Optimális perem-vezérlőfüggvény Fourier-sora hiperbolikus differenciaegyenlet esetén

Szelezsán János

Vegyünk olyan folyamatokat, amelyeknek viselkedését a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L(u)$$

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(X)\, u \qquad 1./$$

differenciálegyenlet írja le, ahol

$$X = (x_1, \dots, x_n)$$

és az $a_{ij}(X)$, valamint $a(X)$ együtthatók valamilyen Ω tartományban kielégitik az

$$a(X) \geq 0 \quad , \quad a_{ij} = a_{ji}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \qquad \alpha > 0$$

feltételeket. /Az utóbbi egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a differenciálegyenlet hiperbolikus/.

Tartozzék a feladathoz az alábbi vegyes peremfeltétel:

a $Q_T = \Omega \times (0 < t < T)$ hengeren a megoldás elégitse ki az

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(X) \, ; \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad 2./$$

kezdeti feltételt és az

$$u\Big|_S = 0 \;, \quad t \in [0,T] \qquad 3./$$

feltételt, ahol S az Ω tartomány határa.

Legyen $q(X)$ egy adott függvény.

Tekintsük a

$$J(\varphi(X)) = \int_{\Omega} [q(X) - u(X,t_0)]^2 \, d\Omega =$$

funkcionált, ahol $d\Omega = dx_1,\dots,dx_n$.

<u>Feladat:</u>

Meghatározandó az a $\varphi(X) \in L_2$ perem feltétel, melyre a $J(\varphi(X))$ funkcionál minimumot vesz fel.

<u>Tétel:</u>

Legyenek λ_k, $v_k(X)$ $(k=1,2,\dots,n,\dots)$ az

$$L(v) + \lambda v = 0$$

egyenlet sajátértékei ill. saját vektorai.

Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2}{\cos^2 \sqrt{\lambda_k}\, t_0} < \infty$ ahol $\gamma_k = \int_{\Omega} q(X) v_k(X) \, d\Omega$

Akkor a feladat megoldása:

$$\varphi(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\cos^2 \sqrt{\lambda_k}\, t_0} v_k(X)$$

Bizonyitás:

Ismeretes, [1] hogy az 1/ differenciálegyenlet megoldása a 2/, 3/ feltételek mellett:

$$u(X,t)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\sqrt{\lambda_k}\, t_0)\, v_k(X)$$

alakban állitható elő, ahol

$$A_k=\int_{\Omega}\varphi(X)\, v_k(X)\, d\Omega$$

és a $v_k(X)$ függvények az $L(u)$ operátor ortonormált sajátfüggvényei, azaz az

$$L(v)+\lambda v=0$$

egyenlet megoldásai a $v|_S=0$ feltétel mellett, a $\lambda_k>0$ számok pedig a megfelelő sajátértékek.

Jelöljük H_1-el a H Hilbert térnek a $v_1(X),\dots,v_n(X)$ elemek által generált $H_1=L(v_1,v_2,\dots,v_n,\dots)$ alterét. A H_1 altér elemei tehát

$$h(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\, v_i(X)$$

alakuak, ahol az $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\dots$ tetszőleges végtelen számsorozat.

E jelöléssel azt mondhatjuk, hogy $u(x,t_0)\in H_1$.
Legyen H_1^* a H_1 altér ortogonális komplementere.

Tétel: (l. II. 83. old.)

Legyen H_1 a H Hilbert tér altere H_1^* pedig H_1 ortogonális komplementere. A H Hilbert tér tetszőleges $x \in H$ elemét egyértelmüen elő lehet állitani:

$$x = x' + x''$$

alakban ($x' \in H_1$, $x'' \in H_1^*$). Az x' elem az x elemnek a H_1 altértől való távolságát realizálja, azaz

$$\| x - x' \| = \rho (x_1 H_1)$$

/Az x', x'' elemeket az x elem H ill. H_1^* altérre vonatkozó vetületeinek nevezzük./

A tétel értelmében, $q(X)$ felbontható két vetületének összegére azaz:

$$q(X) = q_1(X) + q_2(X)$$

ahol $q_1(X) \in H_1$, azaz $q_1(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \, v_n(X)$

ahol $\gamma_n = [\, q(X), v_n(X)]$ (Itt $[x, y]$ a skalár szorzatot jelöli.)

A $q_2(X)$ vetületre viszont: $q_2(X) \in H_1^*$

A két vetület közül $q_1(X)$ realizálja H_1 altér távolságát $q(X)$-től, azaz

$$\| q(X) - q_1(X) \| = \rho (q(X), H)$$

és ez a távolság éppen $\| q_2 \|$ -val egyenlő.

Viszont $\varrho(q(X), H_1) = \min \int_{\Omega} [u(X, t_0) - q(X)]^2 d\Omega$

Ebből azonban következik, hogy mivel $q_1(X) \in H_1$, és $u(X, t_0) \in H_1$ ezért

$$q_1(X) = u(X, t_0)$$

azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n v_n(X) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t_0 v_n(X)$$

vagyis

$$A_n = \frac{\gamma_n}{\cos\sqrt{\lambda_n}\, t_0} = \frac{[q(X), v_n(X)]}{\cos\sqrt{\lambda_n}\, t_0}$$

Annak viszont, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\cos\sqrt{\lambda_n}\, t_0} v_n(X)$$

sor konvergens legyen, szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2}{\cos^2\sqrt{\lambda_n}\, t_0} < \infty$$

legyen.

A feladat megoldásának

$$\varphi(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\cos\sqrt{\lambda_n}\,t_0} v_n(X)$$

alakja lehetőséget ad $\varphi(X)$ közelitő meghatározására. Ha valamilyen módon ugyanis kiszámitottuk a λ_n sajátértékeket és a $v_n(X)$ sajátfüggvényeket, akkor a $\varphi(X)$ megoldás közelitéseként vehető a végtelen sor egy

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\gamma_n}{\cos\sqrt{\lambda_n}\,t_0} v_n(X)$$

szelete.

Egy példa:

Tekintsük a szabadon rezgő hur egyenletét:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

az

$$u|_{x=0} = 0 \quad ; \quad u|_{x=l} = 0$$

perem ill. kezdőfeltétellel.

Legyen a cél

$$\int_0^l [\varphi(x) - u(x,t_0)]^2 dx$$

minimalizálása.

A differenciálegyenlet megoldása a fenti feltételekkel:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$$

ezért az előbbi tétel alapján

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\cos \frac{k\pi a t_0}{l}} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$$

ahol

$$\gamma_k = \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx$$

Ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2}{\cos^2 \frac{k\pi a t_0}{l}} < \infty$$

akkor az igy kapott $\varphi(x)$ megoldása a feladatnak.

Irodalom:

[1] M.M. Szmirnov: Differencialnie uravnenija v czasztnik proizvodnik vtorovo porjadka /Moszkva, 1964/

[2] L.V.Kantorovics, G.P. Akilov: Funkcionalnij analiz v normirovannih prosztransztvah /Moszkva, 1959/.

Summary

Optimal boundary control funkction with Fourier series in case of hyperbolic differential equations.

Let us take such processes whose behaviour is described by the differential equation.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L(u)$$

where

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(X)\,u$$

$$X = (x_1, \ldots, x_n)$$

and the $a_{ij}(X)$ as well as $a(X)$ coefficients are fulfilling the following conditions.

$$a(X) \geq 0; \quad a_{ij} = a_{ji}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \qquad \alpha > 0$$

Let us take the following boundary couditions

$$u\big|_{t=0} = \varphi(X) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

$$u\big|_S = 0 \qquad ; \quad t \in [0,T]$$

where S is the boundary of the domain Ω.

Let $q(X)$ be a given function.

Let us consider the functional

$$J(\varphi(X)) = \int_{\Omega} [q(x) - u(X,t_0)]^2 d\Omega$$

where $d\Omega = dx_1, dx_2 \cdots dx_n$

Problem

The $\varphi(X) \in L_2$ boundary condition is to be determined, for wich the functional takes up the minimum.

We have obtained the following:

Let λ_k, $v_k(X)$ be the eigeuvalues and eigenvectors of the equation.

$$L(v) + \lambda v = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$$

Let us suppose that $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2}{\cos^2 \sqrt{\lambda_k} t_0} < \infty$ where

$$\gamma_k = \int_{\Omega} q(x) v_k(x) d\Omega$$

Then the solution of the problem is:

$$\varphi(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\cos^2 \sqrt{\lambda_k} t_0} v_k(X)$$