Matematikai Közlemények
XI. kötet, 2023

doi:10.20312/dim.2023.01

A Boerdijk-Coxeter tetrahélixről és általánosításairól

Talata István
BGE Külkereskedelmi Kar, Budapest,
Óbudai Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest
talata.istvan@uni-bge.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A Boerdijk-Coxeter tetrahélix szabályos tetraédereknek egy olyan, mindkét irányban végtelen sorozata, amelyben a tetraéderek pakolást alkotnak, a szomszédos tetraédereknek közös lapjuk van, és a pontosan egyetlen tetraéderhez tartozó élek három olyan, egyetlen hengerfelületen elhelyezkedő csavarvonalba beírt térbeli sokszögvonalat határoznak meg, amely csavarvonalak egymás elforgatottjai. Ezt a konstrukciót kétféleképpen általánosítjuk: szabályos tetraéder helyett más poliédert is megengedve, az egymást követő elemekre adott illeszkedési szabállyal; valamint közel szabályos tetraéderek záródó láncaira.

ABSTRACT. The Boerdijk-Coxeter tetrahelix is a sequence of regulars tetrahedra that is infinite in both directions, it forms a packing, any two consecutive tetrahedra shares a common face, and the edges which correspond to exactly one tetrahedron form three spatial polygons inscribed into helices which are rotated copies of each other and they lie on a cylinder. This construction is generalized in two ways: instead of a regular tetrahedron, other polyhedron may be used, with some adjacency rule for consecutive elements; and for almost regular tetrahedra, forming a finite closed chain.

1. Bevezetés

A Boerdijk-Coxeter tetrahélix (ld. [1], [2], [4], [5]) szabályos tetraédereknek egy olyan, mindkét irányban végtelen sorozata, amely

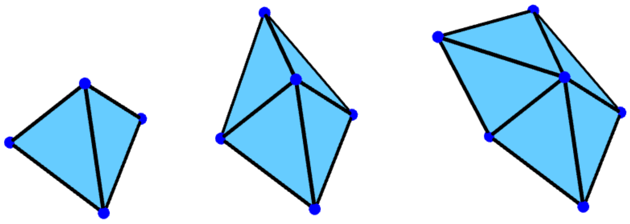
- a 3-dimenziós euklideszi térben egy pakolást alkot,
- bármely két, egymást követő elemének metszete egy közös lapjuk,
- bármely három, egymást követő elemének metszete egy közös élük,
- bármely négy, egymást követő elemének metszete egy közös csúcsuk,
- bármely öt, egymást követő elemének metszete üres halmaz.

A következőkben röviden csak tetrahélixnek hívjuk majd ezt a tetraéder-sorozatot, illetve ezt olykor azonosítjuk az uniójával, amely egy végtelen sok csúcsot, élt, és lapot tartalmazó, nemkonvex poliéder. A tetrahélix csúcsait és éleit a tetrahélixet alkotó tetraéder-sorozat csúcsai, ill. élei alkotják.

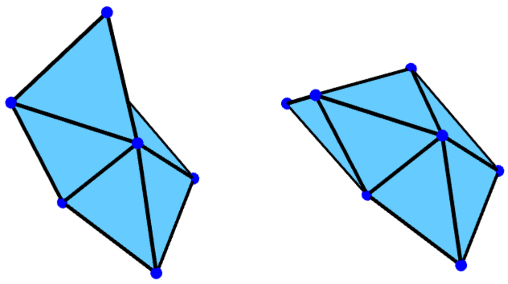
KULCSSZAVAK. tetrahélix, pakolás, szabályos tetraéder, majdnem szabályos tetraéder, csavarvonal, 4-dimenziós szabályos politóp.

KEYWORDS. tetrahelix, packing, regular tetrahedron, almost regular tetrahedron, helix, 4-dimensional regular polytope.

Ha elkezdünk felépíteni egy tetrahélixet, akkor három, közös éllel rendelkező tetraéder egymás utáni kiválasztása után (ld. 1. ábra), a sorozat negyedik elemére két lehetőségünk van (ld. 2. ábra). A negyedik tetraéder kiválasztása után az egész tetraéder-sorozat már egyértelműen folytatható mindkét irányban. A negyedik tetraéder választásától függően két, egymással egybevágó tetraéder-pakolás adódik, amelyek egymásnak egy síkra vonatkozó tükörképei, de emiatt egymásba mozgathatóság erejéig két különböző tetrahélixről beszélhetünk.



1. ábra. A tetrahélix legfeljebb három, egymást követő eleme alkotta konfigurációk



2. ábra. A tetrahélix négy, egymást követő elemére adható két lehetséges konfiguráció

Mivel a tetrahélix definíciójában nincs kitüntetett szerepe egyetlen tetraéderének sem, ezért bármely eleméből kiindulva ugyanaz a tetrahélix adódik. Így bármely két elemére kell, hogy legyen olyan mozgása a térnek, amely az egyik elemet a másikba viszi, miközben a tetrahélixet önmagába viszi. Vegyünk egy ilyen mozgást, például a tetrahélix két egymást követő elemére. Ismert, hogy minden mozgás, így ez is előáll csavarmozgásként (azaz egy tengely körüli forgatás, és a tengellyel párhuzamos irányú eltolás egymás utáni alkalmazásaként), ld. [3].

Ezért a csavarmozgás tengelyét választhatjuk egy olyan hengerfelület tengelyének, amelyen rajta fekszik a tetrahélix elemeinek összes csúcsa. Általában egy poliéder csúcsai nem egyetlen hengerfelületen helyezkednek el egy csavarmozgás során, de jelen esetben, a 2. fejezetben belátottakból következik majd, hogy a tetrahélix minden csúcsa előáll egyetlen csúcsból, ugyanazon csavarmozgás (vagy annak az inverzének) egymás utáni alkalmazásai által, ezért helyezkedik el az összes csúcs egyetlen hengerfelületen.

A csúcsoknak a tengelyre vett merőleges vetületei egyenlő hosszúságú szakaszokra bontják fel a tengelyt, és bármely vetületpontból minden harmadik rákövetkező vetületpontot véve (mindkét irányban), a hozzájuk tartozó csúcspontok olyan tetraéder-élek sorozatával vannak összekötve, melyek a tetrahélixnek csak egyetlen tetraéderében fordulnak elő. Ezek összességében három olyan térbeli sokszögvonalat alkotnak, amelyek egy-egy, a hengerfelületre írt csavarvonalnak a beírt sokszögvonalai, és ezek a csavarvonalak egymás elforgatottjai (ld. 3. ábra).

Egy hengerfelületre írt csavarvonalnak az a tulajdonsága, hogy bármely pontjában a hengert az érintőegyenese végig ugyanakkora szöget zár be a henger tengelyével, a csavarvonalba beírt sokszög oldalai pedig, hogy ha ugyanakkora hosszúságúak, akkor mind ugyanakkora szöget zárnak be a csavarvonal tengelyével.

A tetrahélix két egymást követő elemének a tengelynél mért forgási szöge 360 foknak egy irracionális kifejezése, ezért nincs olyan eltolás, amely a tetrahélixet önmagába vinné, azaz a tetrahélix eltolásra nem periodikus.

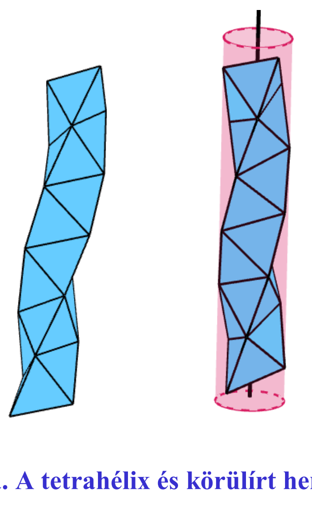
A további fejezetekben először a tetrahélix tulajdonságait vesszük sorra (ld. a 2. fejezetet), majd kétféle általánosítását definiáljuk. Szabályos tetraéder helyett más konvex, vagy nemkonvex poliéderre egy illeszkedési szabállyal definiálhatunk analóg pakolást (ld. a 3. fejezetet). Végezetül a tetrahélix egy véges változatával fogunk foglalkozni, amikor véges sok majdnem szabályos tetraéderből álló eleme után záródik a poliédersorozat, és a csúcsok egy tórusz felületén találhatók – ehhez a motivációt a 4D szabályos testek adják (ld. 4. fejezetet).

2. A tetrahélix tulajdonságai

A tetrahélix egymást követő elemeinek konstruálásához mindig 1-1 új csúcs felvétele szükséges, amely az előző elemének (amely egy szabályos tetraéder) egyetlen szóba jöhető háromszöglapjával együtt egy szabályos tetraédert határoz meg (azaz a konvex burkuk szabályos tetraéder).

Így a tetrahélix tetraéder-sorozata azonosítható a csúcsainak egy (mindkét irányban végtelen) sorozatával. Könnyen belátható, hogy a tetrahélix elemeit pontosan azok a tetraéderek alkotják, amelyek a csúcsainak a sorozatában négy, egymást követő csúcs konvex burkaként állnak elő, ugyanis pontosan így biztosítható, hogy a tetrahélix elemeit alkotó tetraéder-sorozatban 2, 3, 4, ill. 5 egymást követő elem metszete a tetrahélix 1. fejezetbeli definíciójában szereplő feltételeknek eleget tegyen.

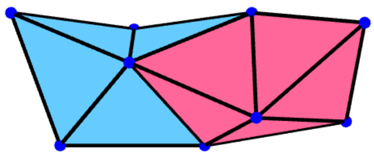
Tegyük fel, hogy $\dots, V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ a csúcsok sorozata. Tekintsük azt a τ egybevágóságot, amely a $V_1V_2V_3V_4$ tetraédert a $V_2V_3V_4V_5$ tetraéderbe viszi úgy, hogy $\tau(V_i) = V_{i+1}$, ha $1 \leq i \leq 4$. Ekkor ez egy csavarmozgás, amely a tetrahélixet önmagába viszi. A tengelye könnyen megszerkeszthető, mivel az a $\overrightarrow{V_1V_2}$, $\overrightarrow{V_2V_3}$, $\overrightarrow{V_{34}}$ egységvektorokkal ugyanakkora szöget zár be. Így ha egy közös kezdőpontba eltoljuk a három vektort, akkor a kezdőpontjuk és a végpontjaikon átmenő kör középpontja meghatározza a tengely irányát. Az eddigiekből az is következik, hogy ha i és j két tetszőleges egész szám, $i < j$, akkor V_j előáll, mint V_i-nek a képe, ha a τ csavarmozgást $(j - i)$-szer alkalmazzuk rá, azaz $V_j = \tau^{j-i}(V_i)$.



3. ábra. A tetrahélix és körülírt hengere

Kiszámítható, hogy ha egységnyi élhosszú szabályos tetraéderekből áll a tetrahélix, akkor az egymást követő csúcsainak a tengelyre vett vetületei $1/\sqrt{10} \approx 0{,}3162$ távolságra vannak egymástól, míg az egymást követő csúcsoknak a tengellyel vett síkjai által bezárt szöge (azaz a csavarmozgás forgásszöge) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 131{,}81°$, a hengerfelület alapkörének sugara pedig $3\sqrt{3}/10 \approx 0{,}5196$ (ld. [2]).

Hívjunk „csónak”-nak egy háromelemű szabályos tetraédersorozat uniójából álló alakzatot, ha a sorozat pakolás, bármely két egymást követő elemének metszete egy közös lapjuk, és így a három tetraéder metszete egy közös élük. Egy csónaknak két olyan csúcsa van, ahol 5 darab háromszöglapja találkozik, ezek egy olyan éllel vannak összekötve, amelynél a poliéder konkáv. A konkáv élre illeszkedő két háromszöglapot hívjuk a csónak tetejének, a csónak tetejéhez éllel illeszkedő 4 darab háromszöglapot hívjuk a csónak oldalának, a maradék két háromszöglapot pedig a csónak aljának. Válasszunk ki két olyan lapot a csónak oldalából, melyeknek nincs közös csúcsuk, számozzuk meg ezeket az 1-es, ill. 2-es számokkal. Ekkor a csónak összes elmozgatottján is hívhatunk egy-egy lapot 1-es, ill. 2-es számozásúnak, a csónak megfelelő számozású lapjainak elmozgatottjait.



4. ábra. Két, egymáshoz illeszkedő „csónak”

A tetrahélixet a következő illeszkedési szabály is definiálja: egy csónak két elmozgatott példányát úgy illesztjük össze, hogy a belsejeik diszjunktak legyenek, és a sorozatban korábbi elem 2-es számú lapjához illeszkedjen a rákövetkező elem 1-es számú lapja olyan módon, hogy a két csónak tetejének legyen közös éle (ld. 4. ábra).

Könnyen belátható, hogy ha olyan egy csónak elmozgatott példányainak a (mindkét irányban végtelen) sorozata, hogy az egymást követő elemeire fennáll ez az illeszkedési szabály, akkor is tetrahélixet kapjuk (méghozzá a csónakok uniója egy olyan tetrahélix, amelyet a csónakokat alkotó tetraéderek határoznak meg).

3. Poliédersorozatok illeszkedési szabályokkal

Szabályos tetraéder helyett más, nem feltétlenül konvex, 3-dimenziós poliéder esetén is lehet a tetrahélixhez hasonló konstrukciót definiálni.

Ekkor az adott P poliéder két, egymással egybevágó lapját, L_1-et, és L_2 -t, felcímkézzük, az 1-es és 2-es számokkal, valamint megadjuk a térnek egy olyan τ mozgását (pl. úgy, hogy az 1-es számú lap egyes csúcsait az egybevágóság a 2-es számú lap mely csúcsaiba viszi), amely esetén az 1-es számú lapnak a 2-es számú lap a képe, és amely a poliédert egy olyan elmozgatott poliéderbe viszi át, amelynek az eredeti poliéderrel vett metszete pontosan a két poliéder közös lapja, azaz $\tau(L_1) = L_2$, és $\tau(P) \cap P = L_2$. (Megjegyzendő, hogy a τ mozgást már három, nem egy egyenesen fekvő pont, és azok képe egyértelműen meghatározza.)

A P poliéderre tetszőleges π mozgást alkalmazva, a $\pi(P)$ elmozgatott poliéderen is hívhatunk egy-egy lapot 1-es, ill. 2-es számozásúnak (a poliéder megfelelő számozású lapjainak elmozgatottjait, azaz $\pi(L_1)$-et, ill. $\pi(L_2)$-t). Ezáltal a következőképp definiálhatjuk a P

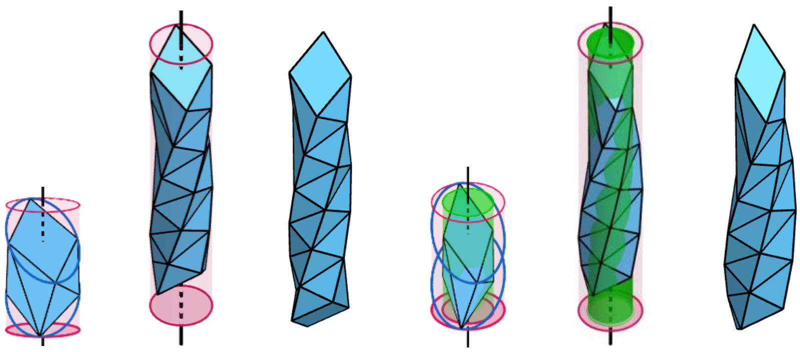
poliéder két elmozgatottjára egy illeszkedési szabály teljesülését: a π_1 és π_2 mozgások esetén a $\pi_1(P)$ és $\pi_2(P)$ poliéderekre pontosan akkor teljesül az illeszkedési szabály, ha $\pi_2 = \pi_1 \circ \tau$, ahol τ az a mozgás, amelyre az előző bekezdésben megadott feltételek teljesülnek. Ez garantálja, hogy $\pi_2(L_1) = \pi_1(L_2)$ és $\pi_2(P) \cap \pi_1(P) = \pi_1(L_2)$ is fennálljanak.

Ezzel az illeszkedési szabállyal definiálhatunk egy (mindkét irányban végtelen) $\mathcal{S}$ poliédersorozatot, amelynek elemei az adott poliéder elmozgatott példányai, és két egymást követő elem esetén azokat úgy illesztjük össze, hogy a belsejeik diszjunktak legyenek, és a sorozatban kisebb indexű elem 2-es számú lapjához illeszkedjen a rákövetkező elem 1-es számú lapja, az előbbi az illeszkedési szabályban megadott módon.

A továbbiakban feltesszük, hogy az ilyen módon definiált (mindkét irányban végtelen) poliédersorozat egy pakolást alkot, mert leginkább ezzel az esettel szeretnénk foglalkozni, ekkor a leglátványosabb a tetrahélixhez való hasonlósága.

Ha az L_1 lap egyik, mondjuk V_1 jelű csúcsát az L_2 lapbeli $\tau(V_1)$ csúccsal a P poliédernek egy éle köti össze, akkor az illeszkedési szabály alapján készített $\mathcal{S}$ poliédersorozatban a $\tau^i(V_1)$ csúcsok (ahol i tetszőleges egész szám) egy csavarvonal beírt sokszögének az egymást követő csúcsai, melynek oldalait az $\mathcal{S}$ poliédersorozat bizonyos élei alkotják – ez a csavarvonal egy olyan hengerfelületen fekszik, melynek a tengelye a τ csavarmozgás tengelye. Az ilyen típusú csavarvonalak fekhetnek ugyanazon a hengerfelületen, vagy akár különböző hengerfelületeken is.

Erre mutatunk most két példát (ld. 5. ábra): egy hengernek egy ferde síkmetszetébe (amely egy ellipszis) egy beírt négyszöget rajzolunk, majd azt forgatva eltoljuk a henger tengelyének irányában úgy, hogy diszjunkt legyen a két síkmetszet (az eredeti, és a forgatva eltolt), és a P poliédernek az eredeti négyszög, valamint a forgatva eltolt példányának a konvex burkát vesszük, mozgásnak pedig a már említett forgatva eltolást. Ekkor az $\mathcal{S}$ poliédersorozat négy olyan csavarvonalhoz tartozó beírt sokszögvonalat tartalmaz, amelyek ugyanazon a hengerfelületen helyezkednek el.

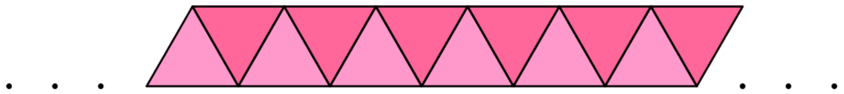


5. ábra. Példák egyetlen, ill. két hengerfelületen elhelyezkedő csavarvonalakra, poliéderek illeszkedési szabálya által definiált poliédersorozat esetén (poliéder, henger(ek) és a rájuk írt csúcsokkal rendelkező poliédersorozat, poliédersorozat ábrázolásával mindkét esetben)

Ezután változtatunk kicsit ezen a konstrukción úgy, hogy a henger ferde síkmetszetébe nem beírt négyszöget, hanem olyan négyszöget rajzolunk, amelynek két csúcsa a hengerfelületen helyezkedik el, a másik két csúcsa pedig egy kisebb sugarú olyan henger felületén, amelynek ugyanaz a tengelye, mint az eredeti hengernek. Ekkor az $\mathcal{S}$ poliédersorozat négy csavarvonalhoz tartozó beírt sokszögvonalat tartalmaz, amelyek közül két csavarvonal az eredeti hengerfelületen helyezkedik el, a másik két csavarvonal pedig a kisebb sugarú henger felületén.

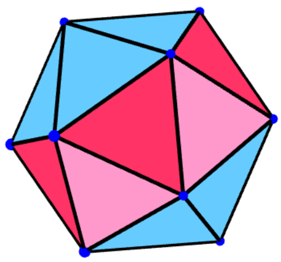
4. Majdnem szabályos tetraéderek véges láncolata

A síkban, oldalaikkal egymáshoz illeszkedő szabályos háromszögek pakolása esetén, ha bármely két, egymást követő háromszögnek a metszete egy közös oldaluk, bármely három, egymást követő háromszögnek a metszete egy közös csúcsuk, és bármely négy, egymást követő háromszög metszete üres halmaz, akkor az a háromszögpakolás egyértelműen meghatározott, egy mindkét irányban végtelen háromszögsorozatot alkot (ld. 6. ábra).



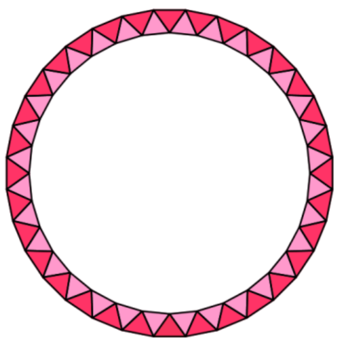
6. ábra. Szabályos háromszögek végtelen sorozatának egy véges része, adott illeszkedési szabályok esetén

Azonban a 3-dimenziós térben egy ilyen háromszögpakolás a háromszögek oldalai mentén behajtható, így pl. a szabályos ikozaéder szimmetriasíkja mentén szabályos háromszögeknek egy véges, önmagába záródó láncolata adódik a fenti illeszkedési tulajdonságokkal (ld. 7. ábra).



7. ábra. Szabályos ikozaéder laphálójában szabályos háromszögek véges láncolata ugyanazokkal az illeszkedési tulajdonságokkal, mint a 6. ábra síkbeli háromszögelrendezése

Síkban csak torzulásokkal ábrázolható ilyen tulajdonságú alakzat, azaz nem mindegyik háromszög szabályos egy ilyen típusú véges, záródó elrendezésben. Azonban minél több háromszög van a 8. ábrához tartozó elrendezésben, annál közelebbi lehet az alakjuk a nem szabályos háromszögeknek is a szabályos háromszögekéhez. Azzal mérhető, hogy mennyire közeli az alakja egy háromszögnek a szabályos háromszöghöz, hogy mennyire közeli a leghosszabb és legrövidebb oldalának az aránya az 1-hez.



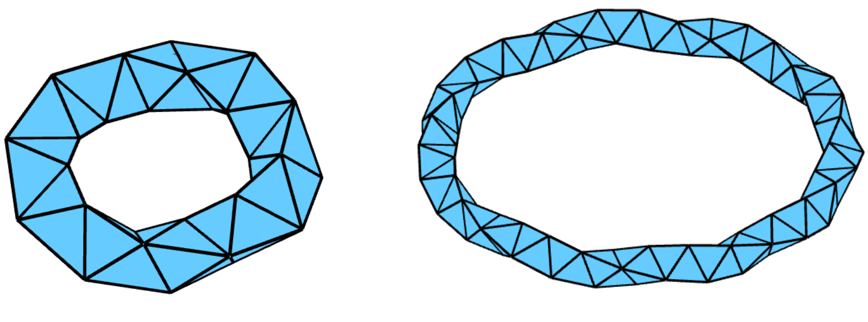
8. ábra. Majdnem szabályos háromszögek véges, záródó sorozata

A következőkben a fentieknek 3-dimenziós analogonját konstruáljuk meg a tetrahélix esetében. Ehhez a motivációt a 4-dimenziós szabályos testek adják. Ugyanis, a szimpliciális, (azaz tetraéder hiperlapokkal rendelkező) 4-dimenziós centrálszimmetrikus szabályos konvex testek esetén (a centrálszimmetria megkötésével a szabályos 4-szimplexet kizárjuk), tehát a 16-cella és a 600-cella esetén fennáll, hogy van olyan véges, szabályos tetraéderekből álló hiperlapsorozatuk, amely önmagába záródik (8, ill. 30 tetraéderből állnak), és igaz rá a tetrahélix illeszkedési szabálya: az 1. fejezetbeli definíció feltételei, ahol a 2-5 darab, egymást követő elem metszetére szerepelnek megkötések. Ezek a tetraéderláncok a szabályos 4-dimenziós politóp körülírt gömbjéhez tartozó egy-egy főkör mentén helyezkednek el, és fennáll, hogy a politóp hiperlapjainak halmaza felbomlik ilyen típusú, egymással diszjunkt tetraéderláncokra.

Ezzel a tulajdonsággal szorosan kapcsolatos a Hopf-fibrálás fogalma. A Hopf-fibrálás a 4-dimenziós térbeli 3-dimenziós egységgömbfelületből egy leképezés a 3-dimenziós térbeli 2-dimenziós egységgömbfelületre, melynél a 2-dimenziós egységgömbfelület mindegyik pontjának az inverz képe egy főkör a 3-dimenziós gömbfelületen.

Ha a 3D egységgömbfelületet sztereografikus projekcióval leképezzük a 3-dimenziós térbe (egyetlen pontja, a (0,0,0,1) kivételével), akkor a 2-dimenziós gömbfelület szélességi köreinek (azaz a 3-dimenziós xyz-tér xy-síkkal párhuzamos köreinek) inverz képei tóruszok lesznek, melyekben az egyes pontok inverz képei ún. Villarceau-körök (azaz olyan körök, melyek a tórusz szimmetriatengelyére nem merőlegesek, és a tengellyel nem egysíkúak). Bármely két ilyen kör egymásba kapcsolódó (más szóval egymásba fűzött, azaz bármelyik kör körlapjába – tehát a körvonal konvex burkába – belemetsz a másik kör). Ennek a tulajdonságnak a diszkrét analogonja, hogy a fentebb említett tetraéderláncok 3D-s vetületei is egymásba kapcsolódók, azaz az egymásba kapcsolódó körökkel topologikusan ekvivalens görbék adódnak, ha a tetraéderláncokat bennük végigfutó olyan egyszerű zárt konvex sokszögvonalakkal helyettesítjük, amelyeknek minden egyes tetraéderrel egy-egy szakasz a metszete (ld. [2]).

Természetesen egy ilyen zárt tetraéderlánc csak torzulásokkal ábrázolható 3D-ben, azaz nem lehet minden tetraédere szabályos. Arra mutatunk egy konstrukciót, hogy hogyan lehet tetszőleges pontossággal majdnem szabályos tetraéderekkel előállítani ilyen tetraédersorozatot.



9. ábra. Majdnem szabályos tetraéderek véges, záródó sorozatai (n=33, $\varepsilon = 0,409$, és n=96, $\varepsilon = 0,112$)

Vegyük egy n+1 csúcsból álló részsorozatát a tetrahélixnek. Ekkor a tetrahélix tengelyét megfeleltetjük majd egy olyan körnek, amelynek a kerülete megegyezik a tengely hosszával (az első csúcspont tengelyre vett vetületének és az utolsó csúcspont tengelyre vett vetületének a távolságával). Az egymást követő csúcspontok vetületeinek megfelelő pontokat mérjünk fel ezen a körön, ugyanakkora távolságra egymástól. A vetületpontokra merőleges síkokat állítva, azok áthaladnak a kör tengelyén. Pontosan a tetrahélix forgatva eltolásához tartozó forgatási szög egymás utáni többszöröseivel forgassunk el egy ilyen síkon adott kezdeti pontot az egymás utáni merőleges síkokon, és pontosan akkora sugarú síkbeli körökön legyenek rajta ezek a

$P_0, P_1, \dots, P_n$ pontok, mint a tetrahélix hengerfelületének az alapkörének a sugara. Ekkor az utolsó pont ugyanazon a síkon, annak ugyanazon a körén lesz, mint az első. A szögkülönbség i/n-edrészével forgassuk vissza a $P_0, P_1, \dots, P_n$ pontsorozat minden pontját, $0 \leq i \leq n$ esetén. Az ezekre a pontokra felépített tetraéderpakolás (4 darab, ciklikusan egymást követő csúcsra illesztünk egy tetraédert) minden egyes tetraédere közeli lesz a szabályos tetraéderhez, ha n elég nagy – olyan értelemben, hogy ha adott egy $\varepsilon > 0$ szám, akkor a leghosszabb és a legrövidebb élek aránya egy tetraéderben kisebb lesz (1+ε)-nál, ha $n > n_0$, megfelelően választott n_0 szám esetén. A 9. ábra példáiban n=33 csúcs esetén $\varepsilon = 0{,}409$, és n=96 csúcs esetén $\varepsilon = 0{,}112$ adódik, azaz a zárt tetraéderláncok tetraédereiben a leghosszabb él és legrövidebb él hányadosa kisebb, mint 1,409, ill. 1,112. Érdekes probléma, hogy van-e jobb konstrukció, amellyel az itt ismertetett eljáráshoz képest lényegesen kisebb ε értékkel készíthető el ugyanannyi majdnem szabályos tetraéder zárt lánca?

Összefoglaló

A tetrahélix egy olyan érdekes 3-dimenziós alakzat, amely szabályos tetraéderek pakolásaként áll elő, olyan élsorozatokat tartalmazva, amelyek csavarvonalak beírt sokszögvonalai. Ennek kétféle általánosítását vezettük be, illeszkedési szabállyal megadott poliédersorozat, és záródó tetraéderlánc esetén.

Köszönetnyilvánítás.

Szeretném megköszönni Németh Lászlónak és Szalay Lászlónak, hogy erről a témakörről előadhatott a szerző Sopronban a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS) 2023-as programjában.

Irodalomjegyzék

[1] **Boerdijk, A.H.,** Some remarks concerning close-packing of equal spheres, Philips Res. Rep. 7 (1952) 303–313.
[2] Boerdijk–Coxeter helix, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Boerdijk%E2%80%93Coxeter_helix
[3] Chasles' theorem (kinematics), Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Chasles%27_theorem_(kinematics)
[4] **Coxeter, H. S. M.**, Regular Complex Polytopes. Cambridge University Press, 1974. ISBN 052120125X.
[5] **Fuller, R. B.**, Applewhite, E.J. (ed.), Synergetics, Macmillan, 1975.