Matematikai Közlemények
XI. kötet, 2023

doi:10.20312/dim.2023.02

Az általánosított oktoniók és a vektor-mátrixok algebrája

Péntek Kálmán
ELTE SEK BDPK
Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban az általánosított Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárással megkonstruáljuk az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_{\alpha}$ kommutatív és asszociatív algebráját, az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ nem kommutatív, de asszociatív algebráját és az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját.
Minden véges dimenziós asszociatív algebra izomorf a teljes mátrixalgebra alkalmas részalgebrájával, viszont az általánosított oktoniók algebrája nem asszociatív. A probléma megoldására Zorn, M. A. 1931-ben értelmezte a split oktoniók vektor-mátrix reprezentációját. A dolgozat utolsó fejezetében megkonstruáljuk az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ általánosított oktoniók vektor-mátrix reprezentációját.

ABSTRACT. In the paper with the use of generalized Cayley-Dickson process we contruct the commutative and associative algebra of generalized complex numbers $\mathbb{C}_{\alpha}$, the non commutative, but associative algebra of generalized quaternions $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ and the non commutative, non associative algebra of generalized octonions $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$.
Any finite dimensional associative algebra is isomorphic to a subalgebra of total matrix algebra, but the algebra of generalized octonions $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ is not associative. To overcome this problem Zorn, M.A. defined vector-matrix repesentation for split octonions algebra in 1931. In the last section of the paper we construct the vector-matrix representation of generalized octonions $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$.

1. Bevezetés

Hamilton, W. R. (1805-1865) 1833-ban alkotta meg a klasszikus komplex számok struktúrájának rendezett valós számpárokon alapuló felépítését (HAMILTON, 1834), 1843-ban pedig felfedezte a valós kvaterniók 4-dimenziós nem kommutatív, de asszociatív algebráját (HAMILTON, 1844, 1847). Még ugyanezen évben Graves, J.T. (1806-1870) megalkotta a valós oktoniók 8-dimenziós nem kommutatív és nem is asszociatív algebráját. Eredményeit azonban nem publikálta, csupán Hamiltonnal folytatott baráti levelezésében írta le. Cayley, A. (1821-1895) 1845-ben szintén eljutott az oktoniókhoz és publikálta is eredményeit, ezért hívják ma ezeket az objektumokat Cayley-féle számoknak (CAYLEY, 1889).

Dickson, L.E. (1874-1954) 1912-ben értelmezte az általánosított kvaternióalgebra fogalmát, 1919-ben pedig megalkotta a későbbiekben Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárásnak elnevezett módszert (DICKSON, 1912, 1919), amelyet tanítványa, Albert, A.A. (1915-1972) 1942-ben általánosított (ALBERT, 1942).

Zorn, M.A. (1906-1993) 1931-ben (ZORN, 1931,1933) megadta a split (hasított) oktoniók nem asszociatív algebrájának vektor-mátrix reprezentációját. Az eljárás némi módosítással alkalmazható a klasszikus oktoniók algebrájának reprezentálására is (EBBINGHAUS et al., 1991). Dolgozatunk fő eredményeként megadjuk az általánosított oktoniók vektor-mátrix reprezentációját.

2. Általánosított komplex számok

Először összefoglaljuk azokat az általánosított komplex számokra vonatkozó legfontosabb fogalmakat és ismereteket, amelyek feltétlenül szükségesek a dolgozat további részeinek megértéséhez.

Legyen $\{\mathbb{R},+,\cdot\}$ a valós számok teste, 0 az összeadás, 1 a szorzás neutrális eleme, $\alpha \in \mathbb{R}$ pedig egy rögzített valós paraméter. Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ direktszorzatban műveleteket vezetünk be a következő módon: tetszőleges $r \in \mathbb{R}, (a_0, a_1), (b_0, b_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esetén

(1) skalárral való szorzás: $r \cdot (a_0, a_1) := (r \cdot a_0, r \cdot a_1)$,

(2) összeadás: $(a_0, a_1) + (b_0, b_1) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1)$,

(3) szorzás: $(a_0, a_1) \cdot (b_0, b_1) := (a_0 \cdot b_0 - \alpha \cdot a_1 \cdot b_1, a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)$.

A (3) összefüggés a Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás. Az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz az (1) – (3) műveletekkel egy 2-dimenziós, neutrális elemes, kommutatív és asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett. Itt $0_{\mathbb{C}} := (0,0)$ az összeadás, $1_{\mathbb{C}} := (1,0)$ a szorzás neutrális eleme. Ebben az algebrában, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az $1_{\mathbb{C}}$ és az $i := (0,1)$ elempár egy természetes bázist alkot.

Az $S := \{(a_0, 0): a_0 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ egy részalgebrát alkot az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ algebrában és az $f_{\mathbb{C}}: \mathbb{R} \to S, a_0 \mapsto (a_0, 0)$ egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus, így pedig az $f_{\mathbb{C}}^*: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a_0 \mapsto (a_0, 0)$ egy beágyazási $\mathbb{R}$ algebra-monomorfizmus. A beágyazással nyert struktúrát az *általánosított komplex számok algebrájá*nak nevezzük és a $\mathbb{C}_\alpha$ szimbólummal jelöljük.

Az $\alpha = 1$ esetben a fenti konstrukcióval a klasszikus komplex számok $\mathbb{C}$ algebráját nyerjük. Az általánosított komplex számok algebrájáról további ismereteket találhatunk a szakirodalomban (KANTOR – SZOLODOVNYIKOV, 1985).

Az $i = (0,1) \in \mathbb{C}_\alpha$ elemre teljesül az $i^2 = -\alpha$ összefüggés és minden $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}_\alpha$ egyértelműen írható fel $a_0 + a_1 \cdot i$ alakban, amely előállítást az általánosított komplex szám *algebrai alak*jának nevezzük.

Az $1, i \in \mathbb{C}_\alpha$ elemek az *általánosított komplexegység*ek, amelyek szorzására érvényesek következő műveleti szabályok:

$$1 \cdot 1 = 1, \qquad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \qquad i^2 = -\alpha.$$

A $z = a_0 + a_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ *konjugált*ján a $\bar{z} = a_0 - a_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ elemet, *normá*ján az $N(z) := z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 \in \mathbb{R}$ számot értjük. Az $N: \mathbb{C}_\alpha \to \mathbb{R}$ egy nem-elfajuló multiplikatív kvadratikus alak, így $\mathbb{C}_\alpha$ egy kompozícióalgebra. A $z = a_0 + a_1 \cdot i,\ t = b_0 + b_1 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ elempár *skaláris szorzat*ának a $z \circ t = a_0 \cdot b_0 + \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 \in \mathbb{R}$ számot nevezzük.

Az $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \left\{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -\alpha \cdot a_1 & a_0 \end{pmatrix}: a_0, a_1 \in \mathbb{R}\right\}$ alakú mátrixok egy 2-dimenziós részalgebrát alkotnak a másodrendű kvadratikus mátrixok $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrájában. A $g: \mathbb{C}_\alpha \to M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), a_0 + a_1 \cdot i \mapsto \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -\alpha \cdot a_1 & a_0 \end{pmatrix}$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus, így a $\mathbb{C}_\alpha$ algebra reprezentálható az $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebra $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ részalgebrájával.

Az általánosított komplex számok algebrájának részletes tárgyalása megtalálható (PÉNTEK, 2018) dolgozatában.

3. Általánosított kvaterniók

Ezután áttekintjük az általánosított kvaterniók struktúrájára vonatkozó legfontosabb ismereteket, ezeket felhasználjuk a dolgozatunk későbbi részeiben.

A $\mathbb{C}_\alpha$ algebrából kiindulva a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ direktszorzatban műveleteket értelmezünk a következő módon: tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $(z_0, z_1), (w_0, w_1) \in \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ esetén

(4) skalárral való szorzás: $r \cdot (z_0, z_1) := (r \cdot z_0, r \cdot z_1)$,
(5) összeadás: $(z_0, z_1) + (w_0, w_1) := (z_0 + w_0, z_1 + w_1)$,
(6) szorzás: $(z_0, z_1) \cdot (w_0, w_1) := (z_0 \cdot w_0 - \beta \cdot z_1 \cdot \overline{w_1}, z_0 \cdot w_1 + z_1 \cdot \overline{w_0})$,

ahol $\beta \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter. A (6) összefüggés a Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás.

A $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ halmaz a (4) – (6) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, de asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett, itt $0_\mathbb{H} := (0_\mathbb{C}, 0_\mathbb{C})$ az összeadás, $1_\mathbb{H} := (1_\mathbb{C}, 0_\mathbb{C})$ a szorzás neutrális eleme. Ebben az algebrában, mint $\mathbb{R}$ feletti 4-dimenziós vektortérben az $1_\mathbb{H}, (i, 0_\mathbb{C}), j := (0_\mathbb{C}, 1_\mathbb{C})$ és $(0_\mathbb{C}, i)$ elemnégyes egy természetes bázist alkot.

A $T := \{(z_0, 0_\mathbb{C}) : z_0 \in \mathbb{C}_\alpha\} \subset \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ egy részalgebrát alkot a $\mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha$ algebrában és az $f_\mathbb{H} : \mathbb{C}_\alpha \to T, z_0 \mapsto (z_0, 0_\mathbb{C})$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus, így aztán az $f_\mathbb{H}^* : \mathbb{C}_\alpha \to \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha . z_0 \mapsto (z_0, 0_\mathbb{C})$egy beágyazási $\mathbb{R}$ algebra-monomorfizmus. A beágyazással kapott struktúrát a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított kvaterniók algebrájá*nak nevezzük.

Az $\alpha = 1, \beta = 1$ speciális esetben a klasszikus Hamilton-féle kvaterniók $\mathbb{H}$ algebráját nyerjük. Az általánosított kvaterniók részletes tárgyalását magyarul megtalálhatjuk (PÉNTEK, 2018) dolgozatában.

A $j = (0_\mathbb{C}, 1_\mathbb{C}) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemre teljesül $j^2 = -\beta$ és minden $(z_0, z_1) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elem egyértelműen írható fel $z_0 + z_1 \cdot j$ alakban, amely előállítást az általánosított kvaternió *komplex algebrai alak*jának nevezzük. Ha pedig $z_0 = a_0 + a_1 \cdot i, z_1 = a_2 + a_3 \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ és $q = z_0 + z_1 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor a q kvaternió egyértelműen írható fel $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ alakban, ahol $k := i \cdot j$, ezen alakot az általánosított kvaternió *valós algebrai alak*jának hívjuk. Az $1, i, j, k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elemek az *általánosított kvaternióegységek*, amelyek szorzására érvényesek a következő összefüggések:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i, \quad 1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \quad 1 \cdot k = k \cdot 1 = k,$$
$$i \cdot j = -j \cdot i = k, \quad j \cdot k = -k \cdot j = \beta \cdot i, \quad k \cdot i = -i \cdot k = \alpha \cdot j,$$
$$i^2 = -\alpha, \quad j^2 = -\beta, \quad k^2 = -\alpha \cdot \beta.$$

Ha $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor $\bar{q} := a_0 - a_1 \cdot i - a_2 \cdot j - a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ a q elem *konjugált*ja, $N(q) := q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 + \beta \cdot a_2^2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3^2 \in \mathbb{R}$ pedig a q *normá*ja. A $N : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}$ egy nem-elfajuló multiplikatív kvadratikus alak, ezért $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ egy kompozícióalgebra. A $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k, q_1 = b_0 + b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ elempár *skaláris szorzat*án a

$$q_0 \circ q_1 := a_0 \cdot b_0 + \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük. A $\circ : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{R}$ skaláris szorzás egy szimmetrikus bilineáris leképezés. A $q = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternió *valós rész*én (skalár rész) az

(7) $$S(q) := a_0 \in \mathbb{R}$$

valós számot, *képzetes rész*én (vektor rész) a

(8) $$V(q) := U = a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \in \mathbb{R}^3$$

vektort értjük. Így minden $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ egyértelműen írható fel $q = S(q) + V(q) = a_0 + U$ alakban, amelyet több szerző az általánosított kvaternió *Hamilton-féle alak*jának nevez. Ha a $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternióra $S(q) = 0$ teljesül, akkor tiszta képzetes kvaternióról beszélünk, a továbbiakban ezek halmazát $Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ jelöli. Ha $U := a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$, $V := b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$, akkor ezen elemek szorzatára

$$U \cdot V = -(\alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3) + \\ +[(a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \beta \cdot i + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \alpha \cdot j + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot k] \tag{9}$$

teljesül. Ez alapján e két tiszta képzetes kvaternió *skaláris szorzat*án a fenti értelmezéssel összhangban

$$U \circ V := \alpha \cdot a_1 \cdot b_1 + \beta \cdot a_2 \cdot b_2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3 \cdot b_3 \in \mathbb{R} \tag{10}$$

skalárt, *vektoriális szorzat*án pedig az

$$U \times V := (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \beta \cdot i + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \cdot \alpha \cdot j + \\ +(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot k \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta}) \tag{11}$$

vektort értjük. Ekkor a (9) – (11) alapján az

$$U \cdot V = -(U \circ V) + (U \times V) \tag{12}$$

összefüggés teljesül. Ennek kiterjesztéseként, ha $a_0 + U, b_0 + V \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor ezen általánosított kvaterniók szorzatára

$$(a_0 + U) \cdot (b_0 + V) = (a_0 \cdot b_0 - U \circ V) + (a_0 \cdot V + b_0 \cdot U + U \times V) \tag{13}$$

teljesül, ahol jobboldal első zárójele a szorzat valós, a második zárójel pedig szorzat képzetes része. Az $Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ halmazban a (10) skaláris szorzás egy szimmetrikus, a (11) vektoriális szorzás pedig egy antiszimmetrikus bilineáris leképezés. Az

$$M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R}) := \left\{ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -\alpha a_1 & a_0 & -\alpha a_3 & a_2 \\ -\beta a_2 & \beta a_3 & a_0 & -a_1 \\ -\alpha\beta a_3 & -\beta a_2 & \alpha a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\} \tag{14}$$

alakú mátrixok egy 4-dimenziós részalgebrát alkotnak a negyedrendű kvadratikus mátrixok 16-dimenziós $M_4(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrájában. A

$$g^{\mathbb{H}}: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R}), a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k \mapsto \mathcal{A} \tag{15}$$

leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus, ezért az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrája az $M_4(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebra $M_4^{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ részalgebrájával reprezentálható.

Az általánosított kvaterniók algebrájáról további ismereteket találhatunk (PÉNTEK, 2018) dolgozatában.

4. Általánosított oktoniók

Ebben a fejezetben összefoglaljuk az általánosított oktoniókra vonatkozó legfontosabb ismereteket, ezzel készítjük elő a dolgozatunk fő részét képező reprezentációs tétel tárgyalását.

A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrából kiindulva a $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ direktszorzatban műveleteket értelmezünk a következő módon: tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $(p_0, p_1), (q_0, q_1) \in \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén

(16) skalárral való szorzás: $r \cdot (p_0, p_1) := (r \cdot p_0, r \cdot p_1)$,
(17) összeadás: $(p_0, p_1) + (q_0, q_1) := (p_0 + q_0, p_1 + q_1)$,
(18) szorzás: $(p_0, p_1) \cdot (q_0, q_1) := (p_0 \cdot q_0 - \gamma \overline{q_1} \cdot p_1, p_1 \cdot \overline{q_0} + q_1 \cdot p_0)$,

ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter. A (18) összefüggés a Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás.

A $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ halmaz a (16) – (18) műveletekkel egy 8-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív és nem is asszociatív algebrát alkot az $\mathbb{R}$ test felett, ahol $0_{\mathbb{O}} := (0_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}})$ az összeadás, $1_{\mathbb{O}} := (1_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}})$ a szorzás neutrális eleme. Ebben az algebrában, mint 8-dimenziós vektortérben az $1_{\mathbb{O}}, (i, 0_{\mathbb{H}}), (j, 0_{\mathbb{H}}), (k, 0_{\mathbb{H}}), E := (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}), (0_{\mathbb{H}}, i), (0_{\mathbb{H}}, j), (0_{\mathbb{H}}, k)$ elemrendszer egy természetes bázist alkot. Megjegyezzük, hogy ez a $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebra egy alternáló algebra, mivel a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebra szorzási művelete asszociatív (CURTIS, 1990)

Az $U := \{(q_0, 0_{\mathbb{H}}): q_0 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}\} \subset \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ egy részalgebrát alkot a $\mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrában, és az $f_{\mathbb{O}}: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to U, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{H}})$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus, az $f_{\mathbb{O}}^*: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}_{\alpha\beta} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}, q_0 \mapsto (q_0, 0_{\mathbb{H}})$ ezért egy beágyazási $\mathbb{R}$ algebra-monomorfizmus. A beágyazással nyert struktúrát az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ szimbólummal jelöljük és az *általánosított oktoniók algebrájá*nak nevezzük.

Az $\alpha = 1, \beta = 1$ *és* $\gamma = 1$ speciális esetben a klasszikus Cayley-Graves-féle oktoniók $\mathbb{O}$ algebráját nyerjük. Az általánosított oktoniók algebráját magyarul tárgyalja (PÉNTEK, 2020) dolgozatában.

Az $E = (0_{\mathbb{H}}, 1_{\mathbb{H}}) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elemre teljesül $E^2 = -\gamma$ és minden $(q_0, q_1) \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ egyértelműen írható fel $q_0 + q_1 \cdot E$ alakban. Mivel pedig a $q_0, q_1 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ egyértelműen írható fel az előző fejezetben látottak szerint $q_0 = a_0 + U$, illetve $q_1 = b_0 + V$ $\left(a_0, b_0 \in \mathbb{R}, U, V \in Im\left(\mathbb{H}_{\alpha\beta}\right)\right)$ alakban, így minden általánosított oktonió is egyértelműen állítható elő

(19) $$o = q_0 + q_1 \cdot E = (a_0 + U) + (b_0 + V) \cdot E$$

formában.

Az általánosított oktoniók kvaternióalgebrai alakjával történő számolás szabályai a következők: legyen $r \in \mathbb{R}, p_0 + p_1 \cdot E, q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(20) skalárral való szorzás: $r \cdot (p_0 + p_1 \cdot E) = (r \cdot p_0) + (r \cdot p_1) \cdot E$,
(21) összeadás: $(p_0 + p_1 \cdot E) + (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) \cdot E$,
(22) szorzás$(p_0 + p_1 \cdot E) \cdot (q_0 + q_1 \cdot E) = (p_0 \cdot q_0 - \gamma \overline{q_1} \cdot p_1) + (p_1 \cdot \overline{q_0} + q_1 \cdot p_0) \cdot E$,

teljes összhangban a (16) – (18) összefüggésekkel.

Ha $q_0 = a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k, q_1 = a_4 + a_5 \cdot i + a_6 \cdot j + a_7 \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor a $q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ oktonió egyértelműen írható fel

(23) $$a_0 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k + a_4 \cdot E + a_5 \cdot (i \cdot E) + a_6 \cdot (j \cdot E) + a_7 \cdot (k \cdot E)$$

alakban.

Bevezetve az $e_0 := 1, e_1 := i, e_2 := j, e_3 := k, e_4 := E, e_5 := i \cdot E, e_6 := j \cdot E, e_7 := k \cdot E$ jelöléseket a fentiek szerint a tetszőleges $o = q_0 + q_1 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ oktonió egyértelműen állítható elő az

(24) $$o = \sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l$$

alakban, amelyet az általánosított oktonió *valós algebrai alak*jának nevezzük. Az előállításban szereplő $\{e_l\}_{l=0}^{7}$ elemeket pedig *általánosított oktonióegységek*nek hívjuk, amelyek Cayley-féle szorzótáblája (PÉNTEK, 2020) dolgozata szerint az I. Táblázatban található.

Vegyük észre, hogy e műveleti táblázat belső részének bal felső 2×2-es mezője a $\mathbb{C}_\alpha$, bal felső 4×4-es mezője pedig a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúra egységeinek szorzótáblája.

Az általánosított oktoniók valós algebrai alakjával a következő módon számolhatunk: ha $r \in \mathbb{R}$, és $o_1 = \sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l$, $o_2 = \sum_{m=0}^{7} b_m \cdot e_m \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

(25) skalárral való szorzás: $r \cdot (\sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l) = \sum_{l=0}^{7} (r \cdot a_l) \cdot e_l$,

(26) összeadás: $\sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l + \sum_{l=0}^{7} b_l \cdot e_l = \sum_{l=0}^{7} (a_l + b_l) \cdot e_l$,

(27) szorzás: $(\sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l) \cdot (\sum_{m=0}^{7} b_m \cdot e_m) = \sum_{l,m=0}^{7} (a_l \cdot b_m) \cdot (e_l \cdot e_m)$.

Az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrájának részletes tárgyalása megtalálható (PÉNTEK, 2020) dolgozatában.

Ha $o = \sum_{l=0}^{7} a_l \cdot e_l \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor $\bar{o} := a_0 \cdot e_0 - \sum_{l=1}^{7} a_l \cdot e_l \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ elemet az o általánosított oktonió *konjugáltjá*nak, az $N(o) := o \cdot \bar{o} = \bar{o} \cdot o = a_0^2 + \alpha \cdot a_1^2 + \beta \cdot a_2^2 + \alpha \cdot \beta \cdot a_3^2 + \gamma \cdot a_4^2 + \alpha \cdot \gamma \cdot a_5^2 + \beta \cdot \gamma \cdot a_6^2 + \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot a_7^2 \in \mathbb{R}$ valós számot az o általánosított oktonió *normá*jának nevezzük. Ez az $N: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \to \mathbb{R}$ egy nem-elfajuló multiplikatív kvadratikus alak, így az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúra egy kompozícióalgebra.

5. Az általánosított oktoniók reprezentációja vektor-mátrixokkal

Először a $\gamma \in \mathbb{R}$ paraméter felhasználásával konstruáljuk meg a 2. fejezetben látott módon az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\gamma$ algebráját. Ezután az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterek segítségével építsük fel a 3. fejezetben bemutatott módon az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebráját.

A $\mathbb{C}_\gamma^3 := \{(w_1, w_2, w_3): w_l \in \mathbb{C}_\gamma (l = 1,2,3)\}$ halmazban értelmezzünk egy $t \in \mathbb{C}_\gamma$ elemmel, mint skalárral való szorzást:

(28) $$t \cdot (w_1, w_2, w_3) := (t \cdot w_1, t \cdot w_2, t \cdot w_3),$$

továbbá egy összeadást is a

(29) $$(w_1, w_2, w_3) + (z_1, z_2, z_3) := (w_1 + z_1, w_2 + z_2, w_3 + z_3)$$

összefüggéssel. A $\mathbb{C}_\gamma$ egy 2-dimenziós, a $\mathbb{C}_\gamma^3$ egy 6-dimenziós vektortér az $\mathbb{R}$ test felett. A $\gamma = 1$ esetén $\mathbb{C}_\gamma$ egy test, minden más esetben egy kommutatív, neutrális elemes gyűrű, a $\mathbb{C}_\gamma^3$ pedig egy baloldali modulus a $\mathbb{C}_\gamma$ gyűrű felett.

A (28) és (29) definíciókból következik, hogy ha $V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, akkor

(30) $$i \cdot V = i \cdot (v_1, v_2, v_3) = (i \cdot v_1, i \cdot v_2, i \cdot v_3) \in \mathbb{C}_\gamma^3,$$

és ennek felhasználásával, ha $U = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, akkor minden $W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}_\gamma^3$ elem előállítható

(31) $$W = U + i \cdot V$$

alakban. A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrára támaszkodva bevezethetünk a $\mathbb{C}_\gamma^3$ struktúrában egy skaláris szorzást: ha $W = (w_1, w_2, w_3), Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}_\gamma^3$, akkor legyen

(32) $$W \circ Z := \alpha \cdot w_1 \cdot z_1 + \beta \cdot w_2 \cdot z_2 + \alpha \cdot \beta \cdot w_3 \cdot z_3 \in \mathbb{C}_\gamma,$$

értelmezhetünk továbbá egy vektoriális szorzást is a

(33) $$W \times Z := [\beta \cdot (w_2 \cdot z_3 - w_3 \cdot z_2), \alpha \cdot (w_3 \cdot z_1 - w_1 \cdot z_3), w_1 \cdot z_2 - w_2 \cdot z_1]$$

összefüggéssel.

A $\circ: \mathbb{C}_\gamma^3 \times \mathbb{C}_\gamma^3 \to \mathbb{C}_\gamma$ skaláris szorzás egy szimmetrikus, a $\times: \mathbb{C}_\gamma^3 \times \mathbb{C}_\gamma^3 \to \mathbb{C}_\gamma^3$ vektoriális szorzás pedig egy antiszimmetrikus bilineáris leképezés a $\mathbb{C}_\gamma^3$ struktúrában.

1. Lemma. A $\mathbb{C}_\gamma^3$ struktúra $\circ$ és $\times$ műveletei az $Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ megfelelő $\circ$ és $\times$ műveleteinek természetes kiterjesztései.

2. Lemma. Ha $a + i \cdot b \in \mathbb{C}_\gamma$, $U, V, U', V' \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ és így $U + i \cdot V, U' + i \cdot V' \in \mathbb{C}_\gamma^3$, ekkor érvényesek következő azonosságok:

(a) $(a + i \cdot b) \cdot (U + i \cdot V) = (a \cdot U - \gamma \cdot b \cdot V) + i \cdot (a \cdot V + b \cdot U)$,
(b) $(U + i \cdot V) \circ (U' + i \cdot V') = [U \circ U' - \gamma \cdot (V \circ V')] + i \cdot [U \circ V' + V \circ U']$
(c) $(U + i \cdot V) \times (U' + i \cdot V') = [U \times U' - \gamma \cdot (V \times V')] + i \cdot [U \times V' + V \times U']$.

Tekintsük ezután a

(34) $$H(\mathbb{C}_\gamma) := \left\{ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : A_{11}, A_{22} \in \mathbb{C}_\gamma, A_{12}, A_{21} \in \mathbb{C}_\gamma^3 \right\}$$

alakú hipermátrixok halmazát és értelmezzünk e halmazban műveleteket a következő módon:

(35) skalárral való szorzás: ha $r \in \mathbb{R}, A \in H(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor
$$r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot A_{11} & r \cdot A_{12} \\ r \cdot A_{21} & r \cdot A_{22} \end{pmatrix} \in H(\mathbb{C}_\gamma),$$

(36) összeadás: ha $A, B \in H(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor
$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix} \in H(\mathbb{C}_\gamma),$$

(37) szorzás: ha $A, B \in H(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor
$$\begin{aligned} A * B &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \circ B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + B_{22} \cdot A_{12} - A_{21} \times B_{21} \\ B_{11} \cdot A_{21} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{12} \times B_{12} & A_{22} \cdot B_{22} + A_{21} \circ B_{12} \end{pmatrix} \\ &\in H(\mathbb{C}_\gamma). \end{aligned}$$

Legyen most

(38) $$o = (a + U) + (b + V) \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \quad \left(a, b \in \mathbb{R}, U, V \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})\right)$$

egy tetszőleges általánosított oktonió és rendeljük hozzá azt az $A \in H(\mathbb{C}_\gamma)$ hipermátrixot, amelyre

(39) $$A_{11} := a + i \cdot b, A_{22} := a - i \cdot b \in \mathbb{C}_\gamma, A_{12} := -U + i \cdot V, A_{21} = U + i \cdot V \in \mathbb{C}_\gamma^3$$

teljesül. Az ilyen speciális alakú hipermátrixok halmazát *általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok* halmazának nevezzük és $Zorn(\mathbb{C}_\gamma)$ szimbólummal jelöljük. Egyszerűen beláthatjuk, hogy ha $r \in \mathbb{R}$ és $A, B \in Zorn(\mathbb{C}_\gamma)$, akkor $r \cdot A, A + B$ és $A * B \in Zorn(\mathbb{C}_\gamma)$, vagyis az általánosított Zorn-féle vektor-mátrixok halmaza zárt ezen műveletekre nézve.

Ezután már bizonyíthatjuk dolgozatunk fő eredményét, az általánosított oktoniók reprezentációs tételét.

Tétel. Az $F: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \to Zorn(\mathbb{C}_\gamma), (a + U) + (b + V) \cdot E \mapsto \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix}$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus.

Bizonyítás. Az F hozzárendelés egy bijektív leképezés, mivel az $F^{-1}: Zorn(\mathbb{C}_\gamma) \to \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ inverz hozzárendelés is leképezés.

Ha $r \in \mathbb{R}$ és $o = (a+U) + (b+V) \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor a (19), (20) és (35) alapján

$$(40) \quad F(r \cdot o) = F(r \cdot [(a+U) + (b+V) \cdot E]) = F(r \cdot (a+U) + r \cdot (b+V) \cdot E) =$$

$$F\big((r \cdot a + r \cdot U) + (r \cdot b + r \cdot V) \cdot E\big) = \begin{pmatrix} r \cdot a + i \cdot (r \cdot b) & -r \cdot U + i \cdot (r \cdot V) \\ r \cdot U + i \cdot (r \cdot V) & r \cdot a - i \cdot (r \cdot b) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} r \cdot (a + i \cdot b) & r \cdot (-U + i \cdot V) \\ r \cdot (U + i \cdot V) & r \cdot (a - i \cdot b) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} = r \cdot F(o)$$

teljesül, így az F egy homogén leképezés.

Ha $o = (a+U) + (b+V) \cdot E, o' = (a'+U') + (b'+V') \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor a (19), (21) és (36) felhasználásával

$$(41) \qquad F(o + o') = F([(a+U) + (b+V) \cdot E] + [(a'+U') + (b'+V') \cdot E]) =$$

$$F([(a+a') + (U+U')] + [(b+b') + (V+V')] \cdot E) =$$

$$\begin{pmatrix} (a+a') + i \cdot (b+b') & -(U+U') + i \cdot (V+V') \\ (U+U') + i \cdot (V+V') & (a+a') - i \cdot (b+b') \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' + i \cdot b' & -U' + i \cdot V' \\ U' + i \cdot V' & a' - i \cdot b' \end{pmatrix} = F(o) + F(o'),$$

ezért az F egy additív leképezés. Eddig beláttuk, hogy F egy $\mathbb{R}$ vektortér-izomorfizmus.

Legyenek ezután $o = (a+U) + (b+V) \cdot E, o' = (a'+U') + (b'+V') \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ tetszőleges elemek. A (13) és (22) összefüggések felhasználásával

$$(42) \qquad o \cdot o' = [(a+U) + (b+V) \cdot E] \cdot [(a'+U') + (b'+V') \cdot E] =$$

$$\big[(a+U) \cdot (a'+U') - \gamma \cdot \overline{(b'+V')} \cdot (b+V)\big] + \big[(b+V) \cdot \overline{(a'+U')} + (b'+V') \cdot (a+U)\big] \cdot E =$$

$$[(a+U) \cdot (a'+U') - \gamma \cdot (b'-V') \cdot (b+V)] + [(b+V) \cdot (a'-U') + (b'+V') \cdot (a+U)] \cdot E =$$

$$\{[(aa' - U \circ U') + (aU' + a'U + U \times U')] - \gamma[(bb' + V \circ V') + (b'V - bV' - V' \times V)]\} +$$

$$\{[(ba' + U' \circ V) + (-bU' + a'V - V \times U')] + [(b'a - U \circ V') + (b'U + aV' + V' \times U)]\} \cdot E$$

adódik. A (42) összefüggés rendezése után nyerjük az

$$\big[\big(aa' - \gamma bb' - U \circ U' - \gamma(V \circ V')\big) + \big(aU' + a'U + \gamma bV' - \gamma b'V + U \times U' - \gamma(V \times V')\big)\big] +$$

$$[(ab' + a'b - U \circ V' + U' \circ V) + (aV' + a'V - bU' + b'U - U \times V' + U' \times V)] \cdot E$$

előállítást. Vezessük be a szögletes zárójelekben szereplő kifejezésekre rendre a következő jelöléseket:

Legyen

$$(43) \qquad \begin{aligned} a^* &:= aa' - \gamma bb' - U \circ U' - \gamma(V \circ V') \in \mathbb{R}, \\ b^* &:= ab' + a'b - U \circ V' + U' \circ V \in \mathbb{R}, \\ U^* &:= aU' + a'U + \gamma bV' - \gamma b'V + U \times U' - \gamma(V \times V') \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta}), \\ V^* &:= aV' + a'V - bU' + b'U - U \times V' + U' \times V \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta}), \end{aligned}$$

amelyek felhasználásával (42) szerint

$$(44) \qquad o \cdot o' = (a^* + U^*) + (b^* + V^*) \cdot E$$

adódik. Ekkor pedig

$$(45) \qquad F(o \cdot o') = \begin{pmatrix} a^* + i \cdot b^* & -U^* + i \cdot V^* \\ U^* + i \cdot V^* & a^* - i \cdot b^* \end{pmatrix}$$

teljesül.

A (37) összefüggés felhasználásával

(46) $$F(o) * F(o') = F\big((a + U) + (b + V) \cdot E\big) * F\big((a' + U') + (b' + V') \cdot E\big) =$$

$$\begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' + i \cdot b' & -U' + i \cdot V' \\ U' + i \cdot V' & a' - i \cdot b' \end{pmatrix}.$$

E két vektor-mátrix szorzatának bal felső komponense az 1. lemma, a 2. lemma (b) része és a (43) szerint

(47) $$(a + i \cdot b) \cdot (a' + i \cdot b') + (-U + i \cdot V) \circ (U' + i \cdot V') =$$

$$aa' + i \cdot ab' + i \cdot a'b - \gamma \cdot bb' - U \circ U' - i \cdot (U \circ V') + i \cdot (U' \circ V) - \gamma \cdot (V \circ V') =$$

$$\big(aa' - \gamma \cdot bb' - U \circ U' - \gamma \cdot (V \circ V')\big) + i \cdot (ab' + a'b - U \circ V' + U' \circ V) = a^* + i \cdot b^*.$$

Teljesen hasonlóan e két vektor-mátrix szorzatának jobb alsó komponense

(48) $$(a - i \cdot b) \cdot (a' - i \cdot b') + (U + i \cdot V) \circ (-U' + i \cdot V') =$$

$$aa' - i \cdot ab' - i \cdot a'b - \gamma \cdot bb' - U \circ U' + i \cdot (U \circ V') - i \cdot (U' \circ V) - \gamma \cdot (V \circ V') =$$

$$\big(aa' - \gamma \cdot bb' - U \circ U' - \gamma \cdot (V \circ V')\big) - i \cdot (ab' + a'b - U \circ V' + U' \circ V) = a^* - i \cdot b^*.$$

A szorzat vektor-mátrix jobb felső komponense az 1. lemma, a 2. lemma (a),(c) része és a (43) felhasználásával

(49) $$(a + i \cdot b)(-U' + i \cdot V') + (a' - i \cdot b')(-U + i \cdot V) - (U + i \cdot V) \times (U' + i \cdot V') =$$

$$-aU' + i \cdot aV' - i \cdot bU' - \gamma \cdot bV' - a'U + i \cdot a'V + i \cdot b'U + \gamma \cdot b'V - U \times U' - i \cdot (U \times V') +$$

$$+i \cdot (U' \times V) + \gamma \cdot (V \times V') = -\big(aU' + a'U + \gamma \cdot bV' - \gamma \cdot b'V + U \times U' - \gamma \cdot (V \times V')\big) +$$

$$+i \cdot (aV' + a'V - bU' + b'U - U \times V' + U' \times V) = -U^* + i \cdot V^*$$

adódik. Végül a szorzat vektor-mátrix bal alsó komponense az előzővel analóg okoskodással

(50) $$(a' + i \cdot b')(U + i \cdot V) + (a - i \cdot b)(U' + i \cdot V') + (-U + i \cdot V) \times (-U' + i \cdot V') =$$

$$a'U + i \cdot a'V + i \cdot b'U - \gamma \cdot b'V + aU' + i \cdot aV' - i \cdot bU' + \gamma \cdot bV' + U \times U' - i \cdot (U \times V') +$$

$$+i \cdot (U' \times V) - \gamma \cdot (V \times V') = \big(aU' + a'U + \gamma \cdot bV' - \gamma \cdot b'V + U \times U' - \gamma \cdot (V \times V')\big) +$$

$$+i \cdot (aV' + a'V - bU' + b'U - U \times V' + U' \times V) = U^* + i \cdot V^*$$

következik. Így (46) – (50) felhasználásával

(51) $$F(o) * F(o') = \begin{pmatrix} a^* + i \cdot b^* & -U^* + i \cdot V^* \\ U^* + i \cdot V^* & a^* - i \cdot b^* \end{pmatrix}$$

következik, amit a (45) összefüggéssel összevetve

(52) $$F(o \cdot o') = F(o) * F(o')$$

adódik, vagyis az F egy multiplikatív leképezés. Ez a fentiekkel együtt pontosan azt bizonyítja, hogy az F leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus.□

Összefoglalás

Dolgozatunkban a valós számok $\mathbb{R}$ testéből kiindulva az általánosított Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás alkalmazásával több, egymásra épülő kompozícióalgebrát konstruáltunk. Az $\mathbb{R}$ algebrából első lépésként adódó általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ kompozícióalgebrája pontosan azért kommutatív, mivel a konstrukció kiinduló algebrája maga $\mathbb{R}$. A második lépésben a $\mathbb{C}_\alpha$ algebrából nyertük az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ kompozícióalgebráját, ami éppen azért lesz asszociatív, mivel a kiinduló $\mathbb{C}_\alpha$ kompozícióalgebra kommutatív és asszociatív. Végül a harmadik lépésben a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrából kiindulva kaphattuk meg az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ kompozícióalgebráját, ami pedig pontosan azért alternáló algebra, mivel a kiinduló $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ kompozícióalgebra asszociatív (CURTIS, 1990).

A $\mathbb{C}_\alpha$ és a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ struktúrák véges dimenziós asszociatív algebrák, így eredményesen reprezentálhatók mátrixokkal, az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra viszont nem asszociatív. E struktúra reprezentálására sikeresen alkalmazhatók a vektor-mátrixok, amelyeket Zorn, M.A. vezetett be az 1930-as években a split oktoniók alternatív algebrájának leírására. Módszerét általánosítva adunk rövid bizonyítást az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ struktúra vektor-mátrixokkal történő reprezentációjának tételére.

$\cdot$	$\boldsymbol{e_0}$	$\boldsymbol{e_1}$	$\boldsymbol{e_2}$	$\boldsymbol{e_3}$	$\boldsymbol{e_4}$	$\boldsymbol{e_5}$	$\boldsymbol{e_6}$	$\boldsymbol{e_7}$
$\boldsymbol{e_0}$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$\boldsymbol{e_1}$	e_1	$-\alpha e_0$	e_3	$-\alpha e_2$	e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	αe_6
$\boldsymbol{e_2}$	e_2	$-e_3$	$-\beta e_0$	βe_1	e_6	e_7	$-\beta e_4$	$-\beta e_5$
$\boldsymbol{e_3}$	e_3	αe_2	$-\beta e_1$	$-\alpha\beta e_0$	e_7	$-\alpha e_6$	βe_5	$-\alpha\beta e_4$
$\boldsymbol{e_4}$	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-\gamma e_0$	γe_1	γe_2	γe_3
$\boldsymbol{e_5}$	e_5	αe_4	$-e_7$	αe_6	$-\gamma e_1$	$-\alpha\gamma e_0$	$-\gamma e_3$	$\alpha\gamma e_2$
$\boldsymbol{e_6}$	e_6	e_7	βe_4	$-\beta e_5$	$-\gamma e_2$	γe_3	$-\beta\gamma e_0$	$-\beta\gamma e_1$
$\boldsymbol{e_7}$	e_7	$-\alpha e_6$	βe_5	$\alpha\beta e_4$	$-\gamma e_3$	$-\alpha\gamma e_2$	$\beta\gamma e_1$	$-\alpha\beta\gamma e_0$

Táblázat: Az általánosított oktonióegységek Cayley-féle szorzótáblája

Irodalomjegyzék

[1] **Albert, A. A**., Quadratic forms permitting composition. Annals of Mathematics, vol. 43, (1942) 161-177.

[2] **Cayley, A**. (1889): On Jacobi's elliptic function, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions. The collected Mathematical Papers of Arthur Cayley 1: 127.

[3] **Curtis, M. L**. (1990): Abstract Linear Algebra. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg.

[4] **Dickson, L. E**. (1912): Linear algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 13(1) 59-73.

[5] **Dickson, L. E**. (1919): On Quaternions and Their Generalization and the History of Eight Square Theorem. Annals of Mathematics, 2nd. 20(3) 155-171.

[6] **Ebbinghaus, H.D. Hermes, H. Hirzebruch, F. Koecher, M. Mainzer, M. Mainzer, K. Neukirch, J. Prestel, A. Remmert, R.** (1991): Numbers. Springer-Verlag. New York, Berlin, Heidelberg.

[7] **Hamilton, W. R.,** On Conjugate functions, or algebraic Couples. British Association Report, Edinburg, (1834) 519-523.

[8] **Hamilton, W. R.,** On a new Species of Imaginary quantities connected with a Theory of quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 2, (1944) 424-434.

[9] **Hamilton, W. R.** (1847): On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 3, 1-16.

[10] **Kentor, I. L., Szolodovnyikov, A. Sz.** (1985): Hiperkomplex számok. Gondolat, Budapest, 1985.

[11] **Péntek, K.,** (2018): Az általánosított kvaternióalgebrák egy új felépítéséről. Dimenziók. Matematikai Közlemények. VI. 25-30. doi:10.20312/dim.2018.03

[12] **Péntek, K.,**. (2020): Az általánosított oktonióalgebrákról. Savaria Természettudományi és Sporttudományi Közlemények 18. Szombathely, 7-20.

[13] **Zorn, M. A.,** (1931): Theorie der alternativen Ringe. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer, Berlin/Heidelberg. 123-147.

[14] **Zorn, M. A.,** (1933): Alternativkörper und quadratische systeme. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. Springer Berlin/Heidelberg. 395-402.