Optimális vezérlés a telegráf egyenlet esetén perem-feltétellel

Szelezsán János

Tegyük fel, hogy egy folyamatot a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} + bu - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 1/$$

$$0 < x < \pi \quad , \quad t > 0$$

parciális differenciálegyenletet ír le, az alábbi feltételekkel:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x)$$

ahol a, b, c, pozitiv konstansok.

Tekintsük a

$$J(f) = \int_0^{\pi} \left[q(x) - u(x,t_o) \right]^2 dx \qquad 2/$$

funkcionált, ahol $q(x)$ egy adott függvény.

Legyen az F halmaz a következő függvényhalmaz

$$F = \left\{ f(x) : \int_0^{\pi} u(x,t_o)\varrho(x)\, dx = A \right\} \qquad 3/$$

Feladat: Keressük meg az F halmaznak azt az elemét, amelyre a 2/ funkcionál minimumot vesz fel.

Tétel:

Tegyük fel, hogy $q(x)$ és $\rho(x)$ korlátos, és folytonos $(0 \leq x \leq \pi)$, és tegyük fel, hogy a feladatnak egyetlen megoldása létezik. Akkor a megoldás:

$$f(x) = q(x) + \frac{\lambda}{2} \rho(x)$$

ahol

$$\lambda = \frac{A\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t_o) \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} q(x) \sin nx \, dx \right) \sin nx \, dx}{\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t_o) \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \rho(x) \sin nx \, dx \right) \sin nx \, dx}$$

Bizonyitás:

Ismeretes [I], hogy az 1/ differenciálegyenlet megoldását az adott peremfeltételek mellett

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n(t) \sin nx \qquad 4/$$

adja, ahol

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

és

$$T_n(t) = \begin{cases} e^{-at}\,(a^2 - b - n^2c^2)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{sh}\,(a^2-b-n^2c^2)^{\frac{1}{2}}\,t & \text{ha } n^2c^2 < a^2-b \\ te^{-at} & \text{ha } n^2c^2 = a^2-b \\ e^{-at}\,(n^2c^2 + b - a^2)^{-\frac{1}{2}}\ \sin\,(n^2c^2 + b - a^2)^{\frac{1}{2}}\,t & \text{ha } n^2c^2 > a^2 - b \end{cases}$$

Mint látjuk az $f(x)$ vezérlő függvény a b_n együtthatókban szerepel; ezért a 2) funkcionál minimumát eredményező $f(x)$ függvény meghatározását az alkalmas b_n együtthatók meghatározására vezetjük vissza.

Vegyük a 4/ végtelen sor részletösszegét a t_o pontban

$$u^{(N)}\,(x,t_o) = \sum_{n=1}^{N} b_n\, T_n\,(t_o)\,\sin n\,x$$

Erre a részösszegre vonatkozóan a funkcionál

$$J^{(N)}\,(f) = \int_0^{\pi} \left[q(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n\, T_n\,(t_o)\,\sin nx \right]^2 dx$$

lesz. A feltétel alakja

$$\int_0^{\pi} \varrho(x) \sum_{n=1}^{N} b_n\, T_n(t_o)\,\sin nx\ dx = A$$

Tekintsük a $J^{(N)}(f)$ funkcionált a $b_1,\dots,b_N$ együtthatók függvényeként. Alkalmazzuk a Lagrange multiplikátoros módszert, vagyis keressük a

$$J^{(N)}(b_1,\dots,b_N,\lambda) = \int_0^{\pi} \Big[q(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n T_n(t_o) \sin nx\Big]^2 dx +$$

$$+\lambda\Big(\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{N} b_n T_n(t_o) \sin nx \, dx - A\Big)$$

függvény minimumát a $b_1,\dots,b_N$ együtthatókra vonatkozóan. A szélsőértékre vonatkozó szükséges feltétel szerint a $b_1,\dots,b_N$ együtthatókra teljesülni kell az alábbi egyenlőségeknek:

$$\frac{\partial J^{(N)}(b_1,\dots,b_N,\lambda)}{\partial b_i} = 0; \; i=1,2,\dots,N$$

$$\frac{\partial J^{(N)}(b_1,\dots,b_N,\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

azaz

$$2 \int_0^{\pi} \left[q(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n T_n(t_o) \sin nx \right] T_i(t_o) \sin ix \, dx +$$

$$+ \lambda \int_0^{\pi} T_i(t_o) \varrho(x) \sin ix \, dx = 0 \qquad i=1,2,\ldots,N$$

és

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{N} b_n T_n(t_o) \sin nx - A = 0 \qquad 5/$$

Az integrálásokat tagonként végezve, és figyelembe véve, hogy

$$\int_0^{\pi} \sin nx \ \sin ix = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \neq i \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } n = i \end{cases}$$

valamint feltéve, hogy $T_i(t_o) \neq 0$ a következőket kapjuk:

$$2 \int_0^{\pi} q(x) \sin ix \, dx - 2 \frac{\pi}{2} b_i + \lambda \int_0^{\pi} \varrho(x) \sin ix \, dx = 0$$

azaz

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(q(x) + \frac{\lambda}{2} \varrho(x)\right) \sin ix = b_i^{(N)} \qquad i=1,2,\ldots,N$$

A kapott $b_i^{(N)}$ -ket helyettesitsük be 5/-be

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(q(x) + \frac{\lambda}{2} \varrho(x)\right) \sin nx\, dx)\, T_n(t_o) \sin nx\, dx = A$$

Ebből λ -ra azt kapjuk, hogy

$$\lambda^{(N)} = \frac{A\pi - 2 \sum_{n=1}^{N} T_n(t_o) \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} q(x) \sin nx\, dx\right) \sin nx\, dx}{\sum_{n=1}^{N} T_n(t_o) \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \varrho(x) \sin nx\, dx\right) \sin nx\, dx}$$

Azt kaptuk tehát, hogy az 1/ differenciálegyenlet megoldásának N-edik szeletére vonatkozóan a minimalizáló peremfeltétel

$$f_N(x) = q(x) + \frac{\lambda^{(N)}}{2} \varrho(x)$$

hiszen ilyen peremfeltétel mellett a

$$b_i^{(n)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[q(x) + \frac{\lambda^{(N)}}{2} \varrho(x) \right] \sin ix \qquad i=1,2,\dots,N$$

együtthatók a differenciálegyenlet megoldásának részletösszegét állitják elő és minimalizálják a $J^{(N)}(f)$ funkcionált.

Megmutatjuk, hogy $\lim_{N \to \infty} f_N(x) = f(x)$ minimalizálja az eredeti funkcionált.

Először is igaz ugyanis, hogy a

$$\lim_{N \to \infty} \lambda^{(N)} = \lambda \, .$$

határérték létezik.

Ehhez az állitáshoz be kell bizonyitani egyfelől, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t_o) \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} (q(x) \sin nx \, dx \right) \sin nx \, dx$$

létezik.

A feltétel szerint azonban $q(x)$ korlátos, azaz $|q(x)| \leq K_0$

Igy: $\int_0^{\pi} q(x) \sin nx \, dx$ korlátos.

De

$$\int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{2}{n} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

Ezért:

$$\left| \sum_{n \text{ páros}} T_n(t_o) \frac{2}{n} \int_0^{\pi} q(x) \sin nx \, dx \right| \leq |K| \sum_{n \text{ páros}} \frac{|T_n(t_o)|}{n}$$

De $\quad |T_n(t_o)| \approx \sigma(\frac{1}{n})$

Igy $\quad |K| \sum\limits_{n \text{ páros}} \frac{|T_n(t_o)|}{n} = |K| \; \sigma(\frac{1}{n^2})$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t_o) \int_0^{\pi} (\int_0^{\pi} q(x) \sin nx \, dx) \sin nx \, dx$$

sor konvergens.

Hasonlóan látható be, hogy a tett feltevés mellett

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t_o) \int_0^{\pi} (\int_0^{\pi} \varrho(x) \sin nx \, dx) \sin nx \, dx$$

sor is konvergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t_0) \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \varrho(x) \sin nx \, dx \right) \sin nx \, dx$$

sor is konvergens.

Beláttuk tehát, hogy $\lim\limits_{N \to \infty} \lambda^{(N)} = \lambda$ létezik. Világos, hogy létezik a

$$\lim_{N \to \infty} f_N(x) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

határérték is, és mivel

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx$$

$$n=1,2,\dots.$$

$$b_n^{(N)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_N(x) \sin nx$$

ezért

$$\lim_{N \to \infty} b_n^{(N)} = b_n$$

Bebizonyitjuk, hogy

$$\lim_{N \to \infty} J^{(N)} (f_N(x)) = J(f)$$

Igaz ugyanis, hogy

$$\left| J^{(N)}(f_N) - J(f) \right| = \left| \int_0^{\pi} \left\{ \left[q(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(N)} T_n(t_0) \sin nx \right]^2 - \right. \right.$$

$$\left. - \left[q(x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n(t_0) \sin nx \right]^2 \right\} dx =$$

$$= \left| \int_0^{\pi} \left\{ 2q(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(N)} T_n(t_0) \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n(t_0) \sin nx \right\} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n(t_0) \sin nx - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(N)} T_n(t_0) \sin nx \right\} dx \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_0^{\pi} \left[2q(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(N)} T_n(t_0) \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n(t_0) \sin nx \right]^2 dx} \; \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n(t_0) \sin nx - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(N)} T_n(t_0) \sin nx \right]^2 dx} \leq$$

$$\leq K_0 \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{N} (b_n - b^{(N)}) T_n(t_0) \sin nx + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n T_n(t_0) \sin nx \right]^2$$

Végezzük el a négyzetreemelést

$$\int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{N} (b_n - b_n^{(N)})\, T_n(t_o) \sin nx \right]^2 +$$

$$+ 2 \left\{ \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_n^{(N)})\, T_n(t_o) \sin nx \right\} \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n\, T_n(t_o) \sin nx \right\} +$$

$$+ \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n\, T_n(t_o) \sin nx \right\}^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_n^{(N)})^2\, T_n^2(t_o) + 2 \int_0^\pi \left\{ \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_n^{(N)})\, T_n(t_o) \sin nx \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ b_n\, T_n(t_o) \sin nx \right\} + \int_0^\pi \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n\, T_n(t_o) \sin nx \right\}^2 dx$$

A $\sum_{n=1}^{N} (b_n - b_n^{(N)})\, T_n(t_o) \sin nx$ összeg korlátos. A

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, T_n(t_o) \sin nx$ sor konvergens /a differenciálegyenlet megoldását állitja elő az (x,t_o) pontban/ ezért az N megválasztható ugy, hogy

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n T_n(t_o) \sin nx \right| < \varepsilon_1$$

legyen. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$2 \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_n^{(N)}) T_n(t_o) \sin nx \right\} \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n T_n(t_o) \sin nx \right\} +$$

$$+ \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n T_n(t_o) \sin nx \right\}^2 dx \leq 2\pi K_1 \varepsilon_1 + \pi \varepsilon_1^2$$

A $\sum_{n=1}^{N} (b_n - b_n^{(N)})^2 T_n^2(t_o)$ összeget bontsuk két részre

$$\sum_{n=1}^{N} (b_n - b_n^{(N)})^2 T_n^2 (t_o) = \sum_{n=1}^{n_o} (b_n - b_n^{(N)})^2 T_n^2 (t_o)$$

$$+ \sum_{n=n_o}^{N} (b_n - b_n^{(N)})^2 T_n^2 (t_o)$$

Az első összegben

$$\lim_{N \to \infty} b_n^{(N)} = b_n \qquad (n=1,2,\dots,n_o)$$

miatt

$$\sum_{n=1}^{n_o} (b_n - b_n^{(N)})^2 \, T_n^2 (t_o) < \varepsilon_2 \qquad \text{hacsak } N > N_1 .$$

Vezessük be a

$$\max_{n_o \leq n \leq N} (b_n - b_n^{(N)})^2 = K_2 \qquad \text{jelölést.}$$

Igy $\sum_{n=n_o}^{N} (b_n - b_n^{(N)})^2 \, T_n^2(t_o) = K_2 \sum_{n=n_o}^{N} T_n^2 (t_o)$

Ha $n^2c^2 > a^2 - b$ akkor

$$T_n^2 (t_o) < \frac{1}{n^2c^2 + b - a^2}$$

és igy a $\sum_{n=1}^{\infty} T_n^2 (t_o)$ sor konvergens, mert egy konvergens sorral majorálható.

Ezért van olyan n_o , hogy

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} T_n^2(t_0) \leq \varepsilon_3$$

és méginkább

$$\sum_{n=n_0}^{N} T_n^2(t_0) \leq \varepsilon_3$$

Igy
$$\sum_{n=n_0}^{N} (b_n - b_n^{(N)})^2 \; T_n^2(t_0) \leq K_2 \, \varepsilon_3 .$$

Legyen $N > \max(N_1, n_0)$.

Azt kaptuk tehát, hogy:

$$\left| J^{(N)}(f_N(x)) - J(f(x)) \right| \leq \pi K_0 (2\pi K_1 \varepsilon_1 + \pi \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2 + K_2 \varepsilon_3)$$

azaz

$$\lim_{N \to \infty} J^{(N)}(f_N(x)) = J(f(x))$$

Viszont

$$J^{(N)}\left(q(x) + \frac{\lambda^{(N)}}{2} \varrho(x)\right) \leq J(g(x)) \qquad N=1,2,\ldots$$

ahol $g(x)$ egy tetszőleges megengedett függvény, ezért

$$J\left(q(x) + \frac{\lambda}{2} \varrho(x)\right) \leq J(g(x)).$$

Irodalom:

[1] H.F. Weinberger: A First Course in Partial Differential Equations (Blaisdell Publ. Comp. New York-Torontó, London, 1965).

Summary

Optimal control in case telegraph equation with boundary condition.

Let us suppose that a process is described by the partial differential equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} + bu - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$o < x < \pi, \qquad t > o.$$

with the following conditions:

$$u(o,t) = u(\pi,t)$$

$$u(x,o) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,o) = f(x)$$

where a,b,c are positive constants.

Let us consider the functional

$$J(f) = \int_o^{\pi} \left[q(x) - u(x,t_o)\right]^2 dx \qquad 1/$$

where $q(x)$ is a given function. Let the set F be the following function set

$$F = \left\{ f(x) : \int_0^{\pi} \varrho(x) \; u(x,t_0)\, dx = A \right\}$$

<u>Problem</u>: Let us find that element of F set, for which the functional 1/ renders the minimum.

We have obtained: Let us suppose that $q(x)$ and $\varrho(x)$ are bounded and let us suppose that the problem has one solution. Then the solution of the problem is:

$$f(x) = q(x) + \frac{\lambda}{2} \varrho(x)$$

where

$$\lambda = \frac{A\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t_0) \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} q(x) \sin nx\, dx \right) \sin nx\, dx}{\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t_0) \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \varrho(x) \sin nx\, dx \right) \sin nx}$$