Egyenletek megoldása szakaszonkénti perturbációval.

Frey Tamás

1. §. Bevezetés.

A Newton-Raphson-féle un. érintőmódszert ill. különböző változatait ujabban egyre gyakrabban alkalmazzák nemcsak egyenletek gyökeinek, hanem általános operátoregyenletek megoldásainak numerikus meghatározására (l. pl. [1]). A finomitott eljárások általában igen gyorsan konvergálnak - ha elég jó közelitésből tudunk elindulni. A gyakorlati feladatoknál azonban éppen ez utóbbi jelenti a legsulyosabb problémát. Jólismertek pl. az algebrai egyenleteknél a Newton-módszer alkalmazása során fellépő jelenségek (l. pl. [2]). Ez az oka annak, hogy az egyenletek zérushelyeinek numerikus meghatározására még olyan, látszólag sokkal munkaigényesebb módszereket is igénybe vettek, mint pl. differenciálegyenletek numerikus integrálása (l. pl. [3]). Az alapgondolat: az $y = f(x)$ kapcsolat minden olyan szakaszon, ahol f monoton, egyértelmüen meghatározza az inverz $x = g(y)$ kapcsolatot is; emellett itt g differenciálható, ha f is ilyen, és ekkor $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f^1(x)}$ érvényes. Ha tehát $\hat{x}$ a keresett x_0 zérushely egy olyan közelitése, amelyeket f egy monoton szakasza köt össze, és f itt differenciálható, továbbá $\hat{y} = f(\hat{x})$, akkor x_0 kiszámitható a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f^1(x)} \; ; \; x = \hat{x}; \; y = \hat{y}$$

kezdeti-érték probléma $y = 0$-ig történő numerikus integrálásával. Sajnos, algebrai egyenleteknél - különösen ha valamennyi zérushelyre szükség van - még az a követelmény se biztositható, hogy $\hat{x}_i$ és $x_{o,i}$ minden i-re egy-egy közös monoton szakaszra essék.

Ezért a fenti alapgondolatot az alábbi módon próbáltuk továbbfejleszteni: a megoldandó egyenletet, ill. rendszert egy t paraméter függvényévé tesszük, éspedig olymódon, hogy t egy rögzitett értékénél, $t = t_o$-nál legyen ismert a választott alak, $\varphi(x,t)$ valamennyi megoldása, t egy másik rögzitett értékénél viszont, pl. $t=t_1$-nél $\varphi(x,t)$ éppen a megoldandó egyenlettel legyen azonos, azaz legyen

$$\varphi(x, t_1) = f(x),$$

továbbá a

$$\varphi(x,t_o) = 0$$

egyenlet megoldásai legyenek $x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}$. Ekkor - amennyiben φ mindenütt differenciálható, a

$$\varphi[x(t),t] \equiv 0$$

azonosságot kielégitő $x(t)$ függvények a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \equiv 0 \qquad (1)$$

differenciálegyenlet megoldásai; ha tehát ezt a $t = t_o$; $x = \hat{x}_i$ kezdeti feltétel mellett numerikusan integráljuk $t = t_1$-ig, akkor $x(t_1)=x_{o,i}$ érvényes lesz. A φ függvény megfelelő megválasztása biztositja, hogy (1) numerikus integrálása során a $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ feltételt kielégitő helyeket elkerülhessük.

Gyakorlatilag, algebrai egyenletek megoldása során ezt a következőkép próbáltuk biztositani: a megoldandó $P_n(z) = 0$ egyenlet zérushelyeinek viszonylag durva közelitéseiből megkonstruáltuk a $Q_n(z) = \prod (z-\hat{z}_i)$ polinomot, ill. az $R_{n-1}(z) = P_n(z) - Q_n(z)$ különbséget. Ezekből konstruáljuk a

$$\varphi(z,t) = Q_n(z) + tR_{n-1}(z) + \Psi(t)\left[Q_n(z) + R_{n-1}(z)\right] ,$$

függvényt;

$\Psi(t)$ itt tetszőleges, ötször folytonosan differenciálható, a $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$ feltételt kielégitő függvény, amelyet az integráció során szakaszonként konstruáltunk $t(\tau)$ polinomjaiból dinamikus programozással olymódon, hogy $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|$ a lehető legnagyobb legyen, de a $\Psi(1) = 0$ feltétel is biztositódjék. A választott módszer viszonylag magas fokszámu polinomok, sőt általánosabb operátoregyenletek esetén is nagyon jónak bizonyult mindaddig, amig nem kerültek egymáshoz nagyon közel a zérushelyek. Bonyolult szürők méretezése során azonban olyan 28-40-edfoku polinomok zérushelyeinek megállapitását is el kellett végeznünk, amelyeknek 7-7, ill. 10-10 zérushelye egymástól 10^{-3} - -10^{-4} távolságban feküdt. Itt - a numerikus integrálás során a Runge-Kutta módszert használva, változó lépésközzel - már kb. 10^4-10^6 számu részintervállumra kellett a $0 \leq t \leq 1$ intervallumot felosztani, hogy a zérushelyeket 5-6 értékes jegyre pontosan meg tudjuk állapitani. Ez pedig még közepes sebességü számológéppel is nagyon időigényes.

Ezért a fenti módszert célszerünek látszott ugy átalakitani, hogy a Newton-módszer azon válfaja általánositásának lehessen tekinteni, amelynél érintőegyenes helyett másod- ill. magasabbfoku parabolát fektetünk át a pillanatnyi közelitésnek megfelelő ponton. Az alábbiakban ezen módszer leirását, hibabecslését, továbbá általános operátoregyenletekre történő alkalmazását ismertetjük.

2.§. A Runge-Kutta-módszer általánositásáról.

A Runge-Kutta-módszer általánositásával több munka is foglalkozott (l. pl. [4,] [5]). Ezek azonban elsősorban az eljárás fokszámának növelését vizsgálták. Az alábbiakban olyan irányu általánositással foglalkozunk, ahol nem érintőegyenesekkel, hanem érintőparabolákkal operálva konstruáljuk meg az integrálgörbe pontjait. [5] alatti munkánkban már szerepelt ilyen jellegü általánositás, de nem szisztematikusan használtuk.

Tekintsük tehát először az

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (2)$$

differenciálegyenletet és tegyük fel, hogy a tekintett tartományban f elég sokszor folytonosan differenciálható. Ekkor $x(t)$

differenciálhányadosai a $D = \frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial x}$ operátorral kifejezhetőek (α pl. [5]). Minthogy azonban a D operátorral kapcsolatosan több uj formulára is szükségünk lesz, a vele kapcsolatos formális szabályokat az alábbiakban összefoglaljuk.

D magasabb hatványait a

$$D^{n+1} = D^n \frac{\partial}{\partial t} + f\, D^n \frac{\partial}{\partial x} \tag{3}$$

reláció révén értelmezzük. Igy rekurzióval a

$$D^{n+1} = D^n \frac{\partial}{\partial t} + f\, D^n \frac{\partial}{\partial x} = D^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f\, D^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} +$$

$$+ f\, D^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + f^2\, D^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} =$$

$$= D^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2f\, D^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + f^2\, D^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

relációra jutunk, ha feltesszük, hogy a szereplő parciális deriváltak folytonosak, és igy a differenciálások sorrendje felcserélhető. Ha tehát $k \leq n$-re még érvényes a

$$D^{n+1} = \binom{k}{o} D^{n+1-k} \frac{\partial^k}{\partial t^k} + \binom{k}{1} f D^{n+1-k} \frac{\partial^k}{\partial t^{k-1}\partial x} + \dots +$$

$$+ \binom{k}{r} f^r D^{n+1-k} \frac{\partial^k}{\partial t^{k-r}\partial x^r} + \dots + \binom{k}{k} f^k D^{n+1-k} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \qquad (4)$$

reláció, akkor (3)-at ujból alkalmazva

$$D^{n+1} = \binom{k}{o} D^{n+1-k-1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} + \left\{\binom{k}{o} + \binom{k}{1}\right\} f D^{n+1-k-1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^k \partial x}$$

$$+ \left\{\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right\} f^2 D^{n+1-k-1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k-1}\partial x^2} + \dots +$$

$$+ \left\{\binom{k}{r} + \binom{k}{r+1}\right\} f^{r+1} D^{n+1-k-1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k-r}\partial x^{r+1}} + \dots +$$

$$+ \binom{k}{k} f^{k+1} D^{n+1-k-1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}$$

adódik, és igy - a binonciális együtthatók ismert tulajdonságai miatt (4) érvényes $k+1 \leq n+1$-re is. Igy a $D^{o} \equiv I$ relációt is figyelembe véve, a (3) - (4) formulák alapján ($k+1=n+1$ választással élve) D^{n+1} a D operátor formális (n+1)-edik hatványával azonos képletet eredményez. Teljes indukcióval most már azonnal belátható, hogy a D^n operátort összegre ill. szorzatra épp ugy kell alkalmaznunk, mint a $\frac{d^n}{dt^n}$ operátort.

Valóban, $n=1$ esetén, D definiciója alapján

$$D(a+b) = Da + Db \tag{5}$$

és

$$D(a.b) = aDb + bDa \tag{6}$$

érvényes. Tegyük fel, hogy $n=N$-re még érvényesnek bizonyult a

$$D^N(a+b) = D^N a = D^N b \tag{7}$$

ill.

$$D^N(a.b) = \binom{N}{o} a.D^N b + \binom{N}{1} Da.D^{N-1} b + \ldots + \binom{N}{r} Da^r.D^{N-r} b +$$

$$+ \ldots + \binom{N}{N} b.D^N a \tag{8}$$

formula is. Ekkor (3), ill. (7)-(8) felhasználásával

$$D^{N+1} (a+b) = D^N \frac{\partial}{\partial t} (a+b) + f D^N \frac{\partial}{\partial x} (a+b) =$$

$$= D^N \frac{\partial}{\partial t} a + fD^N \frac{\partial}{\partial x} a + D^N \frac{\partial}{\partial t} b + fD^N \frac{\partial}{\partial x} b =$$

$$= D^{N+1} a + D^{N+1} b$$

ill.

$$D^{N+1}(a\cdot b) = D^N \frac{\partial}{\partial t}(a.b) + f D^N \frac{\partial}{\partial x}(a.b) =$$

$$= D^N\left(b\frac{\partial a}{\partial t} + a\cdot\frac{\partial b}{\partial t}\right) + f D^N\left(\frac{\partial a}{\partial x} + a\frac{\partial b}{\partial x}\right) =$$

$$= \binom{N}{0} b D^N \frac{\partial a}{\partial t} + \binom{N}{1} Db\, D^{N-1}\frac{\partial a}{\partial t} + \dots + \binom{N}{N}\frac{\partial a}{\partial t} D^N b +$$

$$+ f\binom{N}{0} b D \frac{\partial a}{\partial x}\; f\binom{N}{1} Db\, D^{N-1}\frac{\partial a}{\partial x} + \dots + f\binom{N}{N}\frac{\partial a}{\partial x}D^N b +$$

$$+\binom{N}{0} a D^N \frac{\partial b}{\partial t} + \binom{N}{1} Da\, D^{N-1}\frac{\partial b}{\partial t} + \dots + \binom{N}{N}\frac{\partial b}{\partial t} D^N a +$$

$$+f\binom{N}{0} a D^N\frac{\partial b}{\partial x} + f\binom{N}{1} Da\, D^{N-1}\frac{\partial b}{\partial x} + \dots + f\binom{N}{N}\frac{\partial b}{\partial x} D^N a =$$

$$=\binom{N}{0} b D^{N+1} a + \left\{\binom{N}{N}+\binom{N}{1}\right\} Db\, D^N a + \left\{\binom{N}{N-1}+\binom{N}{2}\right\} D^2 b\, D^{N-1} a +$$

$$+\dots+\left\{\binom{N}{1}+\binom{N}{N}\right\} D^N b\, Da + \binom{N}{0} a D^{N+1} b,$$

és ezek a binomiális együtthatók jólismert tulajdonságai szerint azt mutatják, hogy (7), ill. (8) $n=N+1$-re is érvényesek. Eszerint (7) és (8) minden N-re teljesül.

Ugyancsak teljes indukcióval igazoljuk a

$$D(D^n g) = D^{n+1} g + n\, Df\, D^{n-1}\frac{\partial}{\partial x} g \qquad (9)$$

reláció érvényességét is. Valóban, $n=1$-re

$$D\left(\frac{\partial g}{\partial t} + f\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial t\,\partial x} +$$

$$+f\frac{\partial^2 g}{\partial t\,\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = D^2 g + \frac{\partial g}{\partial x}\cdot Df$$

azaz ekkor (9) érvényes. Ha n=N-re már igazoltuk, akkor (3) alapján

$$D(D^{N+1}g) = D\left[D^N \frac{\partial g}{\partial t} + f D^N \frac{\partial g}{\partial x}\right] =$$

$$= D^{N+1}\frac{\partial g}{\partial t} + f D^{N+1}\frac{\partial g}{\partial x} + N.Df D^{N-1}\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} +$$

$$+ f.N.Df\, D^{N-1}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + Df.D^N \frac{\partial g}{\partial x} =$$

$$= D^{N+2}g + N.Df D^N \frac{\partial g}{\partial x} + Df D^N \frac{\partial g}{\partial x} = D^{N+2}g + (N+1)Df D \frac{\partial g}{\partial x}$$

tehát (9) érvényes n=N+1-re is. Igy (9) n minden értékére igaz.

Tekintsük most (9) helyett a $D^n(Dg)$ kifejezést. (3) szerint

$$D^n(Dg) = D^{n-1}\frac{\partial}{\partial t}(Dg) + f\, D^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}(Dg).$$

Mármost D definiciója szerint

$$\frac{\partial}{\partial t}(Dg) = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + f\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\,\frac{\partial g}{\partial x} = D\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}$$

ill.

$$\frac{\partial}{\partial x}(Dg) = \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial g}{\partial x} = D\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}$$

Ezeket helyettesitve, és (7)-et ill. (8)-at felhasználva

$$D^n(Dg) = D^{n-1}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right] + fD^{n-1}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial t\,\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right] = D^{n-1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) + fD^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) +$$

$$+ D^{n-1}\frac{\partial}{\partial t}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) + fD^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) = D^n\frac{\partial g}{\partial t} + D^n\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) =$$

$$= D^n\frac{\partial g}{\partial t} + fD^n\frac{\partial g}{\partial x} + \binom{n}{1}DfD^{n-1}\frac{\partial g}{\partial x} + \binom{n}{2}D^2fD^{n-2}\frac{\partial g}{\partial x} + \dots + \binom{n}{n}D^nf\cdot\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$= D^{n+1}g + \binom{n}{1}DfD^{n-1}\frac{\partial g}{\partial x} + \binom{n}{2}D^2fD^{n-2}\frac{\partial g}{\partial x} + \dots \binom{n}{n}\frac{\partial g}{\partial x}D^nf \qquad (10)$$

is érvényes.

A fentieken kivül szükségünk van a

$$\frac{\partial}{\partial x}(Dg) = D\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} \qquad (11)$$

továbbá a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Dg) = D\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial g}{\partial x} \qquad (12)$$

ill. általában a

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(Dg) = D\frac{\partial^n g}{\partial x^n} + \binom{n}{1}\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^n g}{\partial x^n} + \binom{n}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^{n-1} g}{\partial x^{n-1}} +$$

$$+ \dots \binom{n}{n}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} \qquad (13)$$

relációkra, amelyek teljes indukcióval, a fentiek mintájára könnyen beláthatóak.

Végül fel kell hasznalnunk

$$D^r\left[\frac{\partial^s}{\partial x^s}(Dg)\right]$$

alaku kifejezéseket is, amelyeket nem adunk meg - bonyolultságuk miatt - zart alakban, hanem szükség esetén (13), (10) ill. (8) révén kepezünk.

Marmost fenti relacióink közül (9) alapján az $x(t) = f(x,t)$ differenciálegyenlet által meghatározott $x(t)$ függvények magasabb deriváltjai a D operator, ill. a $g \equiv f$ helyettesités révén meghatározhatóak, éspedig

$$x = f;$$

$$x = Df;$$

$$x = D(Df) = D^2f + f'_x Df;$$

$$x = Dx = D^3f + 3DfDf'_x + f'_x D^2f + f'_x Df;$$

$$x = D^4f + 6DfD^2f'_x + 3f_{xx}(Df)^2 + \qquad (14)$$

$$+ 4D^2fDf'_x + 7f'_x Df'_x Df + f'_x D^3f + f'^2_x D^2f + f'^3_x Df;$$

stb.

A valasztott $\Delta t = h$-hoz tartozó k növekményt a Runge-Kutta módszer mintajara helyi növekményekből állitjuk elő, ezeket azonban következetesen legalább másodfoku alakban vesszük fel, éspedig olymódon, hogy k és Δx a h mennél magasabb hatványáig egyezzék meg. Ehhez a kiindulási bázispontban a (t_0, x_0) pontban f értéke mellett $\frac{\partial f}{\partial x}$ ill. $\frac{\partial f}{\partial t}$ értékére is szükségünk van, hogy igy Df is képezhető legyen. Ezek révén először meghatározzuk a k_1 ill. k_1^* növekményt a

$$k_1 = hf_0 + a_{12}h^2 Df_0 + a_{13}h^3 f'_{x,0} Df_0 + a_{14}h^4 f'^2_{x,0} Df_0 +$$

$$+ \cdots + a_{1n}h^n f'^{n-2}_{x_1 0} Df_0 \tag{15}$$

$$k_1^* = hf_0 + a_{22}h^2 Df_0 + a_{23}h^3 f'_{x_1 0} Df_0 + a_{24}h^4 f'^2_{x_1} Df_0 + \cdots \tag{16}$$

alakban. Itt a 0 alsó index, a (t_0, x_0) helyre vonatkozik, k_1 a k kialakitására szolgáló sulyozott középérték egyik eleme, végül k_1^* arra szolgál, hogy a következő segédpont (t_1, x_1) helyét kijelöljük.

A további középérték-képző elemek meghatározásánál már több utat követhetünk; ugyanis a (t_1, x_1) pontbeli f_1, továbbá f_0, Df_0 és $f_{x,0}$ segitségével felépithetünk h-ban magasabb fokszámu középértékképző elemeket. Lényegesen több számitási munkával azonban $f_{x,1}$ és Df_1 felhasználásával is megtehetjük ezt. Utóbbi módszer egy szempontból mégis előnyösnek fog bizonyulni, ezért ilyen tipusu formulát is levezetünk.

Igy pl. negyedrendü formulát épithetünk fel a

$$k_1 = hf_0 + a_{12}h^2 Df_0 + a_{13}h^3 f'_{x,0} Df_0 + a_{14}h^4 f'^2_{x_1 0} Df_0$$

$$k_1^* = E_1 h f_0 + a_{22}h^2 Df_0 + a_{23}h^3 f'_{x_1} Df_0 + a_{24}h^4 f'^2_{x_1 0} Df_0 \tag{17}$$

$$t_1 = t_0 + E_1 h; \quad x_1 = x_0 + k_1^*$$

$$k_2 = hf_1 + a_{32}h^2 Df_0 + a_{33}h^2 f'_{x_1 0}(f_1 - f_0) + a_{34}h^3 f'^2_{x_1 0}(f_1 - f_0)$$

$$k = R_1 k_1 + R_2 k_2$$

resp. a

$$\tilde{k}_2 = hf_1 + \tilde{\alpha}_{32} h^2 Df_1 + \tilde{\alpha}_{33} h^3 f'_{x,1} Df_1 + \tilde{\alpha}_{34} h^4 f'_{x,1} Df_1 \qquad (18)$$

módon.

Mindkét formulatipus használata esetén az 1 indexü (t.i. a (t_1, x_1) pontbeli) értékeket az (x_0, t_0) pontbeli deriváltak segitségével kell kifejeznünk, hogy k és Δx egyeztetéséről gondoskodni tudjunk. E célból k_1^* -ot a

$$k_1^* = E_1 hf_0 + \Theta\ (h;f) \qquad (19)$$

alakba irjuk. Ekkor - feltéve, hogy f elég sokszor folytonosan differenciálható -

$$f_1 = f(t_0 + E_1 h;\ x_0 + E_1 hf_0 + \Theta(h;f)) = f_0 + E_1 h(f'_{t,0} + f \cdot f'_{x,0})$$

$$+ \Theta\ f'_{x,0} + \frac{1}{2!}\left[f''_{t,t,0} E_1^2 h^2 + 2E_1 h(E_1 hf_0 + \Theta) f_{t,x,0} + (E_1 hf_0 + \Theta)^2 f''_{xx,0}\right] + \dots$$

- ahol a 0 index a (t_0, x_0) helyre vonatkozik, amelyet a továbbiakban elhagyunk, ha ez nem vezethet félreértésre. Felhasználva tehát a D operátort is

$$f_1 = f(t_0 + E_1 h;\ x_0 + E_1 hf + \Theta) =$$

$$= f + E_1 hDf + \Theta\ f'_x + \frac{1}{2!} E_1^2 h^2 D^2 f + E_1 h \Theta D f'_x +$$

$$+ \frac{1}{2} \Theta^2 f''_{xx} + \frac{1}{3!} E_1^3 h^3 D^3 f + \frac{1}{2!} E_1^2 h^2 \Theta D^2 f'_x + \frac{1}{2!} E_1 h \Theta^2 D f''_{xx} + \qquad (20)$$

$$+ \frac{1}{3!} \Theta^3 f'''_{xxx} + \frac{1}{4!} E_1^4 h^4 D^4 f + \frac{1}{3!} E_1 3h^3 \Theta D^3 f'_x + \dots$$

Hasonlóképp - bár erre egyenlőre csak a második tipusu formulák használata során lesz szükség -

$$Df(t_0+E_1h;\ x_0+E_1hf_0+\textcircled{H}) = Df + E_1h\,D(Df) + \textcircled{H}\frac{\partial}{\partial x}(Df)$$
$$+\frac{1}{2!}E_1^2h^2D^2(Df) + E_1h\textcircled{H}\,D\Big(\frac{\partial}{\partial x}(Df)\Big) + \frac{1}{2!}\textcircled{H}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Df) +$$
$$+\frac{1}{3!}E_1^3h^3D^3(Df) + \frac{1}{2!}E_1^2h^2\textcircled{H}\,D^2\Big[\frac{\partial}{\partial x}(Df)\Big] + \dots \qquad (21)$$

ill.

$$f'_x(t_0+E_1h;\ x_0+E_1hf_0+\textcircled{H}) = f'_x\,E_1h\,Df'_x + \textcircled{H}.\,f''_{xx} +$$
$$+\frac{1}{2!}E_1^2h^2D^2f'_x + E_1h\textcircled{H}\,Df''_{xx} + \dots \qquad (22)$$

Ezek felhasználásával tekintsük először a (17) tipusu formulákat. Felhasználva $\textcircled{H}$ részletes alakját

$$hf_1 = hf + E_1h^2Df + f'_x\,(a_{22}h^3Df + a_{23}h^4f'_xDf +$$
$$+a_{24}h^5f'^2_xDf + \dots) + \frac{1}{2}E_1^2h^3D^2f + E_1h^2Df'_x\,(a_{22}h^2Df +$$
$$+a_{23}h^3f'_xDf + \dots) + \dots + \frac{1}{6}E_1^3h^4D^3f + \dots \qquad (23)$$

adódik. Eszerint - k és $\Delta x\ (t_0, x_0)$ helyre vonatkozó hatványsorának azonos tipusu tagjai együtthatóit összevetve - az ismeretlen együtthatókra az alábbi egyenletek adódnak:

f együtthatói: 1 ill. $R_1 + R_2$

Df együtthatói: $\frac{1}{2}$ ill. $a_{12} R_1 + a_{32} R_2 + R_2E_1$

D^2f együtthatói: $\frac{1}{6}$ ill. $R_2 \cdot \frac{E_1^2}{2}$

D^3f együtthatói: $\frac{1}{24}$ ill. $R_2 \frac{E_1^3}{6}$

E két utóbbi relációból

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{6} R_2 E_1^3, \text{ azaz } \frac{1}{4} = R_2E_1^3$$

ill.

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} R_2 E_1^2, \text{ azaz } \frac{1}{3} = R_2E_1^2$$

A másodikat az elsővel osztva

$$\frac{3}{4} = E_1$$

adódik. Igy

$$\frac{1}{4} = R_2 \frac{27}{64}, \text{ azaz } R_2 = \frac{16}{27} .$$

Igy $R_1 = \frac{11}{27}$.

a_{12} és a_{32} csak a második relációban lépnek fel. Szimmetriaokokból az $a_{12} = a_{32} = a$ választással élve

$$\frac{1}{2} = a + \frac{16}{27} \cdot \frac{3}{4} = a + \frac{4}{9} ,$$

amiből $a = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18} = a_{12} = a_{32}$.

$f'_x\, D^2f$ együtthatói: $\frac{1}{24}$ ill. $R_2\, a_{33}\, \frac{E_1^2}{2}$.

Igy

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{6}\, a_{33}$$

azaz

$$a_{33} = \frac{1}{4}\,.$$

$DfDf'_x$ együtthatói: $\frac{1}{8}$ ill. $R_2\, E_1\, a_{22}$,

azaz $\quad a_{22} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{E_1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{27}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{32}\,.$

A három "feleslegben lévő" együttható, a_{23}, a_{24} ill. a_{34} megállapitható pl. ugy, hogy ötödrendü tagokat egyeztetünk a segitségükkel. Egyszerübb azonban, ha zérusnak választjuk őket. Igy $a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0$.

Végül

$f'_x\, Df$ együttható: $\frac{1}{6}$ ill. $R_1\, a_{13} + R_2 \left\{a_{22} + E_1 \cdot a_{33}\right\}$

amiből $a_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} \left\{a_{22} + E_1 a_{33}\right\} = \frac{1}{2}\, \frac{9}{11} - \frac{16}{11} \left\{\frac{9}{32} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right\}$

$= \frac{9-9-6}{22} = -\frac{3}{11}\,.$

f'^2_x Df együtthatói: $\frac{1}{24}$ ill. $R_1 a_{14} + R_2 \{ a_{23} + a_{33} \cdot a_{22} +$

$+ a_{34} \cdot E_1$, amiből $a_{14} = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} \{ a_{23} + a_{33} a_{22} + a_{34} \}$

$= \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{11} - \frac{1}{11} \cdot \{ 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{2} + 0 \} = \frac{9}{88} - \frac{9}{88} = \emptyset.$

Formuláink tehát:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf_o + \frac{1}{18} h^2 Df_o - \frac{3}{11} h^3 f'_{x,o} Df_o \\
k_1^* &= \frac{3}{4} hf_o + \frac{9}{32} h^2 Df_o \\
k_2 &= hf_1 + \frac{1}{18} h^2 Df_o + \frac{1}{4} h^2 f'_{x,o}(f_1 - f_o) \\
k &= \frac{11}{27} k_1 + \frac{16}{27} k_2
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Áttérve a másik formulatipusra, ott a

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf_o + a_{12} h^2 Df_o + a_{13} h^3 f'_{x,o} Df_o + a_{14} h^4 f'^2_{x,o} Df_o \\
k_1^* &= E_1 hf_o + a_{22} h^2 Df_o + a_{23} h^3 f'_{x,o} Df_o + a_{24} h^4 f'^2_{x,o} Df_o \\
k_2 &= hf_1 + \tilde{a}_{32} h^2 dF_1 + \tilde{a}_{23} h^3 f'_{x,1} Df_1 + \tilde{a}_{34} h^4 f'^2_{x,1} Df_1
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$k = R_1 k_1 + R_2 \tilde{k}_2$$

relációkból indulunk ki. Könnyen belátható, hogy a paraméterek száma igy is csak negyedfoku formula létrehozását teszi lehetővé.

hf_1 kifejtését egyébként (20) alatt megadtuk. Hasonlókép

$$h^2Df_1 = h^2Df\left(t_0 + \frac{3}{4}h;\ x_0 + k_1^*\right) = h^2Df_0\left(t_0 + \frac{3}{4}h;\ x_0 \frac{3}{4}hf_0 + \Theta\right) =$$

$$= h^2Df_0 + E_1h^3D(Df)_0 + \Theta h^2\frac{\partial}{\partial x}(Df) + \frac{1}{2!}E_1^2h^4D^2(Df)_0 + \cdots$$

$$= h^2Df_0 + E_1h^3D^2f_0 + E_1h^3f'_{x,0}Df_0 + a_{22}h^4Df_0\left[Df'_{x,0} + f'^2_{x,0}\right] \tag{26}$$

$$+ \frac{E_1^2}{2}h^4\left[D^3f + 2DfDf'_x + f'_x \cdot D^2f\right]$$

Egyenletünk tehát:

f együtthatói: 1 ill. $R_1 + R_2$

Df együtthatói: $\frac{1}{2}$ ill. $a_{12}R_1 + a_{32}R_2 + R_2E_1$

D^2f együtthatói: $\frac{1}{6}$ ill. $R_2\left\{\frac{E_1^2}{2} + a_{32} \cdot E_1\right\}$

D^3f együtthatói: $\frac{1}{24}$ ill. $R_2\left\{\frac{E_1^3}{3} + a_{32}\frac{E_1^2}{2}\right\}$

Az $E_1 = 1$ választással élve, a két utolsó egyenletből

$$4 = \frac{\frac{1}{2} + a_{32}}{\frac{1}{6} + a_{32}/2};\quad 4 + 12a_{32} = 3 + 6a_{32};\quad a_{32} = -\frac{1}{6}$$

Igy $\frac{1}{6} = R_2\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right\}$; $R_2 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, és $R_1 = \frac{1}{2}$,

azaz

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a_{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{2};\quad a_{12} = \frac{1}{6}$$

$f'_x D^2 f$ együtthatói: $\frac{1}{24}$ ill. $R_2 \left\{ a_{32} \frac{E_1^2}{2} + a_{33} E_1 \right\}$ amiből

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{12} + a_{33} \right\}, \text{ azaz } a_{33} = \frac{1}{12} .$$

$Df\,Df'_x$ együtthatói: $\frac{1}{8}$ ill. $R_2 \left\{ E_1 a_{22} + a_{32} (a_{22} + E_1^2) + \right.$

$\left. + a_{33} E_1 \right\}$. Ennek alapján

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{6} a_{22} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} ; \; \frac{5}{6} a_{22} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} ; \; a_{22} = \frac{2}{5} .$$

A továbbiakban élhetünk az $a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0$ választással.

Végül

$f'_x Df$ együtthatói: $\frac{1}{6}$ ill. $R_1 a_{13} + R_2 \left\{ a_{22} + a_{32} E_1 + a_{33} \right\}$,

amiből

$$\frac{1}{3} = a_{13} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} ;$$

$$a_{13} = \frac{20 - 24 + 10 - 5}{60} = \frac{1}{60}$$

ill.

$f'^2_x Df$ együtthatói: $\frac{1}{24}$ ill. $R_1 a_{14} + R \left\{ a_{32} a_{22} + a_{33} E_1 \right\}$

azaz $\frac{1}{12} = a_{14} + \left\{ -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right\}$,

$$a_{14} = \frac{1}{15}$$

Formulánk tehát ilyen alaku

$$k_1 = hf_0 + \frac{1}{6}h^2 Df_0 + \frac{1}{60}h^3 f'_{x,0} Df_0 + \frac{1}{15}h^4 f'^2_{x,0} Df_0$$

$$k_1^* = hf_0 + \frac{2}{5}h^2 Df_0$$

$$\tilde{k}_2 = hf_1 - \frac{1}{6}h^2 Df_1 + \frac{1}{12}h^3 f'_{x,1} Df_1 \qquad (27)$$

$$k = \frac{1}{2}(k_1 + \tilde{k}_2)$$

Megadunk végül egy első tipusu ötödfoku formulát is:

$$k_1 = hf_0 + a_{12}h^2 Df_0 + a_{13}h^3 f'_{x,0} Df_0 + a_{14}h^4 f'^2_{x,0} Df_0 +$$

$$+ a_{15} h^5 f'^3_{x,0} Df_0$$

$$k_1^* = E_1 hf_0 + b_{12}h^2 Df_0 + b_{13}h^3 f'_{x,0} Df_0$$

$$k_2 = hf_2 + a_{12}h^2 Df_0 + a_{23}h^2 f'_{x,0}(f_2 - f_0) + a_{24}h^3 f'^2_{x,0}(f_2 - f_0)$$

$$k_2^* = h(E_{21}f_0 + E_{22}f_2) + b_{22}h^2 Df_0 + b_{23}h^2 f'_{x,0}(f_2 - f_0)$$

$$k_3 = hf_3 + a_{12}h^2 Df_0 + a_{33}h^2 f'_{x,0}(f_2 - f_0) + C_{33}h^2 f'_{x,0}(f_3 - f_0)$$

$$k = R_1 k_1 + R_2 k_2 + R_3 k_3$$

ahol a 2 index a $(t_0+E_1h;\ x_0+k_1^*)$, a 3 index pedig a $[t_0+(E_{21}+E_{22})h;\ x_0+k_2^*]$ helyre vonatkozik.

Itt - a (20) formula mintájára -

$$hf_2 = hf_0 + E_1 h^2 Df_0 + (b_{12} h^3 f'_x Df + b_{13} h^4 f'^2_x Df) +$$

$$+ \frac{E_1^2}{2} h^3 D^2 f + (E_1 b_{12} h^4 Df'_x Df + E_1 b_{13} h^5 f'_x Df'_x Df) +$$

$$+ \frac{1}{2} b_{12}^2 h^5 f''_{xx} (Df)^2 + \dots + \frac{E_1^3}{6} h^4 D^3 f + \Big(\frac{E_1^2}{2} b_{12} h^5$$

$$Df D^2 f'_x + \dots\Big) + \frac{E_1^4}{24} h^5 D^4 f + \dots ,$$

továbbá - bevezetve az $E_{21} + E_{22} = E_2$ jelölést - f_3 argumentuma így írható:

$$t_0 + E_2 h; \quad x_0 + E_2 h f_0 + h^2 (E_1 E_{22} + b_{22}) Df +$$

$$+ h^3 \frac{E_1^2}{2} E_{22} D^2 f + h^3 (b_{12} E_{22} + b_{23} E_1) f'_x Df +$$

$$+ h^4 \frac{E_1^3}{6} E_{22} D^3 f + h^4 (b_{23} \frac{E_1^2}{2} f'_x D^2 f + h^4 E_1 b_{12} E_{22} Df'_x Df +$$

$$+ h^4 (b_{13} E_{22} + b_{23} b_{12}) f'_x{}^2 Df .$$

Ezért

$$hf_3 = hf_0 + E_2 h^2 Df + h^3 (E_1 E_{22} + b_{22}) f'_x Df +$$

$$+ h^4 \frac{E_1^2}{2} E_{22} f'_x D^2 f + h^4 (b_{12} E_{22} + b_{23} E_1) f'^2_x Df +$$

$$+ h^5 \frac{E_1^3}{6} E_{22} f'_x D^3 f + h^5 \frac{E_1^2}{2} b_{23} f'^2_x D^2 f + h^5 E_1 b_{12}$$

$$E_{22} f'_x Df'_x Df$$

$$+ h^5 (b_{13} E_{22} + b_{23} b_{12}) f'^3_x Df + \frac{E_2^2}{2} h^3 D^2 f +$$

$$+ h^4 (E_2 E_1 E_{22} + E_2 b_{22}) Df Df'_x + h^5 \frac{E_1^2}{2} E_2 E_{22} D^2 f Df'_x +$$

$$+ h^5 (b_{12} E_{22} + b_{23} E_1 E_2) f'_x Df'_x Df + \cdots +$$

$$+ h^5 \frac{(E_1 E_{22} + b_{22})^2}{2} f''_{xx} (Df)^2 + h^4 \frac{E_2^3}{6} D^3 f +$$

$$+ h^5 \frac{E_2^2}{2} (E_1 E_{22} + b_{22}) Df D^2 f'_x + \cdots + h^5 \frac{E_2^4}{24} D^4 f + \cdots$$

Egyenleteink első csoportja 9 egyenletből áll és 9 ismeretlent tartalmaz; közülük kettő szeparálható, mert csak ez tartalmazza R_1-et ill. a_{12}-t. A 7 maradék egyenlet D^2f, D^3f, D^4f, $DfDf'_x$, $DfD^2f'_x$, $f''_{xx}(Df)^2$ ill. $D^2fDf'_x$ együtthatóinak egyenlőségét fejezi ki. Ezek az egyenletek:

$$\frac{1}{6} = R_2 \frac{E_1^2}{2} + R_3 \frac{E_2^2}{2}$$

$$\frac{1}{24} = R_2 \frac{E_1^3}{6} + R_3 \frac{E_2^3}{6}$$

$$\frac{1}{120} = R_2 \frac{E_1^4}{24} + R_3 \frac{E_2^4}{24}$$

$$\frac{1}{8} = R_2 E_1 b_{12} + R_3 E_2 (E_1 E_{22} + b_{22})$$

$$\frac{1}{20} = R_2 \frac{E_1^2}{2} b_{12} + R_3 \frac{E_2^2}{2} (E_1 E_{22} + b_{22})$$

$$\frac{1}{40} = R_2 \frac{b_{12}^2}{2} + R_3 \frac{(E_1 E_{22} + b_{22})^2}{2}$$

$$\frac{1}{30} = R_3 \frac{E_1^2}{2} E_2 E_{22}$$

Tekintsük először egyrészt az első két, másrészt a negyedik-ötödik egyenletet. Előbbiből

$$R_2 E_1^2 + R_3 E_2^2 = \frac{1}{3}$$

$$R_2 E_1^3 + R_3 E_2^3 = \frac{1}{4}$$

és igy

$$R_2 = \frac{E_2^2\left(\frac{1}{3}E_2 - \frac{1}{4}\right)}{E_1^2 E_2^2 (E_2 - E_1)} = \frac{1}{12} \; \frac{4E_2 - 3}{E_1^2 (E_2 - E_1)}$$

$$R_3 = \frac{E_1^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}E_1\right)}{E_1^2 E_2^2 (E_2 - E_1)} = \frac{1}{12} \; \frac{3 - 4E_1}{E_2^2 (E_2 - E_1)}$$

Igy a harmadik egyenlet szerint fent kell állnia E_1 és E_2 között a

$$\frac{1}{12} E_1^2 \frac{4E_2 - 3}{E_2 - E_1} + \frac{1}{12} E_2^2 \frac{3 - 4E_1}{E_2 - E_1} = \frac{1}{5}$$

azaz a

$$4E_1E_2(E_1 - E_2) + 3(E_2^2 - E_1^2) = \frac{12}{5}(E_2 - E_1)$$

azaz a

$$3(E_2 + E_1) - 4E_1E_2 = \frac{12}{5}$$

azaz végülis a

$$15(E_2 + E_1) - 20E_1E_2 = 12$$

egyenletnek.

Az utóbbiakban bevezetve az $E_1E_{22} + b_{22} = \omega$ rövidítést, az egyenletek szerint

$$R_2 E_1 b_{12} + R_3 E_2 \omega = \frac{1}{8}$$

$$R_2 E_1^2 b_{12} + R_3 E_2^2 \omega = \frac{1}{10}$$

amiből

$$b_{12} = \frac{R_3 E_2 \left(\frac{1}{8} E_2 - \frac{1}{10}\right)}{R_2 R_3 E_1 E_2 (E_2 - E_1)} = \frac{1}{40} \frac{5 E_2 - 4}{R_2 E_1 (E_2 - E_1)}$$

ill.

$$\omega = \frac{R_2 E_1 \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{8} E_1\right)}{R_2 R_3 E_1 E_2 (E_2 - E_1)} = \frac{1}{40} \frac{4 - 5 E_1}{R_3 E_2 (E_2 - E_1)}$$

vagy R_2 ill. R_3 értékét helyettesitve:

$$b_{12} = \frac{12}{40} \cdot \frac{E_1 (4 - 5E_1)}{4E_2 - 3} = \frac{3}{10} \frac{E_1 (4 - 5E_1)}{4E_2 - 3}$$

és

$$\omega = \frac{12}{40} \cdot \frac{E_2 (5E_2 - 4)}{3 - 4E_1} = \frac{3}{10} \frac{E_2 (5E_2 - 4)}{3 - 4E_1}$$

Mármost a hatodik egyenlet szerint fenn kell állnia E_1 és E_2 között az

$$\frac{3}{10} \frac{(4 - 5E_1)^2}{(4E_2 - 3)} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(E_2 - E_1)} +$$

$$+ \frac{3}{10} \frac{(5E_2 - 4)^2}{(3 - 4E_1)} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(E_2 - E_1)} = 1$$

azaz a

$$3\{(4-5E_1)^2(3-4E_1)+(5E_2-4)^2(4E_2-3)\}=20(E_2-E_1)(3-4E_1)(4E_2-3)$$

relációnak is. A müveleteket elvégezve

$$3\{(16-40E_1+25E_1^2)(3-4E_1)+(25E_2^2-40E_2+16)(4E_2-3)\}=$$

$$=3\{-100E_1^3+235E_1^2-184E_1+100E_2^3-235E_2^2+$$

$$+184E_2=3\{100E_2^2+100E_1E_2+100E_1^2-235E_1-$$

$$-235E_2+184\}=20(-16E_1E_2+12E_1+12E_2-9)$$

Végül rendezve:

$$300E_2^2+620E_1E_2+300E_1^2-945E_1-945E_2+732=0$$

Hozzáadva ehhez az első egyenlet 31-szeresét

$$5(E_2^2+E_1^2)-8(E_2+E_1)+6=0$$

azaz

$$10(E_2^2+E_1^2)-16(E_2+E_1)+12=0$$

adódik. Levonva ebből az első egyenletet

$$10(E_2+E_1)^2-31(E_2+E_1)+24=0$$

adódik, amiből

$$E_1+E_2=\frac{31\pm1}{20}$$

adódik. Az $E_1 + E_2 = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$ választással az első egyenletből

$$E_1 \cdot E_2 = \frac{3}{20} \cdot 8 - \frac{12}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \,,$$

azaz E_1 és E_2 az

$$x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{3}{5} = 0$$

egyenlet gyökei. Itt $x = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{10} = \frac{8 \pm 2}{10}$,

azaz $E_1 = \frac{3}{5}$ és $E_2 = 1$.

Visszahelyettesitve

$$R_2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\frac{9}{25} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{125}{216} = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$R_3 = \frac{1}{12} \frac{3 - \frac{12}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$$

$$= \frac{3^3}{6^3} = \frac{27}{216} \,,$$ és végül

$$R_1 = \frac{64}{216} = \frac{4^3}{6^3}$$

Továbbá

$$b_{12} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\frac{3}{5}(4-3)}{1} = \frac{9}{50} \text{ és}$$ és

$$\omega = E_1 E_{22} + b_{22} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3 - 4\frac{3}{5}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{15-12} = \frac{1}{2} \,.$$

Végül az utolsó egyenletből

$$E_{22} = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{R_3 E_1^2 E_2} = \frac{1}{15} \cdot \frac{216}{27} \cdot \frac{25}{9} = \frac{8 \cdot 25}{9 \cdot 15} =$$

$$= \frac{40}{27}, \quad \text{és így} \quad E_{21} = 1 - E_{22} = \frac{13}{27},$$

végül

$$b_{22} = \omega - E_1 E_{22} = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{40}{27} = \frac{1}{2} - \frac{8}{9} = -\frac{7}{18}.$$

Végül Df együtthatóinak egyenlősége alapján

$$\frac{1}{2} = (R_1 + R_2 + R_3) a_{12} + R_2 E_1 + R_3 E_2,$$

amiből

$$a_{12} = \frac{1}{2} - R_2 E_1 - R_3 E_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{125}{216} - \frac{27}{216} =$$

$$= \frac{108 - 75 - 27}{216} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

Ujabb 3 egyenlet adódik $f_x' D^2 f$, $f_x' D^3 f$ és $f_x' Df_x' Df$ együtthatóinak egyeztetése révén:

$$\frac{1}{24} = R_2 \left\{ a_{23} \cdot \frac{E_1^2}{2} \right\} + R_3 \left\{ \frac{E_1^2}{2} E_{22} + a_{33} \cdot \frac{E_1^2}{2} + C_{33} \frac{E_2^2}{2} \right\}$$

$$\frac{1}{120} = R_2 \left\{ a_{33} \cdot \frac{E_1^3}{6} \right\} + R_3 \left\{ \frac{E_1^3}{6} E_{22} + a_{33} \frac{E_1^3}{6} + C_{33} \frac{E_2^3}{6} \right\}$$

$$\frac{7}{120} = R_2 \left\{ E_1 b_{13} + a_{23} \cdot E_1 b_{12} \right\} + R_3 \left\{ E_1 b_{12} E_{22} + b_{12} E_2 E_{22} + \right.$$

$$\left. + b_{23} E_1 E_2 + a_{33} E_1 b_{12} + C_{33} (E_1 E_2 E_{22} + E_2 b_{22}) \right\}$$

E rendszerben 4 ismeretlen lép fel; az első kettőben három.

Igy az $a_{33} = 0$ választással ez a két egyenlet:

$$\frac{1}{24} = \frac{125}{216} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{25} \cdot a_{23} + \frac{27}{216} \cdot \frac{1}{2} \frac{9}{25} \cdot \frac{40}{27} + \frac{27}{216} \cdot \frac{1}{2} C_{33}$$

ill.

$$\frac{1}{120} = \frac{1}{216} \cdot \frac{1}{6} \cdot 27 a_{23} + \frac{27}{216} \cdot \frac{1}{6} \frac{1}{125} \cdot 40 + \frac{27}{216} \cdot \frac{1}{6} C_{33}$$

Innét

$$\frac{5}{24\cdot 5} - \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{5}\cdot 4 = \frac{5}{24}\cdot\frac{1}{2}\, a_{23} + \frac{1}{16}\, c_{33}$$

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{25} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}\, a_{23} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}\, c_{33}$$

$$2(5-4) = 2 = 25\, a_{23} + 25\, c_{33}$$

$$10 - 8 = 2 = 25\, a_{23} + 15\, c_{33}$$

amiből $c_{33} = 0$ és $a_{23} = \frac{2}{25}$

Áttérve a harmadik egyenletre, ott a $b_{23} = 0$ választással élünk. Igy

$b_{13} = 0$ adódik, $f_x'^2\, D^2 f$ együtthatóinak egyeztetése az

$$\frac{1}{120} = R_2\, a_{24}\, \frac{E_1^2}{2} + R\, \frac{E_1^2}{2}\, b_{23})$$

amiből

$a_{24} = \frac{2}{25}$ adódik.

Végül $f_x'\, Df$, $f_x'^2\, Df$ ill. $f_x'^3\, Df$ együtthatóinak egyeztetése révén az

$$\frac{1}{6} = R_1\, a_{13} + R_2 \left\{ b_{12} + a_{23}\, E_1 \right\} + R_3 \left\{ (E_1 E_{22} + b_{22}) \right\}$$

ill.

$$\frac{1}{24} = R_1\, a_{14} + R_2 \left\{ b_{13} + a_{23} b_{12} + a_{24}\, E_1 \right\} + R_3 \left\{ (b_{12} E_{22} + b_{23} E_1) + \ldots \right\}$$

ill.

$$\frac{1}{120} = R_1 a_{15} + R_2 \{ a_{23} b_{13} + a_{24} b_{12} \} + R_3 \{ (b_{13} E_{22} + b_{23} b_{12}) + \ldots \}$$

egyenletek adódnak. Ezekből

$$a_{13} = -\frac{3}{32}$$

$$a_{14} = -\frac{3}{32}$$

$$a_{15} = \emptyset .$$

Formulánk tehát

$$k_1 = hf_0 + \frac{1}{36} h^2 Df_0 - \frac{3}{32} h^3 f'_{x,0} Df_0 - \frac{3}{32} h^4 f'_{x,0} Df_0$$

$$k_1^* = \frac{3}{5} hf_0 + \frac{9}{50} h^2 Df_0$$

$$k_2 = hf_2 + \frac{1}{36} h^2 Df_0 + \frac{2}{25} h^2 f'_{x,0}(f_2 - f_0) + \frac{2}{25} h^3 f'_{x,0}(f_2 - f_0) \tag{28}$$

$$k_2^* = h\left(\frac{40}{27} f_2 - \frac{13}{27} f_0\right) - \frac{7}{18} h^2 Df_0$$

$$k_3 = hf_3 + \frac{1}{36} h^2 Df_0 \quad k = \frac{64}{216} k_1 + \frac{125}{216} k_2 + \frac{27}{216} k_3$$

alaku.

Mindkét tipushoz hasonló strukturáju magasabb fokszámu eljárásokat is könnyen kidolgozhatunk.

Formuláink erejét normál és erősen "meredek" megoldásgörbével biró egyenletek esetére az 1. ill. a 2. táblázat érzékelteti! Megemlitjük végül, hogy a fenti formulákban t és x komplex mennyiségek is lehetnek.

3. §. Hibabecslés és a formularendszer további javitása.

A megadott formulák elméleti hibabecslése a Runge-Kutta tipusu formuláknál szokásosan használt módon megy; a fellépő konstansok becsléséré egy későbbi munkában még visszatérünk, az azonban részletes vizsgálat nélkül is látható, hogy ötször vagy hatszor differenciálható $f(t,x)$ esetén egy-egy lépés hibája h^5-nél vagy h^6-nál arányos. A gyakorlatban ugyanis csak ezt az asszimptotikus tényt szoktuk felhasználni a klasszikus Runge-Kutta formulák használatánál is, mert az exakt formulákban szereplő állandók csak óriási munkával becsülhetők. Ilyen szempontból a 2.§.-ban bevezetett ujtipusu formulák némileg előnyösebbek, mint az eredeti Runge-Kutta formulák, mert a megelőző lépésben számitott segédnövekmények felhasználásával ötödrendü formulát is készithetünk. Ilymódon menet közben egyrészt lépésenként h^6-nal arányos hibával kell csak számolnunk, másrészt minthogy ugyanekkor egy h^5-nél arányos hibáju mennyiség kiszámitása is megtörténik, módunk van a lépésköz szükség ill. lehetőség szerinti menetközbeni megváltoztatására anélkül, hogy a Runge-Kutta módszernél szokásos módon ismételten ugyanazon a részintervallumon kellene számolnunk. Sőt ugyanezen növekmények egyidejü felhasználásával a megelőző alapponttól mért kétszeres lépésközü lépés ötödfoku közelitését is meg tudjuk adni. Ezen uj formulák levezetése céljából azonban szükségünk van az alábbi segédtételre:

__1. Segédtétel.__ Az $f(t,x)$ függvény legyen a (t_o,x_o) hely egy alkalmas környezetében (pl. a $|t-t_o| \leq R$; $|x-x_o| \leq S$ környezetben, ahol még $|f(t,x)| \leq \frac{S}{R}$ is teljesül) ötször folytonosan differenciálható. Legyen $h \leq R$, $|k(h)| \leq S$, és tegyük fel, hogy $|x(t_o+h;\ x_o,t_o) - (x_o+k)| = \mathcal{O}(h^5)$ érvényes. Érvényes ekkor az $|x(t_o;\ x_o+k,\ t_o+h) - x_o| = \mathcal{O}(h^5)$ reláció is.

Bizonyitás: Feltevéseink értelmében $x(t_o+h;\ x_o,t_o) - x_o = x_1-x_o = k(h) + C(h).h^5$, és itt $C(h) = C_1$, ha $h \leq R$.

Emellett, feltételeink szerint a differenciálegyenlet a tekintett tartományban egyértelmüen oldható meg, és igy

$$x(t_o;\ x_1,\ t_o + h) = x_o$$

is érvényes. Minthogy pedig f az x-ben feltételeink szerint Lipschitz-feltételt elégit ki - éspedig t-ben egyenletesen a $|t - t_o| \leq R$; $|x-x_o| \leq S$ tartományban, azért (L-lel jelölve a Lipschitz-feltétel állandóját)

$$|x(t_o;\ x_o+k, t_o+h) - x_o| = |x(t_o;\ x_o+k, t_o+h) -$$

$$- x(t_o;\ x_1;\ t_o+h)| \leq |k + x_o - x_1| \cdot \exp L h \leq C(h) \exp L h \cdot h^5 = \mathcal{O}(h^5)$$

(l. pl. [6]), ahogy állitottuk.

E segédtétel felhasználásával további formulát adunk meg: hármat arra a célra, hogy a (t_0,x_0) bázispontban meghatározva az ismertetett formulák alapján a k_1, k_1^*, k_2 növekményeket és ezen a réven a negyedfokban pontos k-t, továbbá felhasználva a (t_0-h, x) ill. (t_0-2h, x) ill. $(t_0 - \frac{h}{2}, x)$ pontra támaszkodó k_1 és k_2-ben szereplő tagokat, egy ötödfokban pontos k-t is meghatározzunk (itt tehát figyelembe vesszük a lépésköz-felezés ill. lépésköz duplikálás lehetőségét is). Másik három formula révén pedig - ugyanezen adatok révén - a (t_0-h, x), $(t_0,-2h, x)$ ill. $(t_0- \frac{h}{2}, x)$ pontból kiindulva határozzuk meg a t_0+h pontbeli, $x(t_0+h)$ értékhez tartozó $x(t_0+h) - x$ növekményt ötödfokban közelítő k_s értékét is.

Formuláink tehát ilyen alakuak:

$$\hat{k} = R_{-2} hf_{-2} + R_{-1} hf_{-1} + R_0 hf_0 + R_1 hf_1 + S_{-2} h^2 Df_{-2}$$

$$+ S_0 h^2 Df_0 + T_{-2,1} h^2 f'_{x,-2} (f_{-2} - f_0) + T_{-2,2} h^2 f'_{x,-2} (f_{-1} - f_0) +$$

$$+ T_{-2,3} h^2 f'_{x,-2} (f_1 - f_0) + T_{0,1} h^2 f'_{x,0} (f_{-2} - f_0) + T_{0,2} h^2 f_{x,0} (f_{-1} - f_0)$$

$$+ T_{0,3} h^2 f'_{x,0} (f_1 - f_0) + V_1 h^3 f'^{2}_{x,-2} (f_1 - f_0) + V_2 h^3 f'_{x,0} \cdot (f_{-2} - f_0)$$

$$+ V_3 h^3 f'^{2}_{x,0} (f_1 - f_0) + W h^4 f'^{3}_{x,0} (f_1 - f_0)$$

ill.

$$
\begin{aligned}
k_s = {} & r_0 h f_0 + r_1 h f_1 + r_2 h f_2 + r_3 h f_3 + s_0 h^2 D f_0 + s_2 h^2 D f_2 \\
& + t_{0,1} h^2 f'_{x,0}(f_1 - f_0) + t_{0,2} h^2 f'_{x,0}(f_2 - f_0) + t_{0,3} h^2 f'_{x,0}(f_3 - f_0) \\
& + t_{2,1} h^2 f'_{x,2}(f_1 - f_0) + t_{2,2} h^2 f'_{x,2}(f_2 - f_0) + t_{2,3} h^2 f'_{x,2}(f_3 - f_0) + \\
& + v_1 h^3 f'_{x,0}(f_1 - f_0) + v_2 h^3 f'^2_{x,0}(f_2 - f_0) + v_3 h^3 f'^2_{x,2}(f_1 - f_0) + w h^4 f^3_{x,0}(f_1 - f_0)
\end{aligned}
\qquad (30)
$$

ahol az első formulában a negativ indexek vonatkoznak a megelőző lépésbeni segédnövekményekre, a második formulában viszont ezek - értelemszerüen - a 0 ill. 1 indexet viselik. /Megemlitjük, hogy itt a (24) formulákra kivánunk támaszkodni, ugyanugy lehetne kiépiteni természetesen a (25) formulákkal kapcsolatosan is fonomitást./

Először a (29) alatti formulát tekintjük. E formula - 2 indexü elemei a t_0- h, x helyre vonatkoznak, ahol = 1, 2 vagy $\frac{1}{2}$ - attól függően, hogy lépésköz-tartás, felezés vagy duplikálás történt-e a legutolsó lépésben. x-et viszont - hogy a -2-es indexü tagok kifejtése ötödfokban pontos legyen - az 1. segédtétel értelmében az x_0 helyről a hatványsor negyedfoku szeletéből extrapolálhatjuk, ha x_0 ötödfoku közelitése x-re vonatkozóan $x(t_0)$-nak. Ilymódon

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} = {} & x_0 - \vartheta h f_0 + \frac{\vartheta^2 h^2}{2} D f_0 - \frac{\vartheta^3 h^3}{6} D^2 f_0 - \frac{\vartheta^3 h^3}{6} f'_{x,0} D f_0 \\
& + \frac{\vartheta^4 h^4}{24} D^3 f_0 + \frac{\vartheta^4 h^4}{24} f'_{x,0} D^2 f_0 + \frac{\vartheta^4 h^4}{8} D f'_{x,0} D f_0 + \frac{\vartheta^4 h^4}{24} f'_{x,0} D f_0 \pm \cdots
\end{aligned}
$$

tehát (a 0 indexet elhagyva)

$$hf_{-2} = hf(t_0 - \vartheta h\,;\, x_0 - \vartheta h f_0 + Ⓗ = hf - \vartheta h^2 Df + \frac{\vartheta^2 h^3}{2} f'_x Df$$

$$- \frac{\vartheta^3 h^4}{6} f'_x D^2 f - \frac{\vartheta^3 h^4}{6} f'^2_x Df + \frac{\vartheta^4 h^5}{24} f'_x D^3 f + \frac{\vartheta^4 h^5}{24} f'^2_x D^2 f +$$

$$+ \frac{\vartheta^4 h^5}{24} f'_x Df'_x Df + \frac{\vartheta^4 h^5}{24} f'^3_x Df + \frac{\vartheta^2 h^3}{2} D^2 f - \frac{\vartheta^3 h^4}{2} Df Df'_x +$$

$$+ \frac{\vartheta^4 h^5}{6} D^2 f\, Df'_x + \frac{\vartheta^4 h^5}{8} f''_{xx} (Df)^2 - \frac{\vartheta^3 h^4}{6} D^3 f + \frac{\vartheta^4 h^5}{4} Df D^2 f'_x +$$

$$+ \frac{\vartheta^4 h^5}{24} D^4 f \pm \cdots$$

és hasonlókép

$$h^2 Df_{-2} = h^2 Df\,(t_0 - \vartheta h\,;\, x_0 - \vartheta h f_0 + Ⓗ) =$$

$$= h^2 Df - \vartheta h^3 D(Df) + \frac{\vartheta^2 h^4}{2} \frac{\partial}{\partial x} (Df)\, Df - \frac{\vartheta^3 h^5}{6} \frac{\partial}{\partial x} (Df).D^2 f -$$

$$- \frac{\vartheta^3 h^5}{6} \frac{\partial}{\partial x} (Df) f'_x Df + \frac{\vartheta^2 h^4}{2} D^2 (Df) - \frac{\vartheta^3 h^5}{2} D\left[\frac{\partial}{\partial x}(Df)\right] \cdot Df =$$

$$- \frac{\vartheta^3 h^5}{6} D^3 (Df) \pm \cdots =$$

$$= h^2 Df - \vartheta h^3 (D^2 f + f'_x Df) + \frac{\vartheta^2 h^4}{2} Df (Df'_x + f'^2_x) -$$

$$- \frac{\vartheta^3 h^5}{6} D^2 f (Df'_x + f'^2_x) - \frac{\vartheta^3 h^5}{6} f'_x Df (Df'_x + f'^2_x) +$$

$$+ \frac{\vartheta^2 h^4}{2} (D^3 f + 2 Df Df'_x + f'_x D^2 f) - \frac{\vartheta^3 h^5}{2} [D^2 f'_x Df +$$

$$+ f''_{xx} (Df)^2 + 2 f'_x Df'_x Df] - \frac{\vartheta^3 h^5}{6} [D^4 f + 3 Df D^2 f'_x +$$

$$+ 3 D^2 f Df'_x + f'_x D^3 f] \pm \cdots =$$

$$= h^2 Df - \vartheta h^3 D^2 f - \vartheta h^3 f'_x Df + \frac{\vartheta^2 h^4}{2} D^3 f + \frac{\vartheta^2 h^4}{2} f'_x D^2 f +$$

$$+ \frac{3\vartheta^2 h^4}{2} Df Df'_x + \frac{\vartheta^2 h^4}{2} f'_x Df - \frac{\vartheta^3 h^5}{6} D^4 f - \frac{\vartheta^3 h^5}{6} f'_x D^3 f$$

$$- \frac{2\vartheta^3 h^5}{3} Df'_x D^2 f - \vartheta^3 h^5 Df D^2 f'_x - \frac{\vartheta^3 h^5}{2} f''_{xx} (Df)^2 -$$

$$- \frac{\vartheta^3 h^5}{6} f'^2_x D^2 f - \frac{7}{6} \vartheta^3 h^5 f'_x Df'_x Df - \frac{\vartheta^3 h^5}{6} f'^3_x Df \pm \ldots$$

végül

$$f'_{x,-2} = f'_x - \vartheta h Df'_x + \frac{\vartheta^2 h^2}{2} f''_{xx} Df + \frac{\vartheta^2 h^2}{2} D^2 f'_x \pm \ldots$$

Ennek alapján számithatjuk ki a -1 indexnek megfelelő (t,x) helyet. A (24) képlet szerint ti. $E_1 = \frac{3}{4}$, és igy

$$t_{-1} = t_{-2} + \frac{3}{4} \vartheta h = t_0 - \frac{1}{4} \vartheta h,$$

továbbá

$$x_{-1} = \tilde{x} + \frac{3}{4} \vartheta h f_{-2} + \frac{9}{32} h^2 \vartheta^2 Df_{-2}$$

azaz negyedfoku pontossággal

$$x_{-1} = x_0 - \vartheta h f_0 + \frac{1}{2} \vartheta^2 h^2 Df_0 - \frac{1}{6} \vartheta^3 h^3 D^2 f_0 - \frac{1}{6} \vartheta^3 h^3 f'_x Df$$

$$+ \frac{1}{24} \vartheta^4 h^4 D^3 f + \frac{1}{24} \vartheta^4 h^4 f'_x D^2 f + \frac{1}{8} \vartheta^4 h^4 Df'_x Df + \frac{1}{24} \vartheta^4 h^4 f'^2_x Df \pm \ldots$$

$$+ \frac{3}{4} \vartheta h f - \frac{3}{4} \vartheta^2 h^2 Df + \frac{3}{8} \vartheta^3 h^3 f'_x Df - \frac{3}{24} \vartheta^4 h^4 f'_x D^2 f - \frac{3}{24} \vartheta^4$$

$$h^4 f'^2_x Df + \frac{3}{8} \vartheta^3 h^3 D^2 f - \frac{3}{8} \vartheta^4 h^4 Df'_x Df - \frac{3}{24} \vartheta^4 h^4 D^3 f \pm \ldots$$

$$+\frac{9}{32}\vartheta^2h^2Df-\frac{9}{32}\vartheta^3h^3D^2f-\frac{9}{32}\vartheta^3h^3f'_xDf+\frac{9}{64}\vartheta^4h^4D^3f$$

$$+\frac{9}{64}\vartheta^4h^4f'_xD^2f+\frac{27}{64}\vartheta^4h^4DfDf'_x+\frac{9}{64}\vartheta^4h^4f'^2_xDf\pm\dots$$

$$=x_0-\frac{1}{4}\vartheta hf+\frac{1}{32}\vartheta^2h^2Df-\frac{7}{96}\vartheta^3h^3D^2f-\frac{7}{96}\vartheta^3h^3f'_xDf$$

$$+\frac{11}{192}\vartheta^4h^4D^3f+\frac{11}{192}\vartheta^4h^4f'_xD^2f+\frac{11}{64}\vartheta^4h^4Df'_xDf+\frac{11}{192}h^4\vartheta^4f'^2Df\pm$$

Ennek alapján

$$hf_{-1}=hf_0-\frac{1}{4}\vartheta h^2Df+\frac{1}{32}\vartheta^2h^3f'_xDf-\frac{7}{96}\vartheta^3h^4f'_xD^2f-\frac{7}{96}\vartheta^3$$

$$h^4f'^2_xDf+\frac{11}{192}\vartheta^4h^5f'_xD^3f+\frac{11}{192}\vartheta^4h^5f'^2_xD^2f+\frac{11}{192}\vartheta^4h^5f'^3_xDf\pm\dots$$

$$+\frac{1}{32}\vartheta^2h^3D^2f-\frac{1}{128}\vartheta^3h^4DfDf'+\frac{7}{384}\vartheta^4h^5Df'_xD^2f+$$

$$+\frac{73}{384}\vartheta^4h^5f'_xDf'_xDf\pm\dots+\frac{1}{2048}\vartheta^4h^5f''_{xx}(Df)^2-$$

$$-\frac{1}{384}\vartheta^3h^4D^3f+\frac{1}{1024}\vartheta^4h^5DfD^2f'_x+\dots+\frac{1}{6144}\vartheta^4h^5D^4f+\dots$$

továbbá

$$h^2Df_{-1}=h^2Df-\frac{1}{4}h^3\vartheta D(Df)+\frac{1}{32}\vartheta^2h^4\frac{\partial}{\partial x}(Df)\cdot Df-$$

$$-\frac{7}{96}\vartheta^3h^5\frac{\partial}{\partial x}(Df)\cdot D^2f-\frac{7}{96}\vartheta^3h^5\frac{\partial}{\partial x}(Df)f'_xDf\pm\dots+$$

$$+\frac{1}{32}\vartheta^2h^4D^2(Df)-\frac{1}{128}\vartheta^3h^5D\left(\frac{\partial}{\partial x}(Df)\right)Df-\frac{1}{384}\vartheta^3h^5D^3(Df)\pm\dots$$

$$=h^2Df-\frac{1}{4}h^3\vartheta D^2f-\frac{1}{4}h^3\vartheta f'_xDf+\frac{3}{232}\vartheta^2h^4Df'_xDf+$$

$$+\frac{1}{32}\vartheta^2 h^4 f'^2_x Df - \frac{31}{384}\vartheta^3 h^5 Df'_x D^2 f - \frac{7}{96}\vartheta^3 h^5 f'^2_x D^2 f -$$

$$-\frac{17}{192}\vartheta^3 h^5 f'_x Df'_x Df - \frac{7}{96}\vartheta^3 h^5 f'^3_x Df + \frac{1}{32}\vartheta^2 h^4 D^3 f +$$

$$+\frac{1}{32}\vartheta^2 h^4 f'_x \cdot D^2 f - \frac{1}{64}\vartheta^3 h^5 D^2 f'_x Df$$

$$-\frac{1}{128}\vartheta^3 h^5 f''_{xx} (Df)^2 - \frac{1}{384}\vartheta^3 h^5 D^4 f$$

$$-\frac{1}{384}\vartheta^3 h^5 f'_x D^3 f - \frac{1}{128}\vartheta^3 h^5 Df'_x D^2 f + \cdots$$

és végül

$$f'_{x_1,-1} = f'_x - \frac{1}{4}\vartheta h Df'_x + \frac{1}{32}\vartheta^2 h^2 f''_{xx} Df + \frac{1}{32}\vartheta^2 h^2 D^2 f'_x \pm \cdots$$

Ami végül az 1. indexü helyet illeti, itt a (24) képlet szerint $t = t_o + \frac{3}{4} h$; $x = x_o + \frac{3}{4} h f_o + \frac{9}{32} h^2 Df$

és igy

$$hf_1 = hf + \frac{3}{4} h^2 Df + \frac{9}{32} h^3 f'_x Df + \frac{9}{32} h^3 D^2 f + \frac{27}{128} h^4 Df'_x Df$$

$$+\frac{81}{2048} h^5 f''_{xx} (Df)^2 + \frac{9}{128} h^4 D^3 f + \frac{81}{1024} h^5 D^2 f'_x Df + \cdots + \frac{27}{2048} h^5 D^4 f$$

$h^2 Df'_1$ és $f'_{x,1}$ értékére nincs szükségünk.

Mármost egyenleteink elsč csoportja hét egyenletből áll, amelyek D^2f, D^3f, D^4f, $Df'_x\, Df$, $D^2f'_x\, Df$, $Df'_x\, D^2f$, és $f''_{xx}(Df)^2$ együtthatóinak azonosságát fejezik ki:

$$\frac{1}{6} = R_{-2} \cdot \frac{\vartheta^2}{2} + R_{-1} \cdot \frac{\vartheta^2}{32} + R_1 \cdot \frac{9}{32} + S_{-2} \cdot (\vartheta)$$

$$\frac{1}{24} = R_{-2}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) + R_{-1}\left(-\frac{\vartheta^3}{384}\right) + R_1\cdot\frac{9}{128} + S_{-2}\cdot\left(\frac{\vartheta^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{120} = R_{-2}\cdot\frac{\vartheta^4}{24} + R_{-1}\cdot\frac{\vartheta^4}{6144} + R_1\cdot\frac{27}{2048} + S_{-2}\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right)$$

$$\frac{1}{8} = R_{-2}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{2}\right) + R_{-1}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{128}\right) + R_1\frac{27}{128} + S_{-2}\cdot\frac{3}{2}\vartheta^2 +$$

$$+ T_{-2,1}\cdot\vartheta^2 + T_{-2,2}\cdot\frac{1}{4}\vartheta^2 + T_{-2,3}\left(-\frac{3}{4}\vartheta\right)$$

$$\frac{1}{20} = R_{-2}\cdot\frac{\vartheta^4}{4} + R_{-1}\cdot\frac{\vartheta^4}{1024} + R_1\cdot\frac{81}{1024} + S_{-2}\cdot(-\vartheta^3) +$$

$$+ T_{-2,1}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{2}\right) + T_{-2,2}\left(-\frac{\vartheta^3}{8}\right) + T_{-2,3}\cdot\frac{3}{8}\vartheta^2$$

$$\frac{1}{30} = R_{-2}\cdot\frac{\vartheta^4}{6} + R_{-1}\cdot\frac{7}{384}\vartheta^4 + R_1\cdot 0 + S_{-2}\cdot\left(-\frac{2\vartheta^3}{3}\right) +$$

$$+ T_{-2,1}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{2}\right) + T_{-2,2}\left(-\frac{\vartheta^3}{32}\right) + T_{-2,3}\cdot\left(-\frac{9}{32}\vartheta\right)$$

$$\frac{1}{40} = R_{-2}\cdot\frac{\vartheta^4}{8} + R_{-1}\cdot\frac{\vartheta^4}{2048} + R_1\cdot\frac{81}{2048} + S_{-2}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{2}\right) +$$

$$+ T_{-2,1}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{2}\right) + T_{-2,2}\left(-\frac{\vartheta^3}{8}\right) + T_{-2,3}\cdot\frac{3}{8}\vartheta^2$$

Itt a hetedik egyenletből kivonva az ötödiket, a különbség az első három egyenlettel együtt egy négyismeretlenes lineáris egyenletrendszert képez, amelyből R_{-2}, R_{-1}, R_1 és S_{-2} megállapitható:

$$48\vartheta^2 R_{-2} + 3\vartheta^2 R_{-1} + 27R_1 - 96\vartheta S_{-2} = 16$$

$$-64\vartheta^3 R_{-2} - \vartheta^3 R_{-1} + 27R_1 + 192\vartheta^2 S_{-2} = 16$$

$$1280\vartheta^4 R_{-2} + 5\vartheta^4 R_{-1} + 405R_1 - 5120\vartheta^3 S_{-2} = 256$$

$$-1280\vartheta^4 R_{-2} - 5\vartheta^4 R_{-1} - 405R_1 + 5120\vartheta^3 S_{-2} = -256$$

- és ezekből az utolsó elhagyható, mert nem független a rendszer - amelyhez csatlakozik az eredeti rendszer negyedik, ötödik és hatodik egyenlete.

Ezek azonban szintén nem függetlenek, mert hatodik egyenletben $T_{-2,1}$, $T_{-2,2}$, ill. $T_{-2,3}$ együtthatói éppen $-\frac{\vartheta}{2}$ -szeresei a negyedik egyenlet megfelelő együtthatóinak. Ezért az első három egyenlethez még egy negyediket csatolunk, amely azt követeli meg, hogy az ötödik és hetedik egyenlet ne legyen ellentmondó. Igy az első három, további e függetlenséget megkövetelő egyenletből R_{-2}, R_{-1}, R_1 és S_{-2} megállapitható, (sőt a = 1 esetben R_{-1} szabadon választható, pl. 0-nak), majd a negyedik és ötödik egyenletből a $T_{-2,1}$, $T_{-2,2}$, $T_{-2,3}$, amelyek közül egyet szabadon választhatunk. Igy a $\vartheta = 1$, $\vartheta = 2$ ill. $\vartheta = \frac{1}{2}$ esetben.

$R_{-2} = -\frac{9}{490}$ ill. $= -\frac{3}{1936}$ ill. $= -\frac{24}{125}$

$R_{-1} = 0$ ill. $= 0$ ill. $= 0$

$R_1 = \frac{3968}{6615}$ ill. $= \frac{9728}{16335}$ ill. $= \frac{2048}{3375}$

$S_{-2} = -\frac{1}{140}$ ill. $= -\frac{1}{880}$ ill. $= -\frac{1}{25}$

$T_{-2,1} = \phi$ ill. $= \phi$ ill. $= \phi$

$T_{-2,2} = \frac{62}{735}$ ill. $= -\frac{125}{3025}$ ill. $= -\frac{1024}{875}$

$T_{-2,3} = -\frac{186}{735}$ ill. $= -\frac{304}{9075}$ ill. $= -\frac{512}{2625}$

A fentiekhez csatlakozóan f ill. Df együtthatóinak azonosságából R_o ill. S_o is megállapitható. Valóban:

$$1 = R_o + R_{-2} + R_{-1} + R_1$$

ill.

$$\frac{1}{2} = R_{-2}\cdot(-\vartheta) + R_{-1}\left(-\frac{1}{4}\vartheta\right) + R_1\cdot\frac{3}{4} + S_o + S_{-2}\cdot$$

Innét

$R_o = \frac{113}{270}$ ill. $= \frac{106117}{261360}$ ill. $= \frac{79}{135}$

$S_o = \frac{7}{180}$ ill. $= \frac{4477}{87120}$ ill. $= \frac{1}{90}$

Ujabb három egyenletet kapunk $f_x'D^2f$; $f_x'Df$ ill. $f_x'D^3f$ együtthatóinak egyeztetésekor:

$$\frac{1}{24} = R_{-2}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) + R_{-1}\cdot\left(-\frac{7}{96}\vartheta^3\right) + R_1\cdot\phi + S_{-2}\cdot\frac{\vartheta^2}{2} +$$

$$+ T_{-2,1}\cdot\frac{\vartheta^2}{2} + T_{-2,2}\cdot\frac{\vartheta^2}{32} + T_{2,3}\cdot\frac{9}{32} +$$

$$+ T_{0,1}\cdot\frac{\vartheta^2}{2} + T_{0,2}\cdot\frac{\vartheta^2}{32} + T_{0,3}\cdot\frac{9}{32}$$

$$\frac{1}{6} = R_{-2}\cdot\frac{\vartheta^2}{2} + R_{-1}\cdot\frac{\vartheta^2}{32} + R_1\cdot\frac{9}{32} + S_{-2}\cdot(-\vartheta) +$$
$$+ T_{-2,1}\cdot(-\vartheta) + T_{-2,2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\vartheta\right) + T_{-2,3}\cdot\frac{3}{4} +$$
$$+ T_{0,1}\cdot(-\vartheta) + T_{0,2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\vartheta\right) + T_{0,3}\cdot\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{120} = R_{-2}\cdot\frac{\vartheta^4}{24} + R_{-1}\cdot\frac{11\vartheta^4}{192} + R_1\cdot\phi + S_{-2}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) +$$
$$+ T_{-2,1}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) + T_{-2,2}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{384}\right) + T_{-2,3}\cdot\frac{9}{128}$$
$$+ T_{0,1}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) + T_{0,2}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{384}\right) + T_{0,3}\cdot\frac{9}{128}$$

Ezen egyenletek alapján

$$T_{0,1} = -\frac{62}{15435} \quad \text{ill.} = -\frac{38}{11979} \quad \text{ill.} = -\frac{808}{39375}$$

$$T_{0,2} = \frac{6944}{15435} \quad \text{ill.} = \frac{63536}{299475} \quad \text{ill.} = \frac{108224}{55125}$$

$$T_{0,3} = \frac{5704}{15435} \quad \text{ill.} = \frac{39829}{299475} \quad \text{ill.} = \frac{86416}{275625}$$

Ujabb egyenlet adódik f_x' Df_x' Df együtthatói egyeztetése során:

$$\frac{7}{120} = R_{-2}\cdot\frac{7\vartheta^4}{24} + R_{-1}\cdot\frac{73\vartheta^4}{384} + R_1\cdot\phi + S_{-2}\cdot\left(-\frac{7}{6}\vartheta^3\right) +$$
$$+ T_{-2,1}\left(-\frac{\vartheta^3}{2} - \frac{\vartheta^3}{2}\right) + T_{-2,2}\cdot\left(-\frac{1}{128}\vartheta^3 - \frac{1}{32}\vartheta^3\right) + T_{-2,3}$$
$$\cdot\left(\frac{27}{128} - \frac{9}{32}\vartheta\right) + T_{0,1}\left(-\frac{\vartheta^3}{2}\right) + T_{0,2}\cdot\left(-\vartheta^3\frac{1}{128}\right) +$$
$$+ T_{0,3}\cdot\left(\frac{27}{128}\right) + V_1\cdot\left(-\frac{3}{2}\vartheta\right),$$

amiből

$$V_1 = \frac{4091}{123480} \qquad \text{ill.} = \phi \qquad \text{ill.} = \frac{661}{330750}$$

A következő két egyenlet $f_x'^2 Df$ ill. $f_x'^2 D^2 f$ együtthatói-nak egyeztetéséből adódik:

$$\frac{1}{24} = R_{-2}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) + R_{-1}\cdot\left(-\frac{7\vartheta^3}{96}\right) + R_1\cdot\phi + S_{-2}\cdot\frac{\vartheta^2}{2} +$$
$$+ T_{-2,1}\cdot\frac{\vartheta^2}{2} + T_{-2,2}\cdot\frac{\vartheta^2}{32} + T_{-2,3}\cdot\frac{9}{32} +$$
$$+ T_{0,1}\cdot\frac{\vartheta^2}{2} + T_{0,2}\cdot\frac{\vartheta^2}{32} + T_{0,3}\cdot\frac{9}{32} +$$
$$+ V_1\cdot\frac{3}{4} + V_2\cdot(-\vartheta) + V_3\cdot\frac{3}{4}$$

ill.

$$\frac{1}{120} = R_{-2}\cdot\frac{\vartheta^4}{24} + R_{-1}\cdot\frac{11\vartheta^4}{192} + R_1\cdot\phi + S_{-2}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) +$$
$$+ T_{-2,1}\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) + T_{-2,2}\cdot\left(-\frac{7\vartheta^3}{96}\right) + T_{-2,3}\cdot\phi +$$
$$+ T_{0,1}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) + T_{0,2}\cdot\left(-\frac{7\vartheta^3}{96}\right) + T_{0,3}\cdot\phi +$$
$$+ V_1\cdot\frac{9}{32} + V_3\,\frac{9}{32} + V_2\cdot\frac{\vartheta^2}{2}$$

amiből

$$V_2 = \frac{93}{2401} \quad \text{ill.} = \frac{62567}{1098075} \quad \text{ill.} = \frac{158143}{3675000}$$

$$V_3 = \frac{16213}{864360} \quad \text{ill.} = \frac{500536}{3294225} \quad \text{ill.} = \frac{130226}{4134375}$$

Végül $f_x'^3 Df$ együtthatóinak egyeztetésével:

$$\frac{1}{120} = R_{-2}\cdot\frac{\vartheta^4}{24} + R_{-1}\cdot\frac{11\vartheta^4}{192} + R_1\cdot\phi + S_{-2}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) +$$

$$+ T_{-2,1}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) + T_{-2,2}\cdot\left(-\frac{7\vartheta^3}{96}\right) + T_{-2,3}\cdot\phi +$$

$$+ T_{0,1}\cdot\left(-\frac{\vartheta^3}{6}\right) + T_{0,2}\cdot\left(-\frac{7\vartheta^3}{96}\right) + T_{0,3}\cdot\phi +$$

$$+ V_1\cdot\frac{9}{32} + V_3\cdot\frac{9}{32} + V_2\cdot\frac{\vartheta^2}{2} + W\cdot\frac{3}{4},$$

amiből

$$W = \phi \quad \text{ill.} = -\frac{257488}{3294225} \quad \text{ill.} = \phi$$

Formuláink tehát lépéstartás ($\vartheta = 1$) esetén:

$$\hat{k} \cong -0{,}01836 7346\, hf_{-2} + 0{,}4185185\, hf_0 + 5998488\, hf_1 +$$

$$+ 0{,}03888888\, h^2 Df_0 - 0{,}007142857\, h^2 Df_{-2} - 0{,}08435374\, h^2$$

$$f'_{x,-2}(f_{-1}-f_0) - 0{,}2530612\, h^2 f'_{x,-2}(f_1-f_0) - 0{,}0040168448$$

$$h^2 f'_{x,0}(f_{-2}-f_0) + 0{,}44988662\, h^2 f'_{x,0}\cdot(f_{-1}-f_0) + \qquad (31)$$

$$+ 0{,}36954972\, h^2 f'_{x,0}(f_1-f_0) + 0{,}033130871\, h^3 f'^{\,2}_{x,-2}\,\cdot$$

$$\cdot (f_1 - f_0) + 0{,}03873386\,0\,h^3 f'^2_{x,0} (f_{-2} - f_0) +$$

$$+ 0{,}01875723\,h^3 f'_{x,0} (f_1 - f_0)\,;$$

lépésfelezés esetén ($\vartheta = 2$):

$$\hat{k} = -0{,}001549586\,7\,h f_{-2} + 0{,}4060185\,h f_0 + 0{,}59553106\,h f_1 -$$

$$-0{,}001136363\,h^2 D f_{-2} + 0{,}05138888\,h^2 D f_0 - 0{,}05024793\,h^2 f'_{x,-2} (f_{-1} - f_0) -$$

$$-0{,}03349862\,h^2 f'_{x,-2} (f'_1 - f_0) + 0{,}00317271\,8\,h^2 f'_{x,0} (f_{-2} - f_0) + \qquad (32)$$

$$+0{,}21215794\,h^2 f'_{x,0} (f_{-1} - f_0) + 0{,}13299607\,h^2 f'_{x,0} (f_1 - f_0) + 0{,}056978803$$

$$h^3 f'^2_{x,0} (f_{-2} - f_0) + 0{,}15194347\,h^3 f'^2_{x,0} (f_1 - f_0) - 0{,}07816345\,h^4 f'^3_{x,0} (f_1 - f_0)\,;$$

lépésduplikálás esetén ($\vartheta = 1/2$):

$$\hat{k} = -0{,}192\,h f_{-2} + 0{,}58518518\,h f_0 + 0{,}6068148\,h f_1 - 0{,}04\,h^2 D f_{-2} +$$

$$+ 0{,}0111111\,h^2 D f_0 - 1{,}170285\,h^2 f'_{x,-2} (f_{-1} - f_0) - 0{,}1950476\,1\,h^2 f'_{x,-2}$$

$$(f_1 - f_0) - 0{,}020520634\,h^2 f'_{x,0} (f_{-2} - f_0) + 1{,}963247\,h^2 f'_{x,0} (f_{-1} - f_0) +$$

$$+ 0{,}3135274\,3\,h^2 f'_{x,0} (f_1 - f_0) + 0{,}0019984882\,h^3 f'^2_{x,-2} \qquad (33)$$

$$(f_1 - f_0) + 0{,}0430321\,0\,h^3 f'_{x,0} (f_{-2} - f_0) + 0{,}0314983\,5$$

$$h^3 f'^2_{x,0} (f_1 - f_0).$$

Áttérünk most a k_s-ben szereplő együtthatók számitására. Egyszerübb, ha itt a megelőző növekmény lépésközét veszszük alapul, és a most végrehajtott lépésközt ehhez viszonyitjuk δh alakban (lépéstartás esetén $\delta = 1$ lépésfelezés esetén $\delta = \frac{1}{2}$, lépésduplikálás esetén $\delta = 2$). Itt tehát a 0 index a bázis, az 1 index igy a

$$t = t_0 + \frac{3}{4} h\,; \quad x = x_0 + \frac{3}{4} h f + \frac{9}{32} h^2 D f \qquad \text{alaku,}$$

és igy

$$hf_1 = hf + \frac{3}{4} h^2 Df + \frac{9}{32} h^3 f'_x Df + \frac{9}{32} h^3 D^2 f + \frac{27}{128} h^4 Df\, Df''_x$$

$$+ \frac{81}{2048} f''_{xx} (Df)^2 + \frac{9}{128} h^4 D^3 f + \frac{81}{1024} h^5 D^2 f'_x Df + \ldots + \frac{27}{2048} h^5 D^4 f + \ldots$$

A 2 indexre

$$t = t_0 + h; \quad x = x_0 + hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{6} D^2 f + \frac{h^3}{6} f'_x Df +$$

$$+ \frac{h^4}{24} D^3 f + \frac{h^4}{24} f'_x D^2 f + \frac{h^4}{8} Df'_x Df + \frac{h^4}{24} f'^2_x Df + \ldots .$$

és igy

$$hf_2 = hf + h^2 Df + \frac{h^3}{2} f'_x Df + \frac{h^4}{6} f'_x D^2 f + \frac{h^4}{6} f'^2_x Df + \frac{h^5}{24} f'_x D^3 f +$$

$$+ \frac{h^5}{24} f'^2_x D^2 f + \frac{7h^5}{24} f'_x Df'_x Df + \frac{h^5}{24} f'^3_x Df + \frac{h^3}{2} D^2 f +$$

$$+ \frac{h^4}{2} Df\, Df'_x + \frac{h^5}{6} D^2 f\, Df'_x + \frac{h^5}{8} f''_{xx} (Df)^2 + \frac{h^4}{6} D^3 f +$$

$$+ \frac{h^5}{4} Df\, D^2 f'_x + \frac{h^5}{24} D^4 f + \ldots ,$$

továbbá

$$h^2 Df_2 = h^2 Df + h^3 D(Df) + \frac{h^4}{2} \frac{\partial}{\partial x}(Df) \cdot Df + \frac{h^5}{6} \frac{\partial}{\partial x}(Df) D^2 f +$$

$$+ \frac{h^5}{6} \frac{\partial}{\partial x}(Df) f'_x Df + \frac{h^4}{2} D^2(Df) + \frac{h^5}{2} D\left(\frac{\partial}{\partial x}(Df)\right) Df +$$

$$+ \frac{h^5}{6} D^3 (Df) + \ldots = h^2 Df + h^3 D^2 f + h^3 f'_x Df + \frac{3h^4}{2} Df\, Df'_x +$$

$$+\frac{h^4}{2} f'^2_x Df + \frac{2h^5}{3} Df'_x D^2 f + \frac{h^5}{6} f'^2_x D^2 f + \frac{7h^5}{6} f'_x Df'_x Df +$$
$$+\frac{h^5}{6} f'^3_x Df + \frac{h^4}{2} D^3 f + \frac{h^4}{2} f'_x D^2 f + h^5 D^2 f'_x Df +$$
$$+\frac{h^5}{2} f''_{xx} (Df)^2 + \frac{h^5}{6} D^4 f + \frac{h^5}{6} f'_x D^3 f + \ldots$$

és

$$f'_{x,2} = f'_x + h Df'_x + \frac{h^2}{2} f''_{xx} Df + \frac{h^2}{2} D^2 f'_x + \ldots$$

Ilymódon a 3 indexü pontra

$$t = t_0 + (1 + \frac{3}{4}\delta)h; \quad x = x_2 + \frac{3}{4} h\delta f_2 + \frac{9}{32} h^2 \delta^2 Df_2 =$$
$$= x_0 + (1 + \frac{3}{4}\delta)hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{6} D^2 f + \frac{h^3}{6} f'_x Df +$$
$$+ \frac{h^4}{24} D^3 f + \frac{h^4}{24} f'_x D^2 f + \frac{h^4}{8} Df'_x Df + \frac{h^4}{24} f'^2_x Df + \frac{3}{4}\delta h^2 Df +$$
$$+ \frac{3}{8}\delta h^3 f'_x Df + \frac{1}{8}\delta h^4 f'_x D^2 f + \frac{1}{8}\delta h^4 f'^2_x Df + \ldots$$
$$+ \frac{3}{8}\delta h^3 D^2 f + \frac{3}{8}\delta h^4 Df Df'_x + \frac{1}{8}\delta h^4 D^3 f + \frac{9}{32}\delta^2 h^2 Df +$$
$$+ \frac{9}{32}\delta^2 h^3 D^2 f + \frac{9}{32}\delta^2 h^3 f'_x Df + \frac{27}{64}\delta^2 h^4 Df Df'_x +$$
$$+ \frac{9}{64}\delta^2 h^4 f'^2_x Df + \frac{9}{64}\delta^2 h^4 D^3 f + \frac{9}{64}\delta^2 h^4 f'_x D^2 f + \ldots$$

$$= x_0 + \left(1+\frac{3}{4}\delta\right)hf + \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)h^2Df + \left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)h^3D^2f$$

$$+\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)h^3f'_xDf + \left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\delta+\frac{9}{64}\delta^2\right)h^4D^3f +$$

$$+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\delta+\frac{9}{64}\delta^2\right)h^4f'_xD^2f + \left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\delta+\frac{27}{64}\delta^2\right)h^4Df'_xDf +$$

$$+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\delta+\frac{9}{64}\delta^2\right)h^4f'^2_xDf + \cdots$$

Eszerint

$$hf_3 = hf + \left(1+\frac{3}{4}\delta\right)h^2Df + \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)h^3f'_xDf +$$

$$+\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)h^4f'_xD^2f + \left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)h^4f'_xDf +$$

$$+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\delta+\frac{9}{64}\delta^2\right)h^5f'_xD^3f + \left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\delta+\frac{9}{64}\delta^2\right)h^5f'^2_xD^2f +$$

$$+\left[\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\delta+\frac{27}{64}\delta^2\right)+\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)\right]h^5f'_xDf'_xDf +$$

$$+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\delta+\frac{9}{64}\delta^2\right)h^5f'^3_xDf + \frac{\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^2}{2}h^3D^2f + \left(1+\frac{3}{4}\delta\right)\left(\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)h^4DfDf'_x + \left(1+\frac{3}{4}\delta\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)h^5Df'_xD^2f +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)^2h^5f''_{xx}(Df)^2 + \frac{\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^3}{6}h^4D^3f +$$

$$+\frac{\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^2}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)h^5D^2f'_xDf + \frac{\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^4}{24}h^5D^4f + \ldots$$

Egyenletcsoportjaink ugyanugy alakulnak, mint a másik formularendszernél; egyetlen változás, hogy Δx hatványsorát a $t = t_0 + (1+\delta)h$ helyen kell tekintenünk. Az első hét egyenlet tehát D^2f, D^3f, D^4f, $DfDf'_x$, $D^2fDf'_x$, $DfD^2f'_x$ ill. $f''_{xx}(Df)^2$ együtthatóinak azonosságát fejezi ki:

$$\frac{(1+\delta)^3}{6} = r_1 \cdot \frac{9}{32} + r_2 \cdot \frac{1}{2} + r_3 \cdot \frac{(1+\frac{3}{4}\delta)^2}{2} + s_2 \cdot 1$$

$$\frac{(1+\delta)^4}{24} = r_1 \cdot \frac{9}{128} + r_2 \cdot \frac{1}{6} + r_3 \frac{(1+\frac{3}{4}\delta)^3}{6} + s_2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{(1+\delta)^5}{120} = r_1 \cdot \frac{27}{2048} + r_2 \cdot \frac{1}{24} + r_3 \frac{(1+\frac{3}{4}\delta)^4}{24} + s_2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\frac{(1+\delta)^4}{8} = r_1 \cdot \frac{27}{128} + r_2 \cdot \frac{1}{2} + r_3 \cdot (1+\frac{3}{4}\delta)(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta + \frac{9}{32}\delta^2) + s_2 \cdot \frac{3}{2} +$$

$$+ t_{2,1} \cdot \frac{3}{4} + t_{2,2} \cdot 1 + t_{2,3} \cdot (1 + \frac{3}{4}\delta)$$

$$\frac{(1+\delta)^5}{30} = r_1 \cdot \phi + r_2 \cdot \frac{1}{6} + r_3 (1+\frac{3}{4}\delta)(\frac{1}{6} + \frac{3}{8}\delta + \frac{9}{32}\delta^2 + s_2 \frac{2}{3} +$$

$$+ t_{2,1} \cdot \frac{9}{32} + t_{2,2} \cdot \frac{1}{2} + t_{2,3} \frac{(1+\frac{3}{4}\delta)^2}{2}$$

$$\frac{(1+\delta)^5}{20} = r_1 \cdot \frac{81}{1024} + r_2 \cdot \frac{1}{4} + r_3 \cdot \frac{(1+\frac{3}{4}\delta)^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta + \frac{9}{32}\delta^2\right) + s_2 \cdot 1 +$$

$$+ t_{2,1} \cdot \frac{3}{8} + t_{2,2} \cdot \frac{1}{2} + t_{2,3} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)$$

$$\frac{(1+\delta)^5}{40} = r_1 \cdot \frac{81}{2048} + r_2 \cdot \frac{1}{8} + r_3 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta + \frac{9}{32}\delta^2\right)^2 + s_2 \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ t_{2,1} \cdot \frac{3}{8} + t_{2,2} \cdot \frac{1}{2} + t_{2,3} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)$$

Figyelembevéve itt az $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta + \frac{9}{32}\delta^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)^2$ relációt, továbbá a két utolsó egyenlet különbségét képezve, az is azonos a harmadikkal. Egy egyenlet tehát itt is elhagyható. Igy külön kezelhető az első három és a negyedik és hatodik azonosságát megkövetelő, továbbá a negyedik és ötödik egyenlet:

$$27 r_1 + 48 r_2 + 48\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)^2 r^3 96 s_2 = 16(1+\delta)^3$$

$$27 r_1 + 64 r_2 + 64\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)^3 r^3 192 s_2 = 16(1+\delta)^4$$

$$405 r_1 + 1280 r_2 + 1280\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)^4 r_3 + 5120 s_2 = 256(1-\delta)^5$$

$$540 r_1 + 1280 r_2 + 1280\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)^3 r_3 + 3840 s_2 -$$

$$- 320(1+\delta)^4 = 405 r_1 + 1280 r_2 + 1280\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)^4 r_3$$

$$+ 5120 s_2 - 256(1+\delta)^5,$$

amiből a $\delta = 1, \frac{1}{2}$ ill. 2-nek megfelelő értékek

$r_1 = \frac{4096}{135}$ ill. $= \frac{16}{5}$ ill. $= \frac{26608}{45}$

$r_2 = -\frac{128}{5}$ ill. $= -\frac{297}{160}$ ill. $= -\frac{2562}{5}$

$r_3 = \phi$ ill. $= \phi$ ill. $= \phi$

$s_2 = \frac{28}{5}$ ill. $= \frac{189}{320}$ ill. $= \frac{472}{5}$

$$27 r_1 + 64 r_2 + 64\left(-1 + \frac{3}{4}\delta\right)^3 r_3\, 192 s_2 + 96 t_{2,1} + 128 t_{2,2} +$$

$$+ 128\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right) t_{2,3} = 80 r_2 + 480\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{8}\delta + \frac{9}{32}\delta^2\right) r_3 +$$

$$+ 320 s_2 + 135 t_{2,1} + 240 t_{2,2} + 240\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)^2 t_{2,3} = 16(1+\delta)^5$$

$$405 r_1 + 1280 r_2 + 1280\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)^4 r_3 + 5120 s_2 + 1920 t_{2,1} +$$

$$+ 2560 t_{2,2} + 2560\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right) = 256(1+\delta)^5$$

amiből

$t_{2,1} = -\frac{307}{180}$ ill. $= \frac{6373}{1440}$ ill. $= -\frac{1358}{5}$

$t_{2,2} = \frac{307}{240}$ ill. $= -\frac{6373}{1920}$ ill. $= \frac{2037}{10}$

$t_{2,3} = \phi$ ill. $= \phi$ ill. $= \phi$

Ezek ismeretében f ill. Df együtthatóinak összevetéséből r_0 ill. s_0 is megállapitható:

$$(1+\delta) = r_0 + r_1 \cdot + r_2 + r_3$$

ill.

$$\frac{(1+\delta)^2}{2} = r_1 \cdot \frac{3}{4} + r_2 \cdot 1 + r_3 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\delta\right) + s_0 \cdot 1 + s_2 \cdot 1$$

amiből

$$r_0 = -\frac{74}{27} \qquad \text{ill.} = \frac{5}{32} \qquad \text{ill.} = -\frac{683}{9}$$

$$s_0 = -\frac{34}{45} \qquad \text{ill.} = -\frac{3}{320} \qquad \text{ill.} = -\frac{629}{30}$$

Ujabb három egyenlet adódik f'_x Df, f'_x D^2f ill. f'_x D^3f együtthatóinak egyeztetése révén:

$$\frac{(1+\delta)^3}{6} = r_1 \cdot \frac{9}{32} + r_2 \cdot \frac{1}{2} + r_3 \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)^2 + s_2 \cdot 1 +$$

$$+ t_{2,1} \cdot \frac{3}{4} + t_{2,2} \cdot 1 + t_{2,3} \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)$$

$$+ t_{0,1} \cdot \frac{3}{4} + t_{0,2} \cdot 1 + t_{0,3} \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)$$

$$\frac{(1+\delta)^4}{24} = r_1 \cdot \phi + r_2 \cdot \frac{1}{6} + r_3 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{8}\delta + \frac{9}{32}\delta^2\right) + s_2 \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ t_{2,1} \cdot \frac{9}{32} + t_{2,2} \cdot \frac{1}{2} + t_{2,3} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\delta\right)^2$$

$$+ t_{0,1}\cdot\frac{9}{32} + t_{0,2}\cdot\frac{1}{2} + t_{0,3}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^2 ;$$

$$\frac{(1+\delta)^5}{120} = r_1\cdot\phi + r_2\cdot\frac{1}{24} + r_3\cdot\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\delta+\frac{9}{64}\delta^2\right) + s_2\cdot\frac{1}{6} +$$

$$+ t_{2,1}\cdot\frac{9}{128} + t_{2,2}\cdot\frac{1}{8} + t_{2,3}\cdot\frac{1}{6}\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^3 +$$

$$+ t_{0,1}\cdot\frac{9}{128} + t_{0,2}\cdot\frac{1}{6} + t_{0,3}\cdot\frac{1}{6}\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^3,$$

amiből

$t_{0,1} = -\frac{3277}{180}$ ill. $= -\frac{45689}{7200}$ ill. $= -\frac{3946}{21}$

$t_{0,2} = \frac{9319}{720}$ ill. $= \frac{8677}{1920}$ ill. $= \frac{2144}{15}$

$t_{0,3} = \frac{128}{315}$ ill. $= \frac{48}{275}$ ill. $= -\frac{421}{525}$

Ujabb egyenlet adódik $f_x' D f_x' D f$ együtthatói egyeztetése során:

$$\frac{7(1+\delta)^5}{120} = r_1\cdot\phi + r_2\cdot\frac{7}{24} + r_3\left[\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\delta+\frac{27}{64}\delta^2\right)\right] + s_2\cdot\frac{7}{6} + t_{0,1}\cdot\frac{27}{128} + t_{0,2}\cdot\frac{1}{2} +$$

$$+ t_{0,3}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^3 + t_{2,1}\cdot\left(\frac{27}{128}+\frac{9}{32}\right) + t_{2,2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + t_{2,3}$$

$$\cdot\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^3 + \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^2\right] + v_3\cdot\frac{3}{2}\ ,$$

amiből

$v_3 = -\frac{2611}{2880}$ ill. $= \frac{4429}{23040}$ ill. $= -\frac{10103}{360}$

Ujabb két egyenletet szolgáltat $f_x'^2\, Df$ ill. $f_x'^2\, D^2f$ együtthatóinak egyeztetése:

$$\frac{(1+\delta)^4}{24} = r_1\cdot\phi + r_2\cdot\frac{1}{6} + r_3\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right) + s_2\cdot\frac{1}{2} +$$

$$+ t_{0,1}\cdot\frac{9}{32} + t_{0,2}\cdot\frac{1}{2} + t_{0,3}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^2$$

$$+ t_{2,1}\cdot\frac{9}{32} + t_{2,2}\cdot\frac{1}{2} + t_{2,3}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\delta\right)^2 +$$

$$+ v_3\cdot\frac{3}{4} + v_1\cdot\frac{3}{4} + v_2\cdot 1\,;$$

$$\frac{(1+\delta)^5}{120} = r_1\cdot\phi + r_2\,\frac{1}{24} + r_3\cdot\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\delta+\frac{9}{64}\delta^2\right) + s_2\cdot\frac{1}{6} +$$

$$+ t_{0,2}\cdot\phi + t_{0,2}\cdot\frac{1}{6} + t_{0,3}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right) +$$

$$+ t_{2,1}\cdot\phi + t_{2,2}\cdot\frac{1}{6} + t_{2,3}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\delta+\frac{9}{32}\delta^2\right) +$$

$$+ v_3\cdot\frac{9}{32} + v_1\cdot\frac{9}{32} + v_2\cdot\frac{1}{2}\,;$$

amiből

$$v_1 = \frac{513893}{20160} \quad \text{ill.} = \frac{2890997}{1267200} \quad \text{ill.} = \frac{981587}{1800}$$

$$v_2 = -\frac{1936}{105} \quad \text{ill.} = -\frac{8163}{4400} \quad \text{ill.} = -\frac{29096}{75}$$

Végül $f'^{3}_{x}\,Df$ együtthatóiból

$$\frac{(1+\delta)^5}{120} = r_1 \cdot \phi + r_2 \cdot \frac{1}{24} + r_3 \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\delta + \frac{9}{64}\right) + s_2 \cdot \frac{1}{6} +$$

$$+ t_{0,1} \cdot \phi + t_{0,2} \cdot \frac{1}{6} + t_{0,3} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{8}\delta + \frac{9}{32}\delta^2\right) +$$

$$+ t_{2,1} \cdot \phi + t_{2,2} \cdot \frac{1}{6} + t_{2,3} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{8}\delta + \frac{9}{32}\delta^2\right) +$$

$$+ v_1 \cdot \frac{9}{32} + v_2 \cdot \frac{1}{2} + v_3 \frac{9}{32} + w \cdot \frac{3}{4})$$

amiből

$w = \phi$ ill. $= \phi$ ill. $= \phi$

és igy formuláink:

lépéstartás esetén

$$k_s = 30{,}34074 h f_1 - 25{,}6 h f_2 - 2{,}74074074 h f_0 -$$

$$-0{,}75555555 h^2 D f_0 + 5{,}6 h^2 D f_2 - 18{,}205555 h^2 f'_{x,0}(f_1 - f_0) +$$

$$+12{,}943055 h^2 f'_{x,0}(f_2 - f_0) + 0{,}4063493 h^2 f'_{x,0}(f_3 - \qquad (34)$$

$$-f_0) - 1{,}705555 h^2 f'_{x,2}(f_1 - f_0) + 1{,}2791666 h^2 f'_{x,2}(f_2 - f_0) +$$

$$+ 25{,}490724 h^3 f'^{2}_{x,0}(f_1 - f_0) - 18{,}438095 h^3 f'^{2}_{x,0}(f_2 - f_0) -$$

$$- 0{,}9065972 h^3 f'_{x,2} \cdot (f_1 - f_0);$$

lépésfelezés esetén

$$
\begin{aligned}
k_s = {} & 0{,}15625\,hf_0 + 3{,}2\,hf_1 - 1{,}85625\,hf_2 - 0{,}009375 \\
& h^2 Df_0 + 0{,}590625\,h^2 Df_2 - 6{,}345694\,h^2 f'_{x,0}(f_1 - f_0) + 4{,}5192708 \\
& h^2 f'_{x,0}(f_2 - f_0) + 0{,}174545\,h^2 f'_{x,0}(f_3 - f_0) + 4{,}425694\,h^2 f'_{x,2} \\
& (f_1 - f_0) - 3{,}3192708\,h^2 f'_{x,2}(f_2 - f_0) + 2{,}2814054\,h^3 \\
& f'_{x,0}(f_1 - f_0) - 1{,}8552272\,h^3 f'_{x,0}(f_2 - f_0) + \\
& + 0{,}1922309\,h^3 f'^{2}_{x,2}(f_1 - f_0);
\end{aligned}
\tag{35}
$$

lépésduplikálás esetén

$$
\begin{aligned}
k_s = {} & -75{,}88888\,hf_0 + 591{,}28888\,hf_1 - 512{,}4\,hf_2 - \\
& - 20{,}96666\,h^2 Df_0 + 94{,}4\,h^2 Df_2 - 187{,}90476\,h^2 f'_{x,0}(f_1 - f_0) + \\
& + 142{,}93333\,h^2 f'_{x,0}(f_2 - f_0) - 0{,}8019047\,h^2 f'_{x,0}(f_3 - f_0) \\
& - 271{,}6\,h^2 f'_{x,2}(f_1 - f_0) + 203{,}7\,h^2 f'_{x,2}(f_2 - f_0) + 545{,}32611 \\
& h^3 f'^{2}_{x,0}(f_1 - f_0) - 387{,}9466\,h^3 f'^{2}_{x,0}(f_2 - f_0) - \\
& - 28{,}063883\,h^3 f'_{x,2}(f_1 - f_0).
\end{aligned}
\tag{36}
$$

A fenti formulák alapján mármost a következőképpen járhatunk el: a kezdőintervallumtól eltekintve - erre még visszatérünk - az egyes részintervallumok végpontja és kezdőpontja (ill. a megelőző részintervallum kezdőpontja) közötti függvényértéknövekmények

$$\Delta x^{(1)} = x(t_i + h) - x(t_i)$$

ill.

$$\Delta x^{(2)} = x(t_i + h) - x(t_i - \vartheta h)$$

számára két-két közelités áll rendelkezésünkre. $\Delta x^{(1)}$ -et ti. az ötödfoku pontosságu k és a negyedfoku pontosságu k közelitésben is ismerjük; $\Delta x^{(2)}$ -t viszont a $(t_0 - \vartheta h; t_0 + h)$ intervallumot egy lépésben áthidaló ötödfokuan pontos k_s és a megelőző lépésben számitott ötödfoku pontosságu $\hat{k}_r$ és a $\hat{k}$ összege is közeliti. Kettős ellenőrzésnek is alávethetjük tehát $\Delta x^{(1)}$ pontosságát és ennek révén h megválasztását. Egyrészt $|\hat{k} - k|$ elég pontosan jellemzi k hibáját és igy általában nyugodtan tekinthetjük elég sokszor differenciálható f esetén $\hat{k}$ hibája "erős" felső korlátjának. Másrészt a klasszikusan alkalmazott hibabecslő módszer mintájára a

$$\Delta x_r = C_1 \cdot (\vartheta h)^6 + \hat{k}_r$$
$$\Delta x^{(1)} = C_2 \cdot h^6 + \hat{k}$$
$$\Delta x^{(2)} = C_3 \cdot (1 + \vartheta)^6 h^6 + k_s$$

relációk felhasználásával a szokásos módon, C_1, C_2 és C_3 egy közös C-vel való helyettesitése révén adódik $\Delta x^{(1)}$ hibájanak becslésére a

$$\frac{|\hat{k}_r + \hat{k} - k_s|}{6\vartheta^5+15\vartheta^4+20\vartheta^3+15\vartheta^2+6\vartheta}$$

reláció. Ha tehát $\Delta x^{(1)}$ hibáját a

$$H = \max\left\{|\hat{k}-k|;\ (6\vartheta^5+15\vartheta^4+20\vartheta^3+15\vartheta^2+6\vartheta)^{-1}\cdot|\hat{k}_r+\hat{k}-k_1|\right\}$$

relációval becsüljük, a szokásos eljárásnál lényegesen biztosabban becsüljük felülről a hibát, megszüntetve a kétszeres lépésközzel járó tulmunka jelentős részét is. Hogy a számitás ismétlését is lehetőleg elkerüljük, h értékét a soronkövetkező lépésben lefelezzük, ha H a megengedett hiba $\frac{1}{2}$ -szerese fölé nő, és csak akkor duplázunk, ha H a megengedett hiba $\frac{1}{128}$ -ad része alá csökken. Ilymódon a klasszikus módszernél adódó, jelentős tulmunka nagyrészét megtakaritjuk és általában nagyobb biztonsággal dolgozhatunk, mint a klasszikus esetben. Az exakt hibabecslésre egy későbbi dolgozatban még visszatérünk; ez azonban csak elméleti érdekü kérdés, hiszen jólismert, hogy a gyakorlatban az igy adódó bonyolult becsléseket nem tudjuk használni.

Ami a kezdő intervallumot érinti, ott csak a megadott ötödfoku pontosságu $\hat{k}$ és k eltérésére szoritkozhatunk, ill. szükség esetén a féllépéses számitásismétléssel ellenőrizhetjük k pontosságát.

Megadott formuláink csak mintának számitanak, hiszen hasonló elvek alapján ölelkező formulákra támaszkodó hatod- heted- stb. fokszámu közelitéseket is lehet konstruálni. Ezekre egy későbbi munkában térünk vissza.

A kidolgozott formulák erejét és a hibabecslés értékét a 3. táblázat érzékelteti!

4. §. A szinguláris helyek környezetéről.

Mint a bevezetésben is emlitettük, a zérushelyek keresésének differenciálegyenlettel történő megoldása esetén olyan tipusu szinguláris helyek környezetében okoz a javasolt módszer problémákat, ahol az (1) reláció alapján adódó

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

egyenlet jobboldalán $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ -nek zérushelye van. Megemlitjük, hogy gyakorlatilag már ezen zérushelyek környezetében is komoly numerikus problémák merülnek fel, mert a megfelelő pontosság eléréséhez a szokásos Runge-Kutta módszer alkalmazása esetén tul "finom" lépésközt kell használni. Mindenesetre a 3. §.-ban kimunkált formulák ilyen pontok környezetében sokkal hatásosabbak mint a Runge-Kutta módszer. Ezt jól érzékelteti a 2-3. táblázat. A szinguláris helyek közvetlen környezetében azonban ez a módszer se válik be.

Az alábbiakban ezért feltesszük, hogy az

$$\dot{x} = f(t,x)$$

differenciálegyenletet olyan (t_0,x_0) pont közelében tekintjük, ahol f viszonylag nagyon nagy, sőt esetleg $|f| \to \infty$ ha $(t,x) \to (t_0,x_0)$ és amelynek környezetében f viszonylag gyorsan változik. Célszerü ekkor a

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t,x)} = g(t,x)$$

egyenletet tekinteni, azaz felcserélni - legalább is formálisan - a két változó szerepét. A két változó szerepcseréjét azért nevezzük formálisnak, mert végeredményben Δt értékét tekintjük adottnak és $\Delta x \sim k$ értékét keressük továbbra is. (Ilymódon - éppen mert a használt Runge-Kutta-tipusu eljárás magasabb fokszámu - lényegében a Newton-Raphson-féle eljárás magasabb fokszámu polinommal történő megvalósitásának megfelelő módszerre jutunk.)

A legegyszerübb lehetőség mármost az a két változó formális szerepcseréjének megváltoztatására, hogy ténylegesen a

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t,x)} = g(t,x)$$

egyenletből indulunk ki, és eredeti formuláinkat használjuk, figyelembevéve x és t szerepének felcserélődését (ez természetesen azzal jár, hogy D helyett a $\tilde{D} = \frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial t}$ operátort használjuk). Megtartva a k és h jelölést, formálisan a

$$h_i = g_i k + \alpha_{i,1} Dg_{j(i)} k^2 + \dots$$

$$h_i^* = (E_{i1} g_1 + E_{i_2} g_2 + \dots + E_{ii} g_i) k + \beta_{i,1} Dg_{j(i)} k^2 + \dots$$

$$h = \sum R_i h_i$$

formulákból indulunk ki, de nem k, hanem h_1 értékét veszszük fel, ebből számitjuk ki az első egyenlet alapján k értékét, majd ez utóbbi alapján h_1^*, h_2 stb. ill. h értékét. (Igy természetesen se h, se k értéke nem irható előre elő, sőt h komplexnek is adódhat; éppen ezért nem használható a kétlépéses ötödfoku eljárás se, hiszen ott a két lépésbeni k-értékek viszonyának is adottnak kellene lennie. (Megemlitjük egyébként, hogy ez utóbbi probléma áthidalható, mert a $\vartheta = \frac{k_r}{k}$ választással is élhetünk.) Jóllehet a fenti formularendszer is használható elvileg, lényeges hátránynak kell tartani azt a tényt, hogy h nem irható elő, ezért egy más módszerrel élünk. A két változó szerepének formális felcserélését nem a differenciálegyenlet közvetlen transzformációjával érjük el, hanem az eredeti formulák inverziójával. Eközben fellépnek $\frac{1}{f}$ deriváltjai, és ezeket helyettesitjük g deriváltjaival.

Eredetileg ti.

$$k_i \text{ ill. } k_i^* = a_{i,1} h + a_{i,2} h^2 + a_{i,3} h^3 + \dots \qquad (39)$$

alaku formulákat adtunk meg, ahol az $a_{i,1}$-ek állandókból és az f_j-k lineáris kombinációból épülnek fel, az $a_{i,2}$-k hasonlóan állandókból, Df_j-k ill. $f'_{x,j}$ $(f_{j2}-f_{j1})$-ek lineáris kombinációiból, stb.

Mármost e formulákban egyfelől az eredeti $\dot{x} = f(t,x)$ differenciálegyenlet helyett a $t' = \frac{1}{f} = g(x,t)$ differenciálegyenlet jobboldalára támaszkodunk, ami azt jelenti, hogy a szereplő f_j függvényértékeket $\frac{1}{g_j}$-vel helyettesitjük, továbbá figyelembevesszük a

$$Df_j = D\left(\frac{1}{g_j}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{g_j} + f_j\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{g_j} = -\frac{1}{g_j^3}\left(\frac{\partial}{\partial x}g_j + g_j\frac{\partial}{\partial t}g_j\right) = -\left[\frac{1}{g^3}D\tilde{g}\right]_j \tag{40}$$

ill. az

$$f'_{x,j} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{g_j} = -\frac{1}{g_j^2}g'_{x_j} \tag{41}$$

relációkat (ez eddig természetesen csak formálit átalakitás), másrészt azonban a $k_i = \Psi_i(h)$ formulákról áttérünk az inverz $h = \Psi_i^{-1}(k_i)$ formulákra, éspedig olymódon, hogy utóbbiak hatványsorát tekintjük, és azt olyan pontosságnál csonkitjuk, mint amilyen pontosságu a használt teljes formula. A (39) alatti formulák inverz függvényének hatványsora jólismert alaku (l. pl. [7]), éspedig a

$$h = \alpha_{i,1}^{0}k_i + \alpha_{i,2}^{0}k_i^2 + \alpha_{i,3}^{0}k_i^3 + \alpha_{i,4}^{0}k_i^4 + \alpha_{i,5}k_i^5 + \dots \tag{42}$$

kifejezésben (ahol $^{\circ}k_i$ vagy k_i-t vagy k_i^{*}-ot jelöli)

$$\alpha_{i,1}=\frac{1}{a_{i,1}}\;;\quad \alpha_{i,2}=-\frac{a_{i,2}}{a_{i,1}^{3}}\;;\quad \alpha_{i,3}=\frac{2a_{i,2}^{2}-a_{i,1}a_{i,3}}{a_{i,1}^{5}}$$

$$\alpha_{i,4}=\frac{5a_{i,1}a_{i,2}a_{i,3}-5a_{i,2}^{3}-a_{i,1}^{2}a_{i,4}}{a_{i,1}^{7}}\;;\quad \alpha_{i,5}=\frac{14a_{i,2}^{4}+6a_{i,1}^{2}a_{i,2}a_{i,4}}{a_{i,1}^{9}}$$

$$\frac{-a_{i,1}^{3}a_{i,5}+3a_{i,1}^{2}a_{i,3}^{2}-21a_{i,1}a_{i,2}^{2}a_{i,3}}{a_{i,1}^{9}}\qquad \alpha_{i,6}=\frac{7a_{i,1}^{3}a_{i,2}a_{i,5}+7a_{i,1}^{3}a_{i,3}}{a_{i,1}^{11}} \tag{43}$$

$$\frac{a_{i,4}+84a_{i,1}a_{i,2}^{3}a_{i,3}-42a_{i,2}^{5}-28a_{i,1}^{2}a_{i,2}a_{i,3}^{2}-28a_{i,1}^{2}a_{i,2}^{2}a_{i,4}-a_{i,1}^{4}a_{i,6}}{a_{i,1}^{11}}$$

stb. Ha itt elvégezzük még az f-ek g-kkel történő helyettesitését, akkor - amint ez (39)-ből ill. (43)-ból leolvasható - $\alpha_{i,1}$ ill. $\alpha_{i,2}$ nem tartalmaz nevezőjében g_i tipusu szorzófaktort, csak a további tagok. Célszerü ezért a (41) alatti összeget igy alakitani:

$$h=\mu_{i,1}\,g_{j(i)}\,{}^{\circ}k_i+\mu_{i,2}\,{}^{\circ}k_i^{2}+\mu_{i,3}\frac{{}^{\circ}k_i^{3}}{g_{j(i)}}+\mu_{i,4}\frac{{}^{\circ}k_i^{4}}{g_{j(i)}^{2}}+\dots+$$

$$+\mu_{i,m}\frac{{}^{\circ}k_i^{m}}{g_{j(i)}^{m-2}}+\dots \tag{44}$$

E formulákban a $\mu_{i,j}$ -k olyan kifejezések, amelyek állandókból, a g_j-kből, Dg_j-kből, $gx,_j$-kből tevődnek össze, és korlátosak maradnak $|f_{j(i)}|\to\infty$ azaz $g_{j(i)}\to 0$ esetén is. Minthogy a harmadik tagtól kezdve a törtek nevezőiben fellépnek a $g_{j(i)}$ hatványai, a (44) alatti formulákat tovább alakitjuk: az $\frac{1}{g_{j(i)}}$-t tartalmazó tagot $\left(h-\mu_{i,2}\,{}^{o}k_i^{2}\right)^{2}\frac{1}{{}^{o}k_i^{2}}$ egy alkalmas állandószorosának levonásával távolitjuk el, a további tagokat viszont, amelyek $\frac{1}{g_{j(i)}}$ -nak $r > 1$-edik hatványait tartalmazzák, a

$$\left(h-\mu_{i,1}\,g_{j(i)}\,{}^{o}k_i-\mu_{i,2}\,{}^{o}k_i^{2}\right)^{r}\frac{1}{{}^{o}k_i^{2r-2}}$$

kifejezés alkalmas (r-től függő) állandóival. Ezen átalakitások elvégzése után végül is a jobboldalon három tag összege marad, amelyek ${}^{o}k_i^{2}$ -et, ${}^{o}k_i$ -t ill. állandót tartalmaznak, baloldala pedig a

$$\tau=\frac{h-\mu_{i,1}\,g_{j(i)}\,{}^{o}k_i-\mu_{i,2}\,{}^{o}k_i^{2}}{k_i^{2}}\tag{45}$$

változó hatványsora. Minthogy $\tau=O({}^{o}k_i)$ érvényes (42) szerint, sőt $g_{j(i)}\to 0$ esetén is érvényes marad, azért ez utóbbit a használt formula fokszámától függően csonkitjuk.

Ami az adódó formulák használhatóságát illeti, azt kell megjegyeznünk, hogy amennyiben a tekintett integrálgörbe csak erősen megközelit egy izolált szinguláris helyet, vagypedig valamelyik bázispont ilyen, de a többi fellépő bázispont előre meghatározhatóan nem az, akkor használhatjuk az egyszerübb (24) - (31) - (33) tipusu formulákat, csak arra kell vigyáznunk, hogy mindazok a ${}^{o}k_i$ kifejezésekben, amelyekben egyáltalán fellép a szinguláris helyre vonatkozó tag, $a_{i,1}$

tartalmazza a megfelelő f-értéket (ez a k_i^{*}-okat illetően automatikusan teljesül, a k_i-kben pedig szintén, ha a szinguláris hely nem a 0 indexü; hf_0-t viszont szabadon csoportositjuk az egyes k_i-khez). Ha viszont bizonytalan a szingularitás helye (25) tipusu formulából kell kiindulnunk, ahol egy-egy formulában csak azonos indexü helyek fordulnak elő.

Példaként az átalakitás szemléltetésére bemutatjuk a negyedfoku (24) ill. (25)-tel kapcsolatosan a szinguláris helyek környezetében alkalmazandó átalakitást.

Mindkét formulatipusnál k_1 és k_1^{*} azonos átalakitásban vesz részt, mert csak egy indextől függő (azaz egy meghatározott helyre vonatkozó) tagok szerepelnek benne. Ugyanez igaz a második formulatipus k_2 formulájára is. Ezeket tehát azonos módon kezeljük: kiindulunk a

$$
{}^{0}k_i = a_{i,1} f_{j(i)} \cdot h + a_{i,2} Df_{j(i)} h^2 + a_{i,3} f'_{x,j(i)} Df_{j(i)} h^3 + a_{i,4} f'^{2}_{x,j(i)} Df_{j(i)} h^4
$$

kifejezésből, amelyre az inverziós formulát alkalmazva, a

$$
h = \frac{1}{a_{i,1}} \cdot \frac{1}{f_{j(i)}} {}^{0}k_i - \frac{a_{i,2}}{a_{i,1}} \frac{Df_{j(i)}}{f^{3}_{j(i)}} {}^{0}k_i^{2} +
$$

$$
+ \left(\frac{2a_{i,2}^{2} (Df_{j(i)})^{2}}{a_{i,1}^{5} f_{j(i)}^{5}} - \frac{a_{i,3} f'_{x,j(i)} Df_{j(i)}}{a_{i,1}^{4} f^{4}_{j(i)}} \right) {}^{0}k_i^{3} +
$$

$$+\left(\frac{5a_{i,2}a_{i,3}f'_{x,j(i)}(Df_{j(i)})^2}{a_{i,1}^6 f_{j(i)}^6}-\frac{5a_{i,2}^3(Df_{j(i)})^3}{a_{i,1}^7 f_{j(i)}^7}-\frac{a_{i,4}f'^2_{j(i)}Df_{j(i)}}{a_{i,1}^5 f_{j(i)}^5}\right){}^0k_i^4$$

$$+\left(\frac{14a_{i,2}^4(Df_{j(i)})^4}{a_{i,1}^9 f_{j(i)}^9}+\frac{6a_{i,2}a_{i,4}f'^2_{x,j(i)}(Df_{j(i)})^2}{a_{i,1}^7 f_{j(i)}^7}+\frac{3a_{i,3}^2 f'^2_{x,j(i)}(Df_{j(i)})^2}{a_{i,1}^7 f_{j(i)}^7}-\right.$$

$$\left.-\frac{21a_{i,2}^2 a_{i,3}f'_{x,j(i)}(Df_{j(i)})^3}{a_{i,1}^8 f_{j(i)}^8}\right){}^0k_i^5+\cdots$$

reláció adódik. Elvégezve most a (40) - (41) alatti transzformációkat, a

$$h=\alpha_{i,1}g_j\,{}^0k_i+\alpha_{i,2}\,{}^0k_i^2+\alpha_{i,3}\frac{{}^0k_i^3}{g_j}+\alpha_{i,4}\frac{{}^0k_i^4}{g_j^2}+\alpha_{i,5}\frac{{}^0k_i^5}{g_j^3}+\cdots \qquad (46)$$

relációra jutunk, ahol

$$\alpha_{i,1}=\frac{1}{a_{i,1}}\;;\quad \alpha_{i,2}=+\frac{a_{i,2}}{a_{i,1}}\tilde{D}g_{j(i)}\;;$$

$$\alpha_i=2\frac{a_{i,2}^2}{a_{i,1}^5}\left(\tilde{D}g_{j(i)}\right)^2-\frac{a_{i,3}}{a_{i,1}^4}g'_{x,j(i)}\tilde{D}g_{j(i)}\;;$$

$$\alpha_{i,4} = -5\,\frac{a_{i,2}a_{i,3}}{a_{i,1}^{6}}\, g'_{x,j(i)}\left(\tilde{D}g_{j(i)}\right)^{2} + 5\,\frac{a_{i,2}^{3}}{a_{i,1}^{7}}\left(\tilde{D}g_{j(i)}\right)^{3} + \frac{a_{i,4}}{a_{i,1}^{5}}\, g'^{2}_{x,j(i)}\,\tilde{D}g_{j(i)};\quad \alpha_{i,5} = 14\,\frac{a_{i,2}^{4}}{a_{i,1}^{9}}\left(\tilde{D}g_{j(i)}\right)^{4} + 6\,\frac{a_{i,2}a_{i,4}}{a_{i,1}^{7}}\, g'^{2}_{x,j(i)}\left(\tilde{D}g_{j(i)}\right)^{2} + 3\,\frac{a_{i,2}^{3}}{a_{i,1}^{7}}\, g'^{2}_{x,j(i)}\left(\tilde{D}g_{j(i)}\right)^{2} - 21\,\frac{a_{i,2}^{2}a_{i,3}}{a_{i,1}^{8}}\, g'_{x,j(i)}\left(\tilde{D}g_{j(i)}\right)^{3};\ \text{stb.}$$

Mármost (46) alapján

$$h - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_{i,3}}{\alpha_{i,1}\cdot\alpha_{i,4}}\left(\frac{h-\alpha_{i,2}\,{}^{\circ}k_i^{2}}{{}^{\circ}k_i}\right)^{2} = \alpha_{i,1}\, g_j\,{}^{\circ}k_i + \alpha_{i,2}\,{}^{\circ}k_i^{2} + \alpha_{i,3}\,\frac{{}^{\circ}k_i^{3}}{g_j} + \alpha_{i,4}\,\frac{{}^{\circ}k_i^{4}}{g_j^{2}} + \alpha_{i,5}\,\frac{{}^{\circ}k_i^{5}}{g_j^{3}} + \dots$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_{i,1}\alpha_{i,3}}{\alpha_{i,4}}\, g_j^{2} - \frac{\alpha_{i,3}^{2}}{\alpha_{i,4}}\,{}^{\circ}k_i^{2} - \alpha_{i,3}\,\frac{{}^{\circ}k_i^{3}}{g_j} - \frac{\alpha_{i,3}^{3} + 2\alpha_{i,1}\alpha_{i,3}\alpha_{i,5}}{2\,\alpha_{i,1}\cdot\alpha_{i,4}}\,\frac{{}^{\circ}k_i}{g_j^{2}} - \dots =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\alpha_{i,1}\alpha_{i,3}}{\alpha_{i,4}}\, g_j^{2} + \alpha_{i,1}\, g_j\,{}^{\circ}k_i + \left(\alpha_{i,2} - \frac{\alpha_{i,3}^{2}}{\alpha_{i,4}}\right){}^{\circ}k_i^{2} + \frac{\alpha_{i,1}\alpha_{i,4}^{2} - \alpha_{i,3}^{3} - 2\alpha_{i,1}3\alpha_{i,5}}{2\,\alpha_{i,1}\,\alpha_{i,4}}\,\frac{{}^{\circ}k_i^{4}}{g_j^{2}} + \dots$$

Igy

$$h-\frac{1}{2}\frac{\alpha_{i,3}}{\alpha_{i,1}\alpha_{i,4}}\cdot\left(\frac{h-\alpha_{i,2}\,{}^{\circ}k_i^2}{{}^{\circ}k_i}\right)^2 -$$

$$-\frac{\alpha_{i,1}\alpha_{i,4}^2-\alpha_{i,3}^3-2\alpha_{i,1}\alpha_{i,3}\alpha_{i,5}}{2\alpha_{i,1}\alpha_{i,3}^2\alpha_{i,4}}\left(\frac{h-\alpha_{i,1}\,g_j\,{}^{\circ}k_i-\alpha_{i,2}\,{}^{\circ}k_i^2}{{}^{\circ}k_i^2}\right)^2\cdot{}^{\circ}k_i^2 \tag{47}$$

$$+\dots=-\frac{1}{2}\frac{\alpha_{i,1}\alpha_{i,3}}{\alpha_{i,4}}g_j^2+\alpha_{i,1}\,g_j\,{}^{\circ}k_i+\frac{\alpha_{i,2}\alpha_{i,4}-\alpha_{i,3}^2}{\alpha_{i,4}}\,{}^{\circ}k_i^2$$

ahol a baloldalon a pontozott rész a $T=\dfrac{h-\alpha_{i,1}g\,{}^{\circ}k_i-\alpha_{i,2}\,{}^{\circ}k_i^2}{{}^{\circ}k_i^2}$ változó magasabb hatványait jelöli, amelyek a negyedfoku pontosság miatt elhagyhatók.

Áttérünk most a (24) formula k_2-t megadó tagjának átalakitására. Amennyiben itt a $t_1=t_0+\frac{3}{4}h$, $x_1=x_0+k_1^*$ hely a szinguláris - vagy közel szinguláris - hely (ez a kevésbé valószinü), akkor az inverzió révén előálló formulában,

$$h=\frac{1}{f_1}k_2-\left[\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{f_1}Df_0+\frac{1}{4}f'_{x,0}\left(1-\frac{f_0}{f_1}\right)\right]k_2^2+$$

$$+2\left[\frac{1}{18}\frac{1}{f_1}Df_0+\frac{1}{4}f'_{x,0}\left(1-\frac{f_0}{f_1}\right)\right]^2k_2^3+\dots$$

-ban közvetlenül elvégezhetjük a $g=\frac{1}{f}$ transzformációt.

Igy

$$h=g_1k_2+\left[\frac{1}{18}g_1\frac{\tilde{D}g_0}{g_0^3}+\frac{1}{4}\frac{g'_{x,0}}{g_0^2}\left(1-\frac{g_1}{g_0}\right)\right]k_2^2+\dots$$

adódik, ami közvetlenül használható k_2 megállapitására.

Ha viszont (és ez az általánosabb), a t_0,x_0 hely szinguláris -

vagy ez is, a t_1, x_1 hely is közel szinguláris, akkor k_1-et és k_2-t át kell alakitani, pl. olymódon, hogy k_1-ben hf_o helyett csak _ pl. – $\frac{5}{11} hf_o$-t veszünk figyelembe (azaz ekkor (46)-ban $a_{1,1} = \frac{5}{11}$), k_2-ben pedig $\frac{3}{8}\, hf_o$-t (fenn kell állnia ti. a $\frac{11}{27} \cdot \frac{5}{11} hf_o + \frac{16}{27} \cdot \frac{3}{8} hf_o = \frac{11}{27} hf_o$ relációnak). Igy

$$k_2 = \left(\frac{3}{8} f_o + f_1\right) h + \left(\frac{1}{18} Df_o + \frac{1}{4} f'_{x,o}(f_1 - f_o)\right) h^2 ,$$

azaz

$$h = \frac{1}{\frac{3}{8} f_o + f_1} k_2 - \frac{\frac{1}{18} Df_o + \frac{1}{4} f'_{x,o}(f_1 - f_o)}{\left(\frac{3}{8} f_o + f_1\right)^3} k_2^2 +$$

$$+ 2 \frac{\left(\frac{1}{18} Df_o + \frac{1}{4} f'_{x,o}(f_1 - f_o)\right)^2}{\left(\frac{3}{8} f_o + f_1\right)^5} k_2^3 - 5 \frac{\left(\frac{1}{18} Df_o + \frac{1}{4} f'_{x,o}(f_1 - f_o)\right)^3}{\left(\frac{3}{8} f_o + f_1\right)^7} k_2^4$$

$$+ 14 \frac{\left(\frac{1}{18} Df_o + \frac{1}{4} f'_{x,o}(f_1 - f_o)\right)^4}{\left(\frac{3}{8} f_o + f_1\right)^9} k_2^5 \pm \ldots .$$

Elvégezve a megfelelő átalakitást:

$$h = \alpha_{21}\, g_o k_2 + \alpha_{22} k_2^2 + \alpha_{23} \frac{k_2^3}{g_o} + \alpha_{24} \frac{k_2^4}{g_o^2} + \alpha_{25} \frac{k_2^5}{g_o^3} + \ldots$$

ahol

$$\alpha = \frac{1}{g_o\left(\frac{3}{8} \frac{1}{g_o} + \frac{1}{g_1}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{8} + \frac{g_o}{g_1}} \;)$$

$$\alpha_{22} = \frac{\frac{1}{18} \tilde{D} g_o + \frac{1}{4} g'_{x,o} \cdot \left(\frac{g_o}{g_1} - 1\right)}{\left(\frac{3}{8} + \frac{g_o}{g_1}\right)^3} = \frac{S}{T^3}$$

$$\alpha_{23} = 2\frac{S^2}{T^5}\ ;\ \alpha_{24} = 5\frac{S^3}{T^7}\ ;\ \alpha_{25} = 14\frac{S^4}{T^9}\ ; \dots$$

Itt most már ugyanazokat az átalakitásokat végezhetjük el, mint a fentiekben, és itt is a (47) alatti képlethez jutunk el.

Az előzőekben megadott formulák pontosabb hibabecslésére egy későbbi munkában visszatérünk. Az alábbiakban csak nagyságrendi becslést adunk és ennek alapján a gyakorlati hibabecslés módját ismertetjük. Tegyük fel először, hogy a (39) - (44) alatti formulákat nem szinguláris hely környezetében alkalmazzuk. Ekkor h és k azonos nagyságrendüek, azaz $k = O(h)$ és $h = O(k)$ is érvényes. Ilyen feltételek esetén az inverziós formulák alapján adódó teljes végtelen sorokat figyelembevéve k resp. k hibája $O(h^5)$ resp. $O(h^6)$ nagyságrendü. Ha tehát az inverziós formulákat ugy csonkitjuk, hogy az ötödfokunál magasabb fokszámu tagokat nem vesszük figyelembe, ezzel k ill. k egyes összetevőiben, és igy magában $\hat{k}$-ban ill. k-ban is $O(h^5)$ ill. $O(k^6)$ nagyságu hibát hozunk létre és ez k és h azonos nagyságrendje miatt $O(h^6)$-nal is mérhető - azaz a csonkitás az eljáráshibával azonos nagyságrendü hibát hoz csak létre. Áttérve mármost arra az alakra, amelyben $\frac{1}{g}$ hatványait kiküszöböltük, itt $(h - \alpha_{i,1} g_{j(i)}\, {}^{\circ}k_i - \alpha_{i,2}\, {}^{\circ}k_i^2) = O({}^{\circ}k_i^3)$ érvényes, ezt továbbá a $k = O(h)$ és $h = O(k)$ relációt is figyelembevéve, $T = \frac{1}{{}^{\circ}k_i^2} \cdot (h - \alpha_{i,1} g_{j(i)}\, {}^{\circ}k_i - \alpha_{i,2}\, {}^{\circ}k_i^2) = O(h) = O({}^{\circ}k_i)$ érvényes. Ezért a k_i - k és ezeken keresztül a k ill. $\hat{k}$

értékek megállapitásában is biztositandó az $\mathcal{O}(h^6)$ hibakorlát, ezt a sort $\tau^3 \cdot k_i^2$ -en, azaz τ harmadik hatványán tul kell csonkitanunk. Ehhez azonban az invertált sorban még a hatodik hatvány együtthatóját is figyelembe kell vennünk - ahogy ezt az (50) alatti formulából láthatjuk.

Áttérünk most a szinguláris pontok környezetére. Ha a (t_o,x_o) pont szinguláris, azaz $g(t_o,x_o) = 0$, de $\mu_{0,2} \neq 0$ (azaz $\tilde{D}g_o \neq 0$), akkor - amint azt (48)-ból leolvashatjuk - $k = \mathcal{O}(\sqrt{h})$ ill. $h = \mathcal{O}(k^2)$ érvényes. (Ha a tekintett hely közel szinguláris, akkor $k = \mathcal{O}(h)$ és $k = \mathcal{O}(\sqrt{h})$ közötti nagyságrendről van szó.)

Mindenesetre ekkor egyrészt az (50) alatti formulákban h ill. $\hat{h}$ hibája $\mathcal{O}(k^6)$ nagyságrendü, azaz $\mathcal{O}(h^3)$ hibával számolhatunk. Ugyanakkor

$$h - \alpha_{i,1}\, g_{j(i)}{}^{o}k_i - \alpha_{i,2}{}^{o}k_i^{2} = \mathcal{O}(k^3) = \mathcal{O}(h^{3/2})$$

is érvényes.

Ha tehát a τ harmadik hatványa után csonkitjuk a sort, a k_i-k és igy k ill. $\hat{k}$ csonkitás következtében fellépő hibája $\mathcal{O}(h^3)$ nagyságu, ugyanakkora, mint az eljáráshiba. Ezért k és $\hat{k}$ különbségét most is jellemzőnek tarthatjuk $\hat{k}$ hibájára. Mindössze, annyi az eltérés, hogy h felezése esetén a hiba általában nem $\frac{1}{64}$ -részére csökken, hanem kisebb arányban, esetleg csak $\frac{1}{8}$ -ára. (A fenti nagyságrendi becslések természetesen csak akkor érvényesek, ha

$$h-\frac{1}{2}\frac{\alpha_{i,3}}{\alpha_{i,1}\alpha_{i,4}}\left(\frac{h-\alpha_{i,2}\,{}^{\circ}k_i^{2}}{{}^{\circ}k_i}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\alpha_{i,1}\,\alpha_{i,3}}{\alpha_{i,4}}\,g_{j(i)}^{2}-\alpha_{i,1}$$

$$g_{j(i)}\,{}^{\circ}k_i-\frac{\alpha_{i,2}\,\alpha_{i,4}-\alpha_{i,3}^{2}}{\alpha_{i,4}}\,{}^{\circ}k_i^{2}$$

hatszor folytonosan differenciálható függvénye marad a τ argumentumnak a $g \longrightarrow 0$, és $\alpha_{i,2} \rightarrow \alpha \neq 0$ feltétel mellett. Ennek igazolására a pontosabb hibabecslés kapcsán egy későbbi dolgozatban visszatérünk.)

(52) alatti formuláink szinguláris hely környezetébeni alkalmazhatóságát egyébként az 5. táblázat érzékelteti.

Arra a kérdésre kell még választ adni, hogy a direkt (31) - (36) alatti formulák helyett mikor célszerü áttérni az indirekt (51) - (52) alatti formulákra (utóbbinál egyrészt sokkal bonyolultabb az együtthatók számitása, másrészt a $k_i - k$ meghatározásához egy-egy bonyolult egyenletet kell megoldani). A 4 és 5 táblázatokból kiolvasható, hogy mennél nagyobb f értéke, annál inkább előnyös a (31) - (36) alatti formulák használata a Runge-Kutta-tipusuakkal összehasonlitva. Az indirekt (51) - (52) alatti formulákra viszont (figyelembevéve az ezekkel kapcsolatban jelentkező nagymértékü számitástechnikai nehézségeket) a tapasztalat szerint csak akkor érdekes áttérni, ha h nagyságrendje megközeliti az egy integrációs részintervallumra engedélyezhető hibakorlátot.

5. § Operátoregyenletek megoldása szakaszonkénti perbutációval.

Legyen f olyan Fréchet-értelemben folytonosan differenciálható függvény, amely az E lineáris normált teret az E_1 lineáris normált térbe képezi le, és tekintsük az

$$f(x) = 0$$

egyenletet, ahol $x \in E$ a keresett megoldás, 0 pedig az E_1 tér zéruseleme. Legyen továbbá $g(x)$ egy másik, ugyancsak folytonosan differenciálható, E-t E_1-be leképező függvény, amelynek ismerjük egy $x_0 \in E$ "zérushelyét", azaz amelyre

$$g(x_0) = 0$$

teljesül (és amely lehetőleg "nem nagyon tér el" f-től).

Tekintsük most a válós (vagy komplex) t paramétertől függő

$$h(x,t) = g(x) + t\left[f(x) - g(x)\right]$$

függvényt, amely E_1 linearitása miatt ugyancsak E-t E_1-be képezi le. h-nak a $t = 0$ paraméterértékhez tartozó "metszetének", $g(x)$-nek ekkor ismerjük egy "zérushelyét", ti. az x_0 E elemet. A keresett megoldás pedig éppen a $t = 1$ paraméterértékhez tartozó "metszet" zérushelye.

Amennyiben mármost a $h(x,o)$ metszet Fréchet-differenciálhányadosa (amely feltevéseink szerint létezik és folytonos x-ben) nem egyenlő Θ-val, az x_0 helyen (Θ itt az $(E \rightarrow E_1)$ lineáris normált tér zéruseleme), akkor létezik a $t = 0$ hely környezetében egy folytonos és folytonosan differenciálható $x(t)$ függvény, amely kielégiti a $h(x(t),t) \equiv 0$ azonosságot, továbbá az

$$\dot{x}(t) = [g' + t(f' - g')]^{-1}(f(x) - g(x)) = \Psi(x,t)$$

differenciálegyenletet. A megoldás megkereséséhez tehát ezt a differenciálegyenletet kell integrálnunk az $x(o) = x_0$ kezdeti feltétellel $t = 1$-ig. Tegyük fel a továbbiakban, hogy a $\Psi(x,t)$ függvény, amely tehát az $E \times K$ teret (K a komplex számok testét jelöli) képezi le E-be, elég sokszor folytonosan differenciálható függvénye a tekintett tartományban mindkét argumentumának. A közvetett függvények jólismert differenciálási szabálya alapján ekkor azonnal beláthatóan $x(t)$ is elég sokszor folytonosan differenciálható és deriváltjai az alábbi alakban állithatók elő ([1] pl. ill. [6]):

$$\frac{d}{dt}\dot{x}(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\dot{x}(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\cdot\Psi(x,t) \tag{54}$$

ahol $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ és $\Psi(x,t) \in E$, továbbá $\frac{\partial \Psi}{\partial x} \in (E \to E)$.

Formálisan tehát a D operátort a $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\cdot\Psi\right)$ formulával értelmezve, és $D\Psi$-n az (54) alatti, ill. általában $D\varphi$-n a

$$D\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Psi \tag{55}$$

kifejezést értve (ahol φ is E x K-t képezi le folytonosan differenciálhatóan E-be), mindenesetre

$$\ddot{x}(t) = D\psi \text{ ill. általában } \dot{\varphi}(t) = D\varphi(t) \tag{56}$$

érvényes.

A D^n operátort most is teljes indukcióval értelmezzük, a

$$D^{n+1} = D^n \frac{\partial}{\partial t} + D^n \frac{\partial}{\partial x} \cdot \psi \tag{53}$$

formula alapján. Ilymódon a 2.§.-ban már megismert módszerek alapján, teljes indukcióval azonnal belátható, hogy az ott szereplő valamennyi D-re vonatkozó reláció - a tényezők sorrendjének értelemszerü figyelembevételével ill. betartásával - most is érvényes marad. Ezért - betartva a most lényeges tényező-sorrendet - formálisan Δx most is ugyanugy állitható elő Δt polinomjaként, mint a skaláris esetben. Hasonlókép - felhasználva ismét a közvetett függvények differenciálási szabályait

$$\psi(t_s + \Delta t;\, x_0 + \Delta t\,\psi + Ⓦ) \text{ ill. } D\psi(t_0 + h;\, x_0 + h\psi + Ⓗ)$$

stb. is ugyanolyan alaku Δ-t-polinommal irható fel, mint skalárváltozók esetén. Következéskép a klasszikus Runge-Kutta formula is, az általunk megadott módositott formulák is használhatóak ebben az esetben is. Példaként egyrészt a mátrixok sajátérték-problémájának a fenti módon történő megoldását, másrészt egy peremértékfeladat megoldását, végül egy optimális vezérlési feladat közelitő megoldását mutatjuk be a következő - záró - paragrafusokban.

Befejezésül még azt a kérdést érintjük, hogy a szinguláris pontok környezetében hogyan használhatjuk a 3. §-ban ismertetett formulákat. A közvetlen használat már csak azért sem jöhet szóba, mert Ψ -nek általában nem létezik a reciproka. Ezért a problémát ugy kerüljük meg, hogy bevezetünk egy segédváltozót, amely mintegy "felveszi" a szingularitást, éspedig az

$$x = \Psi(x,t)$$

differenciálegyenlettel kapcsolatban például a

$$\frac{d\sigma}{dt} = \|\Psi\| = \vartheta(x,\sigma,t)$$

differenciálegyenlet révén. Az eredeti egyenletet viszont a

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{1}{\|\Psi\|}\cdot\Psi$$

alakba irjuk. Ekkor ϑ reciproka létezik, és igy a Δ t-hez tartozó $\Delta\sigma$ -t a (51)-ben megadott módon számithatjuk, mig a $\Delta\sigma$-hoz tartozó Δ x-et a (31) formula alapján a szokásos módon, minthogy itt a jobboldal normája biztosan korlátos marad a tekintett pont környezetében.

Az igy alkalmazott különböző tipusu Runge-Kutta formulák pontos hibabecslésére a hibabecsléssel foglalkozó későbbi munkánkban visszatérünk. Mindenesetre elég sokszor folytonosan differenciálható Ψ függvény esetén itt is igaz az, hogy az egy lépésre vonatkozó hiba. reguláris pont környezetében h eggyel magasabb hatványával arányos, mint az alkalmazott formula fokszáma. A különböző tipusok (különböző fokszámok vagy lépésközfelezések) során adódó közelitések távolságát az E-tér metrikájában kell mérnünk, és ilyen feltételek mellett az éppugy jellemzi a közelitő és a pontos növekmény ugyanezen metrikában mért eltérését, mint skalár változók esetén.

6.§. Három példa.

Tekintsük először az alábbi általánositott sajátértékfeladatot:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} y - \lambda \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} y = \underline{0},$$

amelynek egyik sajátvektora közelitően az

$$y = \begin{pmatrix} 0,3 \\ -0,9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektor, a hozzátartozó sajátérték pedig közelitően a $\lambda = 2$ érték. Mindenekelőtt ugy alakitjuk át az eredeti sajátértékproblémát, hogy az egy alkalmas normált téren értelmezett függvény zérushelye megkeresésévé váljék. E célból a sajátértékproblémát kiegészitjük egy normálási feltétellel, amit a $G(\tilde{y}) - 1 = 0$ alakba irunk; ugyanakkor az ismeretlen vektort egy negyedik dimenzióval is kiegészitjük és negyedik rendezőként épp a sajátértéket választjuk; az $\binom{y}{\lambda}$ vektort $\underline{u}$ -val jelöljük. A megoldandó egyenlet igy

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}) = \underline{\Theta}$$

alakba irható, ahol a $\underline{\underline{T}}$ operátor jelentése:

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \lambda \underline{\underline{B}}\,\underline{y} \\ G\underline{y} - 1 \end{pmatrix}$$

Az $\binom{y}{\lambda}$ vektort pl. az $\left\| \binom{y}{\lambda} \right\| = \max(\|\underline{y}\|, |\lambda|)$ módon értelmezhetjük, a vektorok ill. mátrixok normáját pedig pl. legnagyobb abszolut értékü elemükkel, ill. abszolut sorösszegükkel mérhetjük. A G normáló operátor lehet pl. /ez a legegyszerübb/ valamelyik rendezőt /pl. a harmadik rendezőt/ kiválasztó operátor.

Ekkor első feladatunk egy olyan $\underline{\underline{W}}$ operátor kiválasztása, amely $\underline{\underline{T}}$-hez lehetőleg közel áll, és amelynek a megadott $\binom{\tilde{y}}{\lambda}$ elem valóban zérushelye.

Ilyent egyszerü számolással, pl.: a

$$\underline{\underline{W}}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}\,y - \lambda \underline{\underline{B}}_1\,\underline{y} \\ G\underline{y} - 1 \end{pmatrix}$$

alakban felirhatunk, ahol $\underline{\underline{B}}_1$ csak az utolsó oszlop vektorában különbözik $\underline{\underline{B}}$-től. Egyszerü számolás mutatja, hogy

$$\underline{\underline{B}}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -0{,}15 \\ 5 & 2 & -0{,}65 \\ -3 & 3 & 3{,}8 \end{pmatrix}$$

megfelel.

Eszerint perturbált egyenletünk

$$\underline{\underline{W}}(\underline{u}) + t \quad \underline{\underline{T}}(\underline{u}) - \underline{\underline{W}}(\underline{u}) \quad = \underline{0}$$

ahol

$$\underline{\underline{H}}(\underline{u}) = \underline{\underline{T}}(\underline{u}) - \underline{\underline{W}}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}}\,\underline{y} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & -0{,}35 \\ 0 & 0 & +0{,}2 \end{pmatrix} \underline{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

alaku.

Mármost a $\underline{\underline{W}}(\underline{u})$ ill. $\underline{\underline{H}}(\underline{u})$ Frechet-deriváltja /l. pl.[ ]/ - az $\begin{pmatrix} \underline{y} \\ \lambda \end{pmatrix}$ helyen a

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{B}}_1 & -\underline{\underline{B}}_1 \underline{y} \\ \underline{e}_3^* & 0 \end{pmatrix} \text{ ill. a } \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} - \lambda(\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}_1) - y(\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}_1) \\ \underline{0}^* \quad\quad 0 \end{pmatrix}$$

mátrix, ahol $\underline{e}_3^*$ a harmadik egységvektor. Részletesen tehát

$$\underline{u} = \frac{du}{dt} = -\left[\underline{\underline{W}}' + t\,\underline{\underline{H}}'\right]^{-1} \underline{\underline{H}}(\underline{u}) =$$

$$= -\begin{bmatrix} 2+2\lambda & 1-\lambda & -3+0{,}15\lambda-0{,}15\lambda t & 2y_1-y_2+0{,}15y_3^3-0{,}15ty_3 \\ -1-5\lambda & 4-2\lambda & 2+0{,}65\lambda-0{,}35t\lambda & -5y_1-2y_2+0{,}65y_3+0{,}35ty_3 \\ -2+3\lambda & -3\lambda & 1+3{,}8\lambda-0{,}2\lambda t & 3y_1-3y_2-3{,}8y_3-0{,}2ty_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezt a differenciálegyenletet kell a $t=0$-hoz tartozó

$$\underline{u}(o) = \begin{pmatrix} 0,3 \\ -0,9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ kezdeti feltétellel $t = 1$-ig integrálni.

Az integrálásnál a Runge-Kutta módszert választva és egy lépéssel áthidalva a 0,1 intervallumot, $\underline{k}_1$-re, $\underline{k}_2$-re, $\underline{k}_3$-ra, $\underline{k}_4$-re, végül $\underline{k}$-ra ill. $\underline{u}(1)$-re az alábbi értékek adódnak:

$$\underline{k}_1 = \begin{pmatrix} 0,059363954\ldots \\ -0,02544172\ldots \\ 0 \\ -0,049469964\ldots \end{pmatrix}; \quad \underline{k}_2 = \begin{pmatrix} 0,059046770\ldots \\ -0,02612260\ldots \\ 0 \\ -0,04890232\ldots \end{pmatrix};$$

$$\underline{k}_3 = \begin{pmatrix} 0,059042886\ldots \\ -0,02612743\ldots \\ 0 \\ -0,04888950\ldots \end{pmatrix}; \quad \underline{k}_4 = \begin{pmatrix} 0,058720235\ldots \\ -0,02681792\ldots \\ 0 \\ -0,04830276\ldots \end{pmatrix};$$

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} 0,059043917\ldots \\ -0,02612661\ldots \\ 0 \\ -0,04889272\ldots \end{pmatrix}; \quad \underline{u}(1) = \begin{pmatrix} 0,359043917\ldots \\ -0,92612661\ldots \\ 1 \\ 1,95110728\ldots \end{pmatrix}$$

A sajátérték, ill. a megfelelően normált sajátvektor pontos értéke:

$$\lambda = 1{,}9513668\ldots \quad \text{ill.} \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 0{,}3589609\ldots \\ -0{,}9261842\ldots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Második példaként tekintsük az

$$u'' + \frac{u^2}{\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}} = x - 1 ; \quad u(0) = u(1) = 0$$

peremértékfeladatot. Ennek egy "közelitő" megoldása az $u = 0$ függvény, amely pl. az

$$u'' = 0$$

"differenciálegyenletet" elégiti ki. A Banach-tér, amelyet tekintünk, legyen a $[0,1]$ intervallumon kétszer folytonosan differenciálható és a $v(0) = v(1) = 0$ mellékfeltételt kielégitő függvények B tere, és legyen pl.

$$\|u\| = \int_0^0 (u''^2 + u^2)\, dx$$

Igy a perturbált probléma

$$F[u(x;t),t] = u'' + t\left[u'' + \frac{u^2}{\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}} - x + 1 - u''\right] = 0 .$$

A hozzárendelt differenciálegyenlet tehát

$$\dot{u}(x;t) = -F_u^{\prime -1}(F_t^{\prime})$$

alaku. Itt

$$F_t^{\prime} = \frac{u^2}{\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}} - x + 1$$

és

$$F_u^{\prime} v = \frac{\partial F}{\partial u''} v'' + \frac{\partial F}{\partial u'} v' + \frac{\partial F}{\partial u} v = v' + 2t \frac{u}{\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}} v$$

Ha tehát

$$-F_u^{\prime -1}(F_t^{\prime}) = \omega,$$

akkor ez azt jelenti, hogy egyrészt $\omega \in B$, másrészt ω kielégiti a

$$w'' + 2t \frac{u}{\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}} \omega = -\frac{u^2}{\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}} + x - 1$$

lineáris differenciálegyenletet.

Minthogy ennek - a peremfeltételeket is kielégitő - megoldása elég sok számitással jár, megelégszünk azzal, hogy egy lépésben hidaljuk át a $0 = t = 1$ intervallumot, sőt itt is az Euler-Canchy formulát /másodrendü Runge-Kutta formula/ használjuk. Igy

$k_1 = 1 \cdot \omega_1;\ t_1 = 0;\ u_1 \equiv 0$, azaz

$$\omega_1' = x-1,$$

tehát $\omega_1 \in B = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$.

Ennek alapján $k_2 = 1\ \omega_2;\ t_2 = \frac{1}{2};\ u_2 = \frac{1}{2}\omega_1 = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{6}$

azaz

$$\omega_2'' + \frac{1}{2}\omega_2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) + x - 1 = -\frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} + \frac{11x}{12} - 1$$

és igy

$$\omega_2 = C_1 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\ x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{17}{6}x - 3,$$

azaz $\omega_2 \in B$ miatt

$$u(x) \simeq \omega_2 = 3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x - \left(\frac{1}{3\sin\frac{\sqrt{2}}{2}} + 3\operatorname{cotg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x -$$

$$-\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{17}{6}x - 3$$

ω_2 pontosságára $\|\omega_2 - \omega_1\|$ alapján következtethetünk.

Harmadikként tekintsük az optimális vezérlési problémákat. Az ilyen tipusu feladatok általános sémája: Legyenek E_1, E_2, E_3, E_4 lineáris szupermetrikus terek, $F(u_1,u_2)$ legyen értelmezve az $E_1 \times E_2$ téren és azt képezze le E_3-ba, $G(u_1,u_2)$ pedig a valós számok V terébe, végül $H(u_3, u_4)$ legyen egy bilineáris funkcionál az $E_3 \times E_4$ téren. Ekkor - amint azt könnyen be lehet látni - a

$$G(u_1, u_2) = \text{extr.}, \quad F(u_1, u_2) = 0$$

feltételes szélsőértékproblémának az $u_{1,o}$, $u_{2,o}$ helyen lokális szélsőértéke van, ha e pontban és annak környezetében F és G differenciálhatók és található olyan

$$u \in E_4 \neq 0, \text{ hogy}$$

$$\text{grad}\left[G + H(F, u_4)\right] = 0$$

teljesül (u_4 itt a Lagrange-féle multiplikátor általánositása). Ha tehát valamilyen G_1, F_1 függvénypár mellett meg tudjuk oldani az extrémumfeladatot, és G_1 nem nagyon "tér el" G-től, F_1 pedig F-től és ismeretes az ezen megoldáshoz tartozó $u^{*}_{4,o}$ érték is, akkor

a $\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_4(t) \end{pmatrix}$ függvényt ugy kell megállapitani,

hogy $\underline{v}(o)$ az ismert extremum-megoldás legyen, és $\underline{v}(t)$ kielégitse a

$$\text{grad}\left[G_1(u_1(t), u_2(t)) + t\{G(u_1(t)\ u_2(t)) - G_1(u_1(t), u_3(t))\} + \right.$$
$$\left. + H\left(F_1(u_1(t), u_2(t)) + t\{F(u_1(t), u_2(t)) - F_1(u_1(t), u_2(t))\} u_4(t)\right)\right] \equiv 0$$

azaz a

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{grad}\left[G_1 + t(G - G_1) + H(F_1 + t(F - F_1), u_4)\right] = 0$$

differenciálegyenletet.

Ez utóbbi megoldása a már bemutatott módon megy.

Befejezésül megemlitjük azt is, hogy az itt bemutatott ötletek, amelyeket a Runge-Kutta módszer javitására használtunk fel, az f'_x ill. Df értékek szerepeltetése nélkül is alkalmazhatóak. Igy pl. hárompontos, ötödrendü Runge-Kutta formulát lehet ugy konstruálni, hogy a megelőző lépés növekményeit még a következő lépésben is felhasználjuk. Hasonlóképp h-ban másodfoku növekményeket lehet ugy konstruálni, hogy a hf_i alaku tagok mellett $h^2(f_j-f_i)$ alaku tagokat is szerepeltetünk, stb. Ezekre szintén visszatérünk egy további cikkben! x/

Irodalom:

[1] Collatz, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer, 1964.

[2] Rényi A.: A Newton féle gyökközelitő eljárásról. Mat. Lapok, 1. 1949/50.

[3] Kizner, W.: A Numerical Method for Finding Solutions of non-linear Equations. J. Soc. Indust. Appl. Math. V. 12. N°2.

x/ Az 1.2.3.4.5 táblázatokat a következő közlemények függelékeként közöljük, minthogy e szám nyomdába adásakor még nem voltak teljesek.

[4] Huta, A.: Une amélioration de la méthode de Runge-Kutta-Nyström... Acta Fac. Rev. Nat. Univ. Comen, 1956.

[5] Frey, T.: On the Runge-Kutta-Nyström Method I. Periodica Polytechnika, 1958.

[6] Ljusternik, L.A.-Sobolew, W.I.: Elemente der Funktionalanalysis, Berlin, 1955.

[7] Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1922.

Zusammenfassung

Eine allgemeine Methode für Lösung von Gleichungen in allgemeinen Räumen wird hier angegeben, welche mit Hilfe eines Hilfsparameters die Grundgedanke des Newton-Raphsonschen Verfahrens verallgemeinert und dementsprechend die Runge-Kutta Methode erweitert.