DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
XI. kötet, 2023 77–82

doi:10.20312/dim.2023.09

Érdekes matematikai problémák modellezése számítógéppel középiskolásoknak

Sándor Zsuppán
Berzsenyi Dániel Evangélikus (Líceum) Gimnázium
zsuppans@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Ebben a rövid jegyzetben azt vizsgáljuk néhány konkrét példa alapján, hogy lehetséges-e érdeklődő középiskolás diákoknak a matematika tananyagot a középiskolás szintet meghaladó matematikai problémákkal kiegészíteni számítógépes segítséggel.

ABSTRACT. In this short note we investigate via some examples the possibility of extending the mathematics curriculum of high school pupils with interesting extracurricular mathematical problems utilizing computational modelling.

1 Bevezető

Néhány konkrét példán keresztül azt vizsgáljuk, hogy lehetséges-e a középiskolai matematika tananyagot a kerettantervi követelményeken túlmutató érdekes témákkal kiegészíteni, tovább segítve ezzel a diákok kompetenciáinak fejlesztését. Egy ilyen téma feldolgozása során figyelni kell arra, hogy a diákok már rendelkezzenek a témához minimálisan szükséges matematikai, idegen nyelvi és informatikai (újabban digitális kultúra) ismeretekkel. Egy ilyen téma feldolgozásának több szintje képzelhető el. A legegyszerűbb, hogy tanórai keretben megnézünk egy rövid videót és irányítottan megbeszéljük a tananyaghoz való kapcsolódását. A jobban érdeklődők vagy emelt szintű csoportban tanulók számára lehet nem kötelező házi feladatként adni, hogy nézzenek utána néhány kulcsszónak a megfelelő internetes forrásokban (pl. Wikipedia, Youtube stb.), saját maguk is próbálják a látottakat – esetleg célszerűen leegyszerűsítve – reprodukálni. Ennél is magasabb szinten az előző felderítő munka folytatásaként összefoglalhatják az egyéni tapasztalataikat egy kisebb lélegzetű projektmunkában. Sőt, a legmagasabb elvárható szinten továbbgondolhatják a megfigyelteket, saját kérdéseket tehetnek fel és válaszolhatnak meg önálló vagy irányított kutatómunka keretében. Mivel az ilyen kiegészítő témákban nem várható el középiskolás diákoktól a szakirodalmi szintű bizonyítások, levezetések kigondolása, ezért nagy szerepet kaphat a számítógépes modellezéssel támogatott projektmunka. Itt gondolhatunk bármelyik programra, amivel az informatika keretében a diák megismerkedik, pl. Excel, Geogebra, Python stb. Mivel a legtöbb internetes forrás idegen nyelvű (legfőképp angol), ezért az ilyen témák feldolgozása közben fejlődik a diák idegen nyelv ismerete is.

Ezen rövid jegyzetnek nem célja, hogy teljes körű módszertani javaslatokat tegyen, csak néhány példán keresztül illusztrálja a bevezetőben felvetett lehetőséget.

KULCSSZAVAK. számítógépes modellezés, matematikai problémák, középiskolások
KEYWORDS. computational modelling for secondary school pupils, mathematical problems

2 Néhány példa

Az első példa a középiskolai matematikában az utóbbi években egyre nagyobb teret nyerő statisztikával kapcsolatos és egy a mindennapi számhasználat során előforduló érdekes jelenséget ír le. Kiterjedt megfigyelések szerint bizonyos tulajdonságú, számokat tartalmazó adatsokaságban a számok legelső számjegyének eloszlása nem a nagyon gyakori egyenletes vagy normális eloszlásokat követi, hanem a Benford-törvényt, ld. [8], [11]. A jelenség feldolgozását érdemes pl. az "ARTEde" YouTube csatorna [1] rövid videójának megnézésével kezdeni (de van több jó videó is a YouTube-on), majd csak ezután folytatni a fent idézett Wikipedia cikkekkel. A diákok ezután egy rövid projekt keretében megvizsgálhatnak egy bizonyos számadat-halmazt (pl. áruházi árkatalógus mint az 1. képen) és megfigyelhetik, hogy az általuk vizsgált adatok illeszkednek-e a Benford-törvény szerinti eloszláshoz. Ehhez persze előzetesen szükség van a logaritmus ismeretére is, azaz ez a projektmunka legkorábban 11. évfolyamon végezhető el, de ekkora már a diákok megfelelő szintű felhasználói ismeretekkel rendelkeznek valamely táblázatkezelő alkalmazásban, amivel tetszetős kivitelezésben készíthetik el a projektmunkájukat. Egy ilyen projekt, annak ellenére, hogy nem túl nagy erőbefektetést igényel,

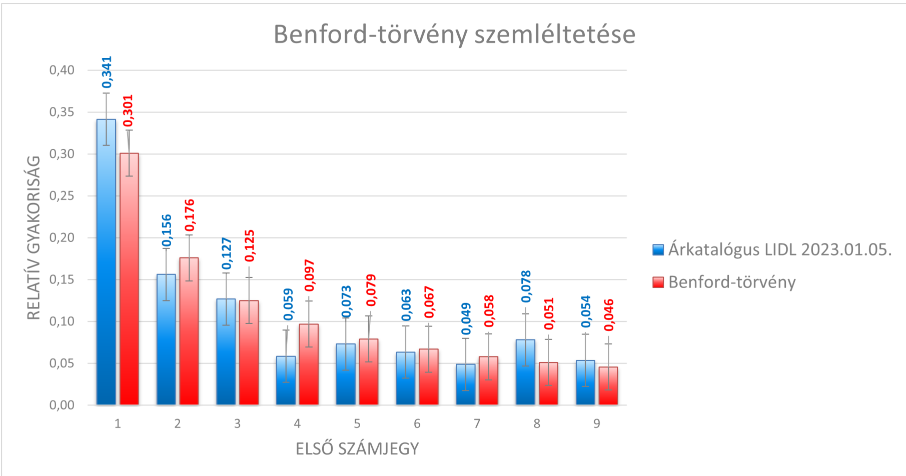

Figure 1: Benford-törvény szemléltetése

eredményével a diákok szemében jól alátámaszthatja a statisztika mindennapi alkalmazhatóságát. Sőt, ezen téma feldolgozásakor szót ejthetünk arról is, hogy vannak fontos esetek, amikor fenntartásokkal kell kezelni egy statisztikai törvényből kapott eredményt, ld. pl. [6].

A második példát is érdemes egy rövid videóval felvezetni, ami a "Numberphile" YouTube csatorna kínálatában található [4] film. Ez tulajdonképpen egy mindenki számára jól követhető feldolgozása a [3] szakcikknek, amely a kétszülős leszármazás egy egyszerű matematikai modelljét tárgyalja. Ebben kiindulunk egy adott számú egyedet tartalmazó populációból (a nulladik generáció) és egy ugyanannyi egyedet tartalmazó szülő populációból (az első generáció). Majd minden nulladik generációs egyed véletlenszerűen választ magának két szülőt az első generációból. Ezután ezt a folyamatot ismételjük tovább egyre több felmenő generációt képezve. A folyamat akkor áll le, amikor megjelenik egy olyan felmenő generáció, amelyben minden egyed vagy leszármazási kapcsolatban van (azaz őse) minden nulladik generációs egyednek vagy nincs a nulladik generációban egyetlen leszármazottja sem (ez lesz az univerzális ősök generációja). Ezen cikk fő eredményét illusztrálja a [12] weboldalon olvasható, képletektől mentes, a témát történelmi kapcsolódáson keresztül bemutató írás, sőt ehhez kapcsolható még a [5] cikk is, amely biológiai-genetikai információkkal egészíti ki a témát. Természetesen a

Wikipedia-n is találhatunk kapcsolódó cikkeket, ld. [9], [10]. Tanórai feldolgozása több szinten is lehetséges. Legegyszerűbb esetben (akár már 9. évfolyamon) használhatunk dobókockákat mint a fent hivatkozott videóban, de nem szükségszerűen 6-oldalút, hiszen kereskedelmi forgalomban elérhető 4, 10, 12 és 20 oldalú is. Páros- vagy csoportmunka keretében játékosan előállíthatunk ilyen leszármazási gráfokat, majd az eredményeket összehasonlítva megfogalmazhatunk megfigyeléseket. A közös ősök megjelenésére adott [3]-beli eredményeket azonban csak 11. évfolyamon, a logaritmus ismeretében, megfelelő statisztikai szemléletmód birtokában és a valószínűség fogalmának alaposabb megértése után érdemes feldolgozni. Ekkor már nem dobókockával érdemes a szimulációt végezni, hanem jobb azt programmal megvalósítani, egyszerűbb esetben a forráskódot a diákok rendelkezésére bocsátva, de esetleg egy tehetségesebb diák maga is megtervezheti a kódot. Kis programozási ismeret birtokában is lehet már nagyon tetszetős, mégsem triviális ábrákat-elemzéseket csinálni mint pl. a 2. és 3 képeken.

Megvizsgálható, hogy [3] cikkben az univerzális közös ősök megjelenésére vonatkozó elméleti

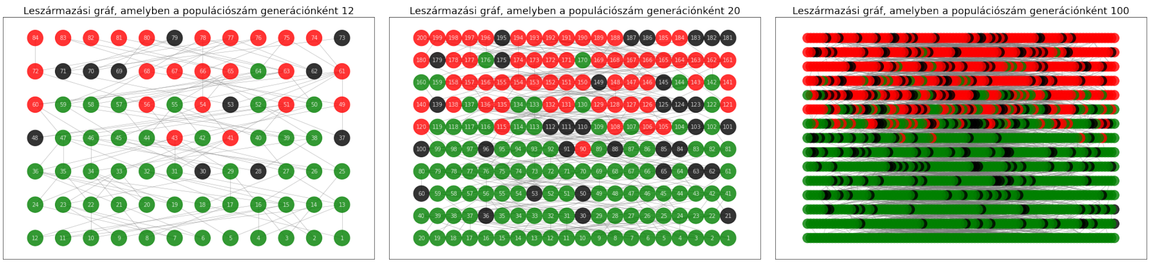

Figure 2: Leszármazási gráfok különböző méretű populációk esetén

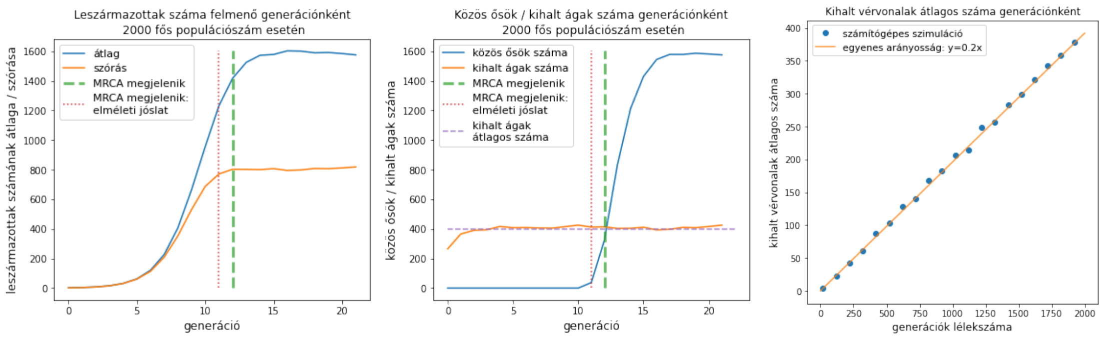

Figure 3: Univerzális közös ősökkel és kihalt vérvonalakkal kapcsolatos elemzések

jóslat hogyan egyezik a szimulációval (ld. 3. ábra balra és középen). Vagy például megfigyelhető, hogy míg a felmenő generációkban az univerzális közös ősök száma növekedik, addig a kihalt leszármazási ágak utolsó egyedeinek száma egy átlagos érték körül ingadozik (ld. 3. ábra középen). Mindenféle elméleti meggondolás nélkül számítógépes segítséggel megvizsgálható, hogy ez az átlagos érték hogyan függ a generációk egyedszámától (ld. 3. ábra jobbra). Persze létezik egy elméleti képlet is, aminek a levezetése szépen példázza a középszintű érettségin is elvárt logikai szita használhatóságát: az egy generációbeli leszármazott nélküli egyedek számának várható értéke eszerint

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \left[\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{2n} - \sum_{\ell=1}^{n-k-1} (-1)^{\ell} \binom{n-k}{\ell} \left(1 - \frac{k+\ell}{n}\right)^{2n} \right],$$

ahol n jelöli a generációk lélekszámát. (Habár ennek a képletnek a numerikus kiértékelése nagy n esetén ebben a formájában problémás.) Lehetne továbbá egy másik szimulációt programozni, amelyben a generációnkénti egyedszám változik, meg lehetne vizsgálni a teljes leszármazást megjelenítő gráf számos tulajdonságát, stb: a további vizsgálatokra inspiráló kérdések és projektötletek tárháza szinte kimeríthetetlen. Ez lehetőséget ad a diákoknak saját kutatómunkára, és nem utolsósorban esztétikus eredményt lehet produkálni belőle egy projekt végén. A témának több kapcsolódása is van a matematika kerettantervi és érettségi követelményekhez: halmazok, gráfok, valószínűség, statisztika, logaritmus; sőt mutatja a matematikai modellalkotás adta lehetőségeket más területeken.

A harmadik példa - mint az előző kettő is - az elmúlt években a középiskolai matematika tananyagban egyre hangsúlyosabb szerepet kapó valószínűségszámításhoz, továbbá még a sorozatokhoz, a statisztikához, sőt a függvényekhez is kapcsolódik. Ez a koevolúció Bak-Sneppen modellje [7], amit a megalkotói a [2] cikkben elemeztek. Ebben egy adott számú fajból álló populáció evolúcióját vizsgálják úgy, hogy minden fajhoz hozzárendelnek egy fitnesz értéket a $[0;1]$ intervallumból (jellemezve ezzel a faj életképességét), majd minden evolúciós lépésben kiválasztva a legkisebb fitnesszel rendelkező fajt és a szomszédait, azok fitnesz értékeit véletlenszerűen választott értékekkel cserélik ki. Ez ugyan az evolúció egy egyszerű modellje, de mégis sok tanulságos megfigyelést tehetünk vele: például mennyit növekedik az átlagos faji fitnesz, és ez hogyan függ az evolúciós lépések számától; hogyan csökken a faji fitnesz szórása (azaz mennyire válik homogénebbé a populáció), milyen eloszlást mutat faji élettartam az evolúcióban, stb. Ezek a vizsgálatok egyszerűen kódolhatók, lehet velük kapcsolatosan számításokat végezni, animációkat, diagramokat készíteni, sőt az eredeti modell módosítható új ötletekkel (amit a szakirodalomban persze sokan meg is tettek), emiatt kiválóan alkalmas önálló vagy csoportos projektmunkára. Erről néhány példa a 4. ábrán (van közöttük animációból kiragadott állókép is): Habár az előző példák inkább alkalmazott jellegűek voltak, számos,

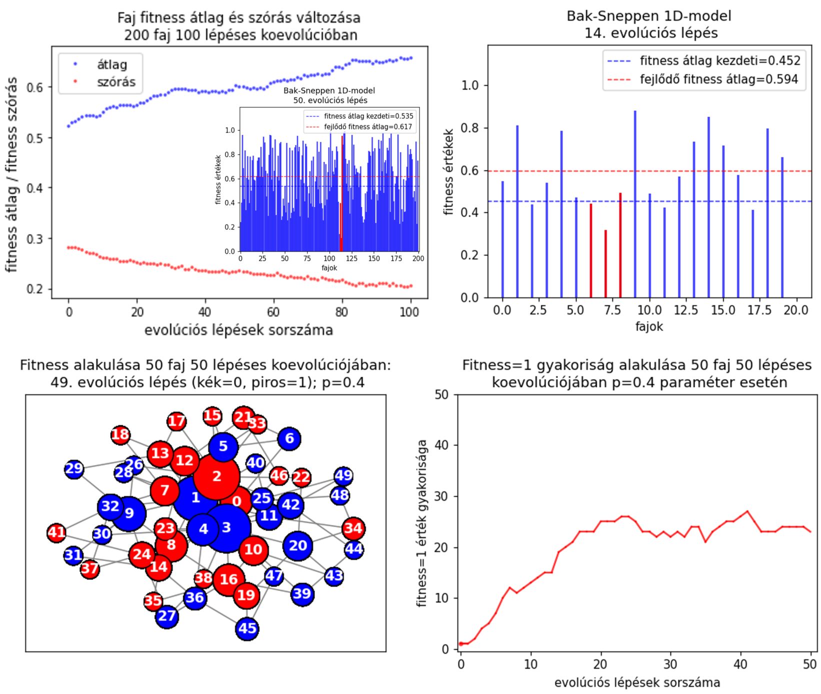

Figure 4: Bak-Sneppen modellel kapcsolatos vizsgálódások

középiskolában előkerülő elméleti matematikai ismeret ugyancsak szemléltethető egyszerűen kódolható programmal. Így feldolgozhatjuk például az RSA kódolási rendszer alapjait képekkel illusztrálva a számelméleti ismeretekhez a 11. évfolyamon mint pl. a 5. ábrákon. A 12. évfolyamon a sorozatok témakörben a kötelező számtani és mértani sorozatokon felül szóba hozható a

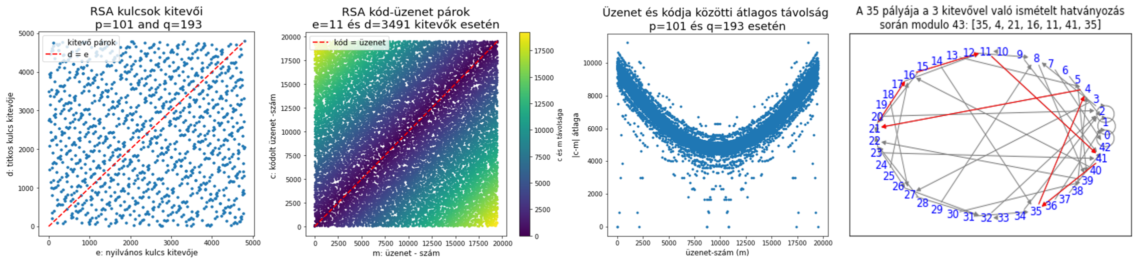

Figure 5: RSA-val kapcsolatos vizsgálódások

logisztikus sorozat viselkedése és ennek kapcsán a káoszelmélet alapjai mint pl. a 6. ábrákon. Csak felvillantásképpen néhány további kép változatos témákban a 7. ábrán: síkbeli ponthalmaz

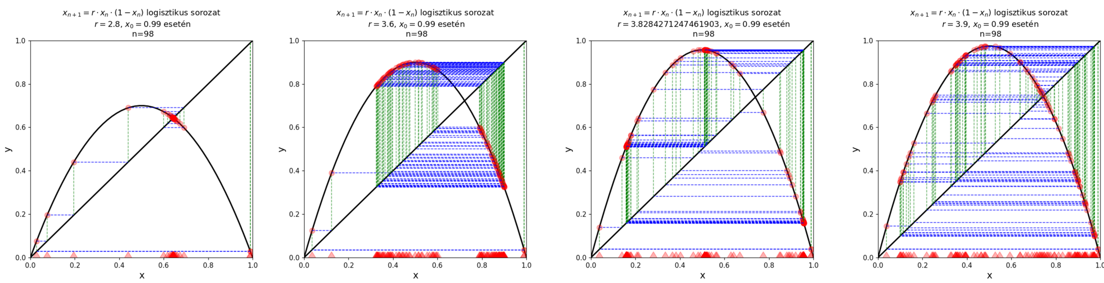

Figure 6: Logisztikus sorozat és káosz illusztráció

Voronoj-diagramja és színezése egy beépített algoritmus alapján a lehető legkevesebb színnel (4 szín elég lenne!) úgy, hogy a szomszédos csúcspontok más színűek legyenek (9. évfolyamon felezőmerőleges és gráfok témákhoz); Cantor-párosítás $]0;1[$-ről egységnégyzet belsejére (9. évfolyamon halmazok számossága témához) és egy véletlen bolyongás egy Erdős-Rényi gráfon animáció utolsó képkockája mellette a gráf csúcspontjainak és a bolyongásbeli csúcspontoknak a fokszámeloszlás összehasonlítása (sok ismeretet igénylő összetett feladat emelt szintű csoportban tanulóknak).

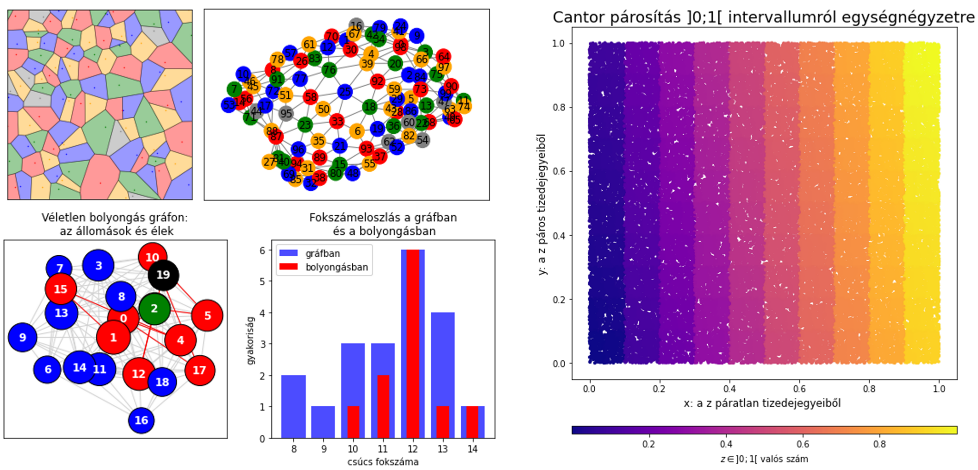

Figure 7: Illusztrációk - Voronoj diagram, gráf színezés, Cantor-párosítás, bolyongás gráfon

Összefoglalás

Ebben a jegyzetben néhány példát mutattam be, hogy lehetséges a középiskolai tananyag színesítése érdekes, modern matematikai eredményekkel, ha igénybe vesszük a számítógép adta lehetőségeket. Akár csak egy ilyen példa középiskolai feldolgozhatóságának teljes módszertani vizsgálata messze meghaladja egy ilyen írás kereteit, ezért csak ötleteket villantottam fel röviden. Ilyen témák megtalálása nem különösebben nehéz, hiszen sok ingyenes tudomány népszerűsítő oldal létezik a YouTube-on videós (pl. Veritasium, Numberphile, 3Blue1Brown, PBS Infinite Series, ARTEde-Mathewelten stb.) vagy máshol olvasható (pl. QuantaMagazine, Scientific American, Wikipedia stb.) formában. Az ebben a jegyzetben felvillantott és további nagyon érdekes témákkal a szerző is ezen internetes forrásokban találkozott először. A bemutatott képeket a Python programozási nyelv (python.org), a NumPy (numpy.org), a SciPy (scipy.org), a NetworkX (networkx.org) és a Matplotlib (matplotlib.org) felhasználásával a Jupyter Notebook (jupyter.org) környezetben készítettem.

Irodalomjegyzék

[1] **ARTEde**: *Eine Frage des Maßstabes*, YouTube, (2021). https://www.youtube.com/watch?v=-cfvaNQFozI&list=PLlQWnS27jXh-t3cHfH8oMr8R3-jMvZJn6

[2] **Bak, P. and Sneppen, K.**: *Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution*, Physical Review Letters, **71** (1993), No. 24, 4083–4086. doi: 10.1103/PhysRevLett.71.4083.

[3] **Chang, J.**: *Recent common ancestors of all present-day individuals*, Adv.Appl.Prob., **31** (1999), No. 4, 1002–1026. doi: www.jstor.org/stable/1428340.

[4] **Numberphile**: *EVERY baby is a ROYAL baby*, YouTube, (2019). https://www.youtube.com/watch?v=Fm0hOex4psA

[5] **Rutherford, A.**: *So you're related to Charlemagne? You and every other living European...*, The Guardian, (2015). https://www.theguardian.com/science/commentisfree/2015/may/24/business-genetic-ancestry-charlemagne-adam-rutherford

[6] **Timár, Á. and Pete, G.**: *Miért nem alkalmazható a Benford-törvény az amerikai választási körzetekre?*, Qubit., (2020). https://qubit.hu/2020/12/09/miert-nem-alkalmazhato-a-benford-torveny-az-amerikai-valasztasi-korzetekre

[7] **Wikipedia**: *Bak–sneppen model*, (2023 (last modified)). https://en.wikipedia.org/wiki/Bak%E2%80%93Sneppen_model

[8] **Wikipedia**: *Benford's law*, (2023 (last modified)). https://en.wikipedia.org/wiki/Benford%27s_law

[9] **Wikipedia**: *Lowest common ancestor*, (2023 (last modified)). https://en.wikipedia.org/wiki/Lowest_common_ancestor

[10] **Wikipedia**: *Most recent common ancestor*, (2023 (last modified)). https://en.wikipedia.org/wiki/Most_recent_common_ancestor

[11] **Wikipedia**: *A számok használatának gyakorisága*, (2023 (last modified)). https://hu.wikipedia.org/wiki/A_sz%C3%A1mok_haszn%C3%A1lat%C3%A1nak_gyakoris%C3%A1ga

[12] **Zimmer, C.**: *Charlemagne's DNA and Our Universal Royalty*, Nat. Geo., (2013). https://www.nationalgeographic.com/science/article/charlemagnes-dna-and-our-universal-royalty