DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
XI. kötet, 2023

doi:10.20312/dim.2023.08

Az ellipszis-rögzítés általános esete

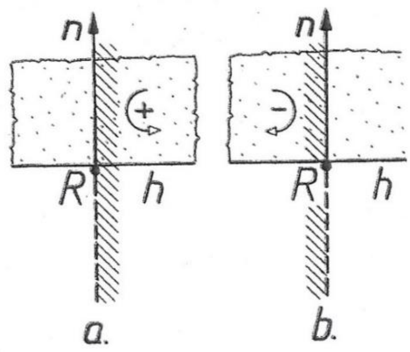
Hajdu Endre
Soproni Egyetem

ÖSSZEFOGLALÓ. A geometriai rögzítés második típusának és az ellipszis rögzítésének rövid ismertetése egy speciális esetben. A három ponttal rögzítés általános esetében a rögzítési centrum azonos a rögzítési pontok alkotta háromszög Fermat-pontjával.

ABSTRACT. It is a short presentation of the second kind of geometric fixing and fixing the ellipse in a special case. Applying the three point fixing in the general case, the centre of fixing is the Fermat-point of the triangle formed by the three fixing points.

1. Bevezetés, alapdefiníciók

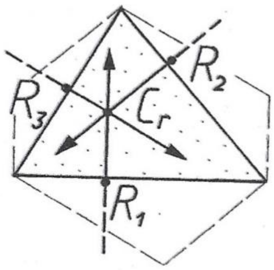
Ez a dolgozat a szerző korábbi [1] írásához csatlakozik, mely a rögzítés-geometria alapfogalmainak ismertetése után, az ellipszislemez másodfajú rögzítésének egy különleges lehetőségét tárgyalja. A témakör irodalmának szűkössége miatt indokoltnak tűnik az előző dolgozatban ismertetettek rövid felidézése; az alakzatok mozgathatóságának kizárása, azaz rögzítése, fixnek tekintett pontokból álló rögzítő pontrendszerrel is lehetséges. Ha az alakzatnak csak eltolásait zárja ki a rögzítő pontrendszer, elsőfajú rögzítésről beszélünk, ha az alakzat elforgatásait zárja ki, akkor másodfajúnak mondjuk a rögzítést, mely esetleg kizárja az alakzat eltolásait is. Mindkét fajta rögzítésmód esetében legalább annyi pontból kell állnia a rögzítő rendszernek, amennyi elegendő a mozgásfajta kizárásához. Másodfajú rögzítés esetén egy síkalakzat, pl. egy sokszöglemeznek az elforgatását már egyetlen rögzítő pont korlátozza; a lemez *h* határ egyenesén (szakaszán) elhelyezett *R* rögzítő pont kizárja mindazokat a pozitív irányú elforgatásokat a síkban, melyek centruma az *n* támasz egyenestől jobbra vannak (1. ábra).



1. ábra

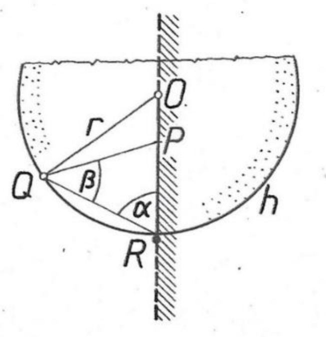
Az *n* határ egyenesű félsík pontjai alkotják a pozitív forgásirányú elforgatásokból kizárt centrumok tartományát. A határvonal szaggatott vonallal rajzolt félegyenese nem tartozik a kizárt centrumtartományhoz. A támasz egyenesre tükrözve a pozitív kizárt centrumtartományt, jutunk a negatív kizárt centrumtartományhoz, melynek pontjai körül a negatív irányú elforgatások vannak kizárva. Megmutatható, hogy például egy háromszög-lemez (2. ábra) másodfajú rögzítéséhez legalább három rögzítő pont szükséges, s az eredményes rögzítés feltételei a következők:

I. A támasz egyeneseknek egy (esetleg ideális) pontban kell metsződniük.
II. Az irányított támasz egyenesek páronkénti hajlászögeinek összege 360°.
III. A támasz egyenesek közös C_r pontjának, a rögzítés centrumának, legalább egy + és egy – előjelű kizárt centrumtartományhoz kell tartoznia.



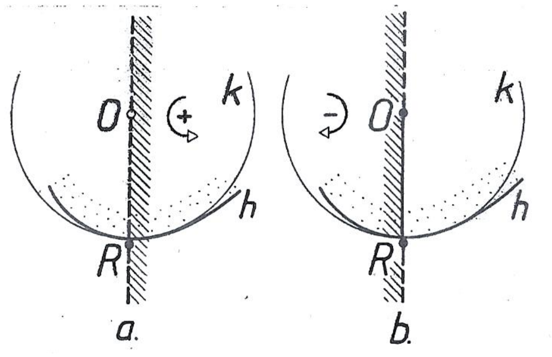
2. ábra

Az olyan rögzítő rendszert, melynek nincs fölösleges (elhagyható) pontja, nevezik primitív rögzítő rendszernek. A háromszög-lemeznek a hárompontos, (centrális) rögzítésen kívül van négypontos primitív rögzítő rendszere is. Az olyan konvex lemezek esetében, melyek pereme (határvonala) nem sokszög, a rögzítés elve azonos a föntebb látottal, vagyis: ki kell zárni az elforgatási középpontokat, a forgáscentrumokat. A kizárt centrumtartományok az ilyen esetekben is félsíkok, de nem azonosak az egyenes peremű lemezek esetére érvényes félsíkokkal, azaz centrumtartományokkal. Ha a lemez *R* rögzítő pontjának környezetében a határvonal *O* középpontú körív (3. ábra), akkor a lemez *P* pontja körül a lemez nem forgatható el úgy, hogy *PQ* szakasz *Q* pontja az *R* „fölé” kerüljön, mivel $\beta < \alpha$ miatt a *PQR* háromszögben az *R* csúccsal szemben lévő oldal nagyobb, mint a *Q*-val szemben lévő. Ennek alapján: ha a peremnek a rögzítő ponttal szomszédos pontját támasztási pontnak nevezzük, akkor az *O* - tól a támasztási pontig terjedő szakasz pontjai *O* kivételével kizárt centrumok; az ábrán sraffozás jelzi, hogy a + forgásirány szempontjából az *OP* egyenes által határolt (jobbra eső) félsík a kizárt centrumtartomány, melyhez nem tartozik egy *O* kezdőpontú és egy *R* kezdőpontú félegyenes.



3. ábra

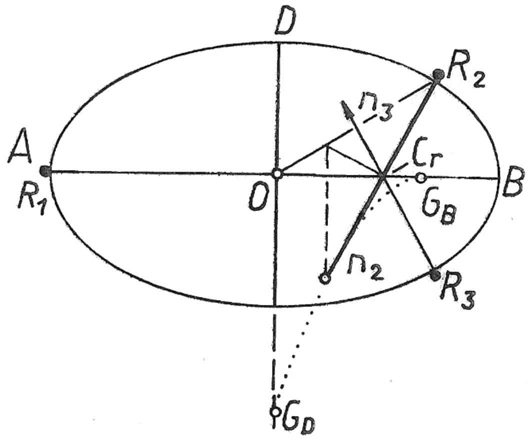
Ha a perem simulóköre a rögzítő pont környezetében átmetszi a peremet (4.a ábra), akkor az *O*-tól *R*-ig terjedő szakasz pontjai nem tartoznak a + kizárt centrumtartományhoz. A 4.b ábra a negatív kizárt centrumtartományt szemlélteti, mely esetben az említett *OR* szakasz a kizárt negatív centrumtartomány pontjaiból áll.



4. ábra

2. Ellipszis rögzítése

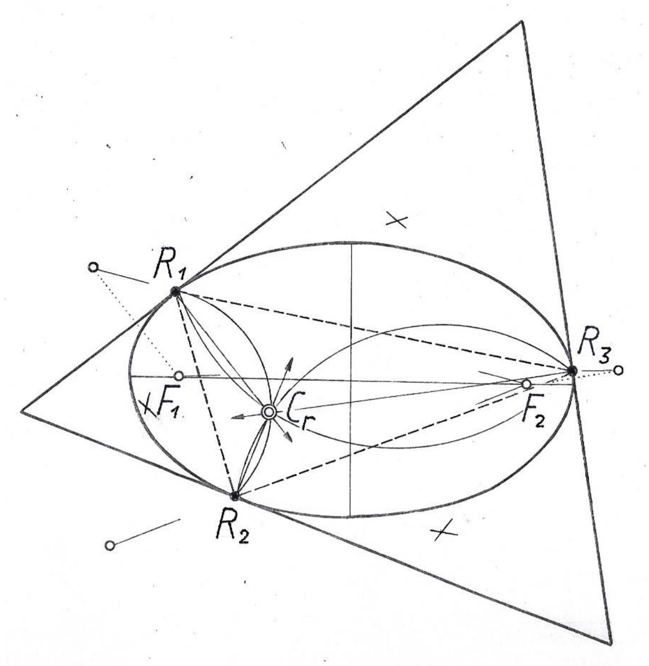
A részben vagy egészében görbe peremű lemezek hárompontos rögzítésével is foglalkozó [1]-ben, az ellipszist rögzítő egyik pont a görbe nagytengelyének végpontja (5. ábra), s a C_r rögzítési centrum is az említett tengelyen van.



5. ábra

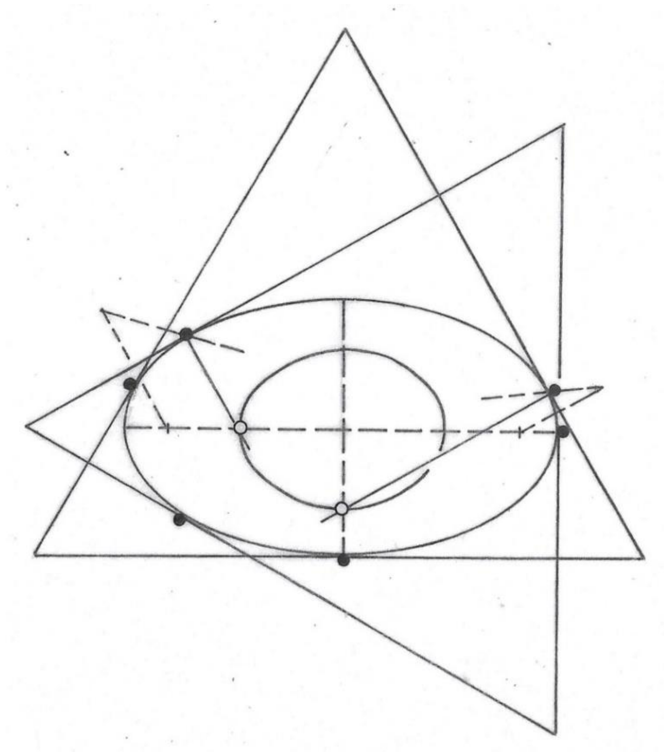
Abban az esetben nem jelentett problémát a további két rögzítő pont kijelölése, vagyis a megfelelő ellipszis-normálisok megszerkesztése; azonban az ellipszis valamely tetszőleges belső pontja nem tekinthető rögzítési centrumnak. Van lehetőség ennek a nehézségnek megkerülésére. Az ellipszis köré írt szabályos érintő háromszögek szerkesztése során a háromszög-oldalak és az ellipszis érintkezési pontjaihoz tartozó normálisok egy pontban metszik egymást (6. ábra); ennél fogva mivel a normálisok páronként 120°-ot zárnak be egymással, a normálisok közös pontja az érintéspontok alkotta háromszögnek Fermat-pontja.

Ahhoz, hogy a normálisok közös pontja C_r pont, be kell látni, hogy teljesülnek a másodfajú rögzítés feltételei. Az I. feltétel azért teljesül, mert az R_1 és az R_2 rögzítő pontokhoz tartozó támasz-normálisok egymással bezárt szögéről tudjuk, hogy az 120°, tehát a két egyenes metszéspontja rajta van egy ekkora látószöghöz tartozó látóköríven. Az R_2 és R_3 majd az R_3 és R_1 egyenespárok metszéspontjai ugyancsak egy-egy látókörön keresendők, ezért a szerkesztés annak a háromszögnek a Fermat-pontját eredményezi, melynek csúcsai az ellipszis köré írt szabályos háromszög érintés-pontjai, vagyis a rögzítő pontok. A II. feltétel ugyancsak teljesül, mert a támasz-normálisok a szabályos érintő háromszög oldalaira merőlegesek, ennél fogva a szögfeltétel biztosítva van. Mivel – például – R_1 és R_2 az ellipszis nagytengelyének különböző oldalára esnek, a görbületi viszonyokat figyelembe véve és a 4. ábrával kapcsolatos megállapítások alapján a C_r rögzítési centrum az R_1 + előjelű kizárt centrumtartományba esik, míg R_2 az ellenkező előjelűbe, és minden szabályos érintő háromszög esetében található a nagytengely különböző oldalán lévő rögzítő pontpár, ezért a III. rögzítési feltétel is teljesül.



6. ábra

Megemlítendő, hogy az ellipszist érintő szabályos háromszögek egy adott ellipszis esetében is különböző méretűek, a különböző körülírt szabályos érintő háromszögekhez tartozó C_r pontok egy másik ellipszist alkotnak, melynek tengely-végpontjai a 7. ábrán látható szerkesztéssel nyerhetők.



7. ábra

Irodalomjegyzék

[1] **Hajdu Endre.**: Ellipszislemezek másodfajú rögzítése, (2023).
https://www.galgoczi.net/HE_anyagok/ELLIPSZISLEMEZ%20%20MASODFAJU%20%20ROGZITESE.pdf

[2] **Czédli G.** – **Szendrei Á.**: Geometriai szerkeszthetőség. Polygon, 1997.

[3] **Tomor B.**: Konvex alakzatok egy rögzítési problémája. Matematikai lapok (1963).

[4] **Hajdu E.**: Konvex sokszöglemezek elsőfajú rögzítése. Dimenziók X. (2022), 81–86.
doi:10.20312/dim.2022.08