megkapjuk az optimális vezérlés primitiv függvényét: $y(t) - t$

Ebből $\varphi(t) = y'(t)$

Könnyen belátható a tett feltevés mellett, hogy az elégséges feltétel is teljesül.

Ismeretes ugyanis, hogy a $J = \int_a^b F(x,y,y') \, dx$ funkcionál esetén az elégséges feltétel a következő:

Megvizsgáljuk az un. Jacobi-féle

$$(F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{yy'}) \, u - \frac{d}{dx} (F_{y'y'} \, u') = 0$$

differenciálegyenlet megoldását az Euler-Lagrange differenciálegyenlet extremálisai ($y(x)$ megoldásai) mentén

$$(u = \frac{y(x,c)}{\partial c} \, , \quad u(o) = 0).$$

Ha az u megoldás az $x_o = 0$ ponton kivül más pontban nem metszi az x tengelyt, akkor az adott $y(x)$ extremálison a J funkcional valóban (gyenge) szélsőértéket vesz fel, mégpedig $F_{y'y'} > 0$ esetén minimumot.

Esetünkben a Jacobi egyenlet

$$-\frac{d}{dt}\left[H(x_o,t_o-t)\ \varnothing_{y'y'}(t,y'(t))\ u'(t)\right] = 0$$

Ebből a $\varnothing_{\varphi\varphi} = C$ (const) feltétel miatt

$$H(x_o,t_o-t)\ u'(t)\ C = C_1$$

azaz

$$u'(t) = \frac{C_1}{CH(x_o,\ t_o - t)}$$

De $\quad H(x_o,t_o-t) > 0 \qquad 0 \leq t < t_o$

ezért $u'(t)$ előjeltartó, vagyis a $t = 0$ pont kivételével az $u(t)$ görbe nem metszi a t tengelyt a $(0,t_o)$ intervallumban. Ez azt jelenti, hogy az elégséges feltétel teljesül.

A $\varnothing$ = const > 0 feltétel azt biztositja, hogy a $\varphi(t)$ függvény mellett a $J(\varphi)$ funkcional minimumot vesz fel.

<u>Irodalom:</u>

1 Gelfand-Fomin: Variacionnoe uszcsiszlenie.

2 R.Courant D.Hilbert: Methods of Mathematical Physics Vol.2.

Summary

Concerning a optimal control problem.

Let us consider the parabolic differential equation

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

on the conditions

$$u(x,0) = 0 \qquad x \geq 0$$
$$u(0,t) = h(t)$$

where the $h(t)$ function is such that it fulfils the first order ordinary differential equation.

$$F(t, h(t), h'(t)) = \varphi(t)$$

with the condition $h(0) = 0$

Let be: $F = \left\{ \varphi(t) : \varphi(t) \in C; \quad \int_0^{t_0} \varphi(t) = A \right\}$

Problem: is to be found that element of F set for which the funkction $u(x,t)$ takes the minimum in point (x_0, t_0), that is.

$$J(\varphi) = \min_{\varphi(t) \in F} u(x_0, t_0)$$

If we consider the function $\varphi(t)$ as control function, then our problem can be considered as a special optimal control.