DR. VÉRTES GYÖRGY, a műszaki tudományok kandidátusa

LEMEZVÁZAS MAGASHÁZAK VÍZSZINTES IRÁNYÚ ÖNREZGÉSSZÁMÁNAK MEGHATÁROZÁSA

1. Bevezetés

A lemezvázas házaknál a födémterheket oszlopok vagy hagyományos téglafalak helyett függőleges síkú vasbeton lemezek viselik. Az ilyen rendszerrel épült magasházak szerkezeti, de főleg építéstechnológiai szempontból mért gazdaságosságuk miatt az utóbbi évtizedben igen elterjedtek. A lemezvázas szerkezetek statikai és szilárdságtani vizsgálatával kapcsolatos problémák közül még sok olyan van, ami tisztázásra szorul, és nem túlzás azt mondani, hogy az elméleti kutatás a gyakorlat igényeitől ezen a téren el van maradva. Méginkább mondhatjuk ezt az egyre gyakrabban felmerülő dinamikus jellegű feladatokkal kapcsolatban, mert ezek között is nagyon sok olyat találunk amely vagy egyáltalán nincs megoldva, vagy amelynél a rendelkezésünkre álló megoldás sok szempontból nem kielégítő. Ilyen feladat a lemezvázas magasházak vízszintes irányú önrezgésszámának meghatározása is. A szerkezet ugyanis legtöbbször olyan kialakítású, hogy a teherhordó lemezfalak nem szimmetrikusak és ez rezgéstani szempontból azt eredményezi, hogy az épület tisztán csak hajlítójellegű, vagy tisztán csak csavarójellegű rezgéseket nem képes végezni.

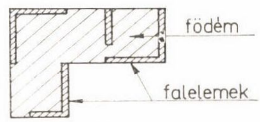
Egyszerű gerendatartónál, amennyiben a keresztmetszet nem szimmetrikus és súlypontja nem esik egybe a nyírási középponttal, a szabad rezgésforma egyidejű hajlító és csavaró rezgésből tevődik össze. Az ilyen jellegű rezgést „kapcsolt” rezgésnek nevezzük. Gerendatartó „kapcsolt” rezgése három szimultán negyedrendű parciális differenciálegyenletből álló egyenletrendszerrel jellemezhető ([1], [4], [11]), melynek megoldása egyszerű tartótípusok esetén is igen bonyolult.

Vizsgálva a lemezvázas házak vízszintes irányú szabad rezgéseit, könnyen belátható, hogy ugyancsak „kapcsolt” rezgésekkel állunk szemben, amelyek ugyan hasonlóak a gerendatartó említett rezgéseihez, de a szerkezet eltérő jellege miatt ugyanazon az alapon nem tárgyalhatók. Szerkezeti szempontból a legdöntőbb különbség a kettő között az, hogy amíg a gerendatartó keresztmetszetének minden pontja a Bernoulli-Navier hipotézisre épült elmélet értelmében csak adott geometriai feltételeknek megfelelő és a szomszédos pontokból nem függetleníthető mozgást képes végezni, addig a lemezvázat alkotó teherviselő falak, amelyek legtöbbször egymáshoz képest ferde síkú elemek összkapcsolódásával lettek kialakítva bizonyos mozgást csak egymástól függően, de bizonyos mozgást egymástól függetlenül is végezhetnek. Mindezekből kitűnik, hogy igen bonyolult rezgőrendszerrel állunk szemben, és ennek következtében az eddig használt módszerek ilyen jellegű feladatok megoldására nem megfelelőek.

Az alábbiakban a lemezvázas magasházak vízszintes irányú önrezgésszámának meghatározására olyan számítási eljárást mutatunk be, amely bizonyos egyszerűsítő feltevések teljesítése esetén az említett épületekre vonatkozó általános esetekben is alkalmazható.

1.1. *A számítás alapelvei és a felvett modell*

A vizsgálat tárgyát képező épület szerkezete vízszintes födémekből és az ezek között elhelyezkedő teherviselésre alkalmas módon kialakított függőleges falakból áll. Az ilyen épület sematikus keresztmetszetét az *1. ábra* tünteti fel. A szilárdságtani szempontból kellően egymáshoz rögzített, egymással



1 ábra

ferde szöget bezáró falak egyetlen falelemet képeznek, de amennyiben ilyen kapcsolat nincs, akkor minden egyes fal külön elemnek tekintendő.

Számításaink során az alábbi feltevésekkel élünk:

a) Rezgés közben a teherviselő falak rugalmasan viselkednek.

b) Az egyes emeletekhez tartozó szerkezet tömegét, beleértve a födém, a falak és egyéb tartozékok tömegét, az illető emelethez tartozó födémszinten vesszük fel, de magára a tömegeloszlásra megkötést nem teszünk.

c) A csillapításnak az önrezgésszám megváltozására gyakorolt hatását elhanyagoljuk.

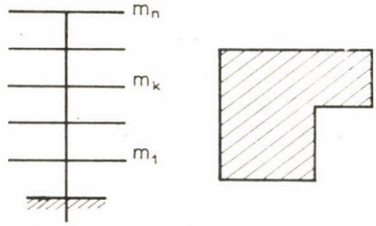
d) Az egyes födémek saját síkjukban egy-egy végtelen merevnek tekinthető tárcsát alkotnak, síkjukra merőleges irányban viszont tökéletesen hajlékonyak. Ez azt jelenti, hogy valamennyi falelem a födémek síkjában csak azonos eltolódásra és elfordulásra kényszerül, erre merőleges irányban azonban egymástól függetlenül is végezhetnek alakváltozásokat.

Ez a feltétel a valóságban igen jól teljesül és megfelel az eddigi számítási gyakorlatnak is. Ugyanis könnyen érzékelhető, hogy a födémek síkjukra merőleges irányban hajlító nyomatékokkal szemben lényegesen kisebb ellenállás kifejtésére képesek, mint a falelemek saját síkjukban, mivel előgyártott födémelemeknél rendszerint nem képeznek ki a támaszok felett hajlítónyomaték felvételére alkalmas kapcsolatot, monolit födémszerkezetnél pedig a lemezvázas szerkezetnek megfelelő építési technológia szerint, síkjára merőlegesen elhanyagolható hajlítási merevségű nem túlságosan vastag vasbeton lemezt készítenek.

e) A falelemek alaprajzi elrendezése és vastagsága teljesen tetszőleges, de az épület valamennyi szintjén azonos. Az egyes szintek között egymás felett levő falelemek együttdolgozása önmagukkal, illetve az alaptesttel, a csatlakozásoknál kialakított merev kapcsolatok révén biztosítva van. Tehát az egymás felett levő falelemek együttesen függőleges konzolokat alkotnak.

f) Az alakváltozások számításánál az egyes falelemek csavarási merevsége a hajlítási merevséghez képest igen csekély, ezért figyelmen kívül hagyható.

A mennyiben az egyes falelemek nyitott keresztmetszetűek, csavarási merevségük valóban igen csekély a hajlítási merevséghez képest, ezért a feltevés teljesen indokolt. Zárt (szekrény) keresztmetszet esetén a falelem csavarási merevsége jelentős lehet, ezért ennek elhanyagolása az eredményekre is nagyobb hatással van, de ilyen kialakítású falelem a gyakorlatban csak igen ritkán fordul elő. Megjegyezzük, hogy zárt keresztmetszet csavarási merev-



2 ábra

ségének figyelembevétele a soron következő elvi megoldás szempontjából nem okoz változást, csupán az egyenletekben szereplő egyes tényezők számításánál okoz többletmunkát.

Ezek után a számítás alapját képező modellt a *2. ábra* tünteti fel. Keresztmetszetként — amelyet úgy kapunk, hogy a vizsgált épületet közvetlen valamelyik födém felett vízszintes síkkal elmetszük — csupán a síkjában merev tárcsának tekinthető födémet ábrázoltuk az alátámasztó falelemek berajzolása nélkül. Az ilyen metszetet a továbbiakban az épület *keresztmetszetének*, vagy *épületkeresztmetszetnek* fogjuk nevezni. Az épület keresztmetszete a közönséges hajlított tartók keresztmetszetétől lényegesen különbözik, és így a szokásos keresztmetszeti jellemzőket is ennek megfelelően értelmezni kell. A továbbiakban *az épületkeresztmetszet elfordulási középpontjának* (0) nevezzük.

Az elfordulási középponton átmenő vízszintes irányú erő hatására tehát a födém csak síkjában tolódik el, azonban az eltolódás iránya általában nem egyezik meg az erő irányával. Amint a továbbiakban látni fogjuk a végtelen sok irány között van egymásra merőleges két olyan irány, amelyben hatóerő csak erő-irányú eltolódást okoz és ezeket *főirányoknak* fogjuk nevezni.

A képletekben és levezetésekben használt fontosabb jelölések a következők:

P	— a falelem keresztmetszeti területe
J_1, J_2	— a falelem keresztmetszetének főtehetetlenségi nyomatékai
E	— rugalmassági modulus
s	— a falelem gyengítésének figyelembe vételére szolgáló tényező
S	— keresztmetszeti síkidom súlypontja
S_M	— tömegsúlypont
O	— nyírási vagy elfordulási középpont

$p_{xx}, p_{yy}, p_{xy} = p_{yz}$ — a falelem merevségi tényezői

$A = \sum_{i=1}^{m} p_{ixx}$; $B = \sum_{i=1}^{m} p_{iyy}$; $C = \sum_{i=1}^{m} p_{ixy} = \sum_{i=1}^{m} p_{iyx}$

$K \quad = AB - C^2$

x, y — koordináta-rendszer a födémek síkjában

z — a födémek síkjára merőleges koordináta tengely

u, v — az épületkeresztmetszet főirányainak megfelelő koordinátarendszer, illetve ezen tengelyek menti eltolódás mértéke

u_M, v_M — a tömegsúlypont koordinátái u, v tengelyrendszerben

Φ — épületkeresztmetszet elfordulási középpont körüli elfordulásának a mértéke

E_h — helyzeti energia

E_m — mozgási energia

J_0 — épületkeresztmetszet tömegtehetetlenségi nyomatéka az O elfordulási középponton átmenő és a födém síkjára merőleges tengelyre

M_i — épületkeresztmetszet egységnyi elfordulását előidéző forgatónyomaték számértéke

m_i — födém emeleti szinten koncentrált tömege

p_u, p_v — főirányokban működő egységnyi eltolódást okozó erő számértéke.

2. A keresztmetszeti jellemzők meghatározása

Az épületkeresztmetszet előzőkben definiált súlypontjának, illetve tömegsúlypontjának meghatározása a síkidomok, illetve a tömegpontok közismert súlypontszámítási módszere alapján történik. Új fogalmak a főirányok és az elfordulási középpont, melyek a keresztmetszet merevségének függvényei, és az egyes falelemeknek, mint egyik végükön mereven befogott konzoloknak merevségével vannak összefüggésben. A továbbiakban először ezek meghatározásával foglalkozunk.

2.1 A falelemek merevségi tényezőinek meghatározása

A szilárdságtanból ismeretes, hogy összefüggő gerendakeresztmetszetnél minden esetben található egy olyan pont, amelyre az jellemző, hogy a ponton átmenő és a keresztmetszet síkjával párhuzamos erő hatására a keresztmetszet csak eltolódást végez, és csavarónyomat működése esetén, a keresztmetszet e körül a pont körül fordul el. Magát a pontot *nyírási* vagy *csavarási* középpontnak nevezik. Ez a jellegzetes pont, minden esetben a keresztmetszet szimmetriatengelyén fekszik, tehát kétszeresen szimmetrikus esetben egybeesik a súlyponttal, de általános esetben is meghatározható [9].

A gerendakeresztmetszet tehetetlenségi főirányai megegyező tulajdonságúak az épületkeresztmetszet főirányaival abban a vonatkozásban, hogy amennyiben a külső erő ezek valamelyikével párhuzamos, akkor a keresztmetszet eltolódása is párhuzamos lesz az erő irányával. Mivel a keresztmetszet tehetetlenségi főirányai (1, 2) és főtehetetlenségi nyomatékai (J_1, J_2) a szilárdságtanból jól ismert összefüggések alapján könnyen meghatározhatók [7], a továbbiakban ezeket ismerteknek fogjuk tekinteni.

Az egyes falelemek merevségi tényezőinek kiszámítása az irodalomból ([7], [9]) ugyancsak ismert és ezért csak röviden tárgyaljuk.

Ahhoz, hogy az egyik végén mereven befogott homogén, prizmatikus és a Hooke-törvényt követő anyagú rúd befogástól z távolságban levő „i"-vel jelölt keresztmetszetét az 1., illetve 2. főiránnyal párhuzamosan Δ_1, illetve Δ_2 mértékben kimozdítsuk, a befogástól c ($c \geqq z$) távolságban levő „k"-val jelölt keresztmetszetben a megfelelő eltolódásokkal párhuzamosan a keresztmetszet nyírási középpontjában P_1, illetőleg P_2 erőket kell működtetni. Az erők nagysága az elemi szilárdságtanból jól ismert összefüggés szerint

$$P_1 = \frac{J_2}{H} \Delta_{1ik} \tag{1}$$

illetőleg

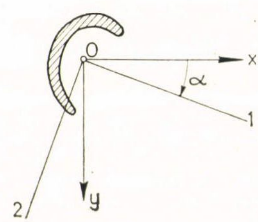
$$P_2 = \frac{J_1}{H} \Delta_{2ik} \tag{2}$$

A képletekben

$$H = \frac{s}{E} \left(c \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right)$$

értékkel egyenlő, ahol E a rúd anyagának rugalmassági modulusa, s pedig a falakban levő nyílások (ajtó, ablak) hatását kifejező tényező, melynek meghatározására az 5 fejezetben még visszatérünk.

Ezek után vegyünk fel egy, a befogástól ugyancsak z távolságra egy xy tengelyekből álló koordináta-rendszert, és határozzuk meg, a keresztmetszet nyírási középpontjának x tengely irányú egységnyi eltolódásához milyen külső erőt kell működtetni, a „k" keresztmetszetben. Amennyiben az x tengely nem főirány, az eltolódást előidéző erő nem párhuzamos magával az x tengellyel, hanem p_{xx}, illetve p_{xy} x illetve y irányú komponensekkel jelle-



3 ábra

mezhető, amelyeket az alábbiak szerint lehet kiszámítani. Az említett x tengely irányú és az 1. főiránnyal α szöget bezáró egységnyi eltolódás 1., illetőleg 2. főirányba eső komponense — amint az a *3. ábrából* is kitűnik — 1. cos α, illetőleg —1. sin α nagyságú. Ezek létrehozásához az (1), (2) képletek alapján

$$Q_1 = \frac{J_2}{H} \cos \alpha \tag{3}$$

illetőleg

$$Q_2 = -\frac{J_1}{H} \sin \alpha \tag{4}$$

1. illetőleg 2. tengely irányában működő erőkre van szükség. A keresett p_{xx}, illetőleg p_{xy} erőkomponenseket ezek x, illetőleg y irányú vetületösszege adja meg, tehát

$$p_{xx} = Q_1 \cos \alpha - Q_2 \sin \alpha = \frac{1}{H} (J_1 \sin^2 \alpha + J_2 \cos^2 \alpha) \tag{5}$$

$$P_{xy} = Q_1 \sin \alpha + Q_2 \cos \alpha = - \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{J_1 - J_2}{H} \right). \tag{6}$$

A vizsgált keresztmetszet y irányú egységnyi eltolódásához az y tengely irányában p_{yy} és az x tengely irányában p_{yx} erőket kell működtetni. Ezek meghatározása a fentiekhez teljesen hasonló módon történik és a következő eredményre vezet:

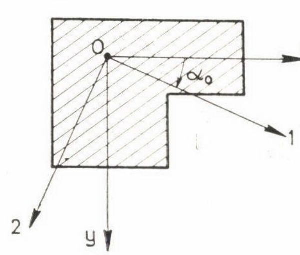
$$p_{yy} = \frac{1}{H} (J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \sin^2 \alpha) \tag{7}$$

$$p_{yz} = -\frac{1}{H} \cos \alpha \sin \alpha (J_1 - J_2) = p_{xy} \tag{8}$$

Az így meghatározott p_{xx}, p_{yy} és $p_{xy} = p_{yx}$ mennyiségeket a továbbiakban *a falelem merevségi tényezőinek* fogjuk nevezni.

2.2 *Az épületkeresztmetszet főirányainak, elfordulási középpontjának és az egységnyi elmozdulásait előidéző dinámoknak a meghatározása*

Az épületkeresztmetszet főirányait abból a feltételből tudjuk meghatározni, hogy az elfordulási középponton átmenő és a főiránnyal párhuzamos erő okozta eltolódás ugyancsak párhuzamos lesz az erő irányával. Ha fordítva is érvényes, mégpedig úgy, hogy a főirányba eső eltolódás hatására keletkező



4 ábra

úgynevezett visszatérítő erő hatásvonala szintén a főirányba esik. A *4. ábrán* sematikusan feltüntetett épületkeresztmetszet egyelőre ismeretlen elfordulási középpontjában felvettünk egy tetszőleges xy tengelyekből álló koordinátarendszert, és a főirány z tengellyel bezárt szögét α_0-val jelöltük. Ezek után toljuk el az „m" számú falelemmel megtámasztott keresztmetszetet a főirány mentén Δ mértékkel. Az eltoláshoz szükséges erő (R) hatásvonala a fentiek szerint szintén a főirányba esik. A Δ eltolódás x, illetve y tengely irányú komponensei $\Delta \cos \alpha_0$, illetve $\Delta \sin \alpha_0$ és ezen eltolódások előidézéséhez szükséges erők megegyeznek R-nek a megfelelő tengely irányú komponenseivel. Az eltolódáskomponensek előidézéséhez szükséges erők és R megfelelő összetevői között pedig az egyes falelemek merevségi tényezőinek segítségével az alábbi összefüggések írhatók fel:

$$\left.\begin{aligned} \Delta \cos \alpha_0 \sum_{i=1}^{m} p_{ixx} + \Delta \sin \alpha_0 \sum_{i=1}^{m} p_{ixy} &= R \cos \alpha_0 \\ \Delta \sin \alpha_0\, p_{iyy} + \Delta \cos \alpha \sum p_{ixy} &= R \sin \alpha_0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Az egyenletekben p_{ixx}, p_{iyy} és $p_{ixy} = p_{iyx}$ az „i"-edik jelű falelem merevségi tényezőit jelentik, az összegezés pedig valamennyi (m) falelemre terjed ki.

Bevezetve az

$$A = \sum_{i=l}^{m} p_{ixx};\ D = \sum_{i=l}^{m} p_{iyy};\ C = \sum_{i=l}^{m} p_{ixy}$$

jelöléseket és az egyenletrendszert megoldva kapjuk:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\,\alpha_0 = \frac{2C}{A - B}}\,. \tag{10}$$

A kapott összefüggésből a hasonló felépítésű feladatokkal egyezőleg kitűnik, hogy α_0-ra két megoldást is kapunk. Ha ugyanis egy α_0' kielégíti az egyenletet, úgy meg fog felelni az $\alpha_0'' = \alpha_0' + \frac{\pi}{2}$ szög is, mert $\operatorname{tg} 2\,\alpha_0'' = \operatorname{tg}(2\alpha_0' + \pi) = \operatorname{tg} 2\,\alpha_0'$. Ez azt jelenti, hogy *egymásra merőlegesen két olyan irányt találunk, amelyekre nézve érvényes a főirány meghatározása, és ezzel egyszersmind bebizonyítottuk a főirányok létezését is.*

Amint látható, α_0 képletében nem szerepel a vizsgált keresztmetszet befogástól mért távolsága, tehát a (10) összefüggés egyaránt használható az épület valamennyi emeletén vizsgált keresztmetszetére.

A későbbiek folyamán szükség lesz még a főirányban történő egységnyi eltolódást előidéző erőre is, ezért a következőkben ennek meghatározásával foglalkozunk. Jelöljük az x tengellyel α_0 szöget bezáró főirányban a $\Delta = 1$ nagyságú eltolódást okozó erőt p-vel. Ennek megfelelően a (9) alatti egyenletek következő formában írhatók fel:

$$\left.\begin{aligned} A \cos \alpha_0 + C \sin \alpha_0 &= p \cos \alpha_0 \\ B \sin \alpha_0 + C \cos \alpha_0 &= p \sin \alpha_0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Az egyenletredszer részletes megoldását nem közöljük, mivel ez is alakilag hasonló a főfeszültségek meghatározására szolgáló egyenletrendszerhez és így az irodalomból jól ismert. Végeredményként:

$$p = \frac{A + B}{2} + \sqrt{\left(\frac{A - B}{2}\right)^2 + C^2} \tag{12}$$

A kapott összefüggés a négyzetgyök kettős előjelének figyelembe vételével, a két főiránynak megfelelően, két értéket ad. A nagyobbik (továbbiakban p_u) úgy kapható, hogy a négyzetgyök pozitív értékét vesszük számításba, a kisebbik (továbbiakban p_v) pedig a negatív előjel alkalmazásával nyerhető. Tehát a 4. ábra jelölései szerint a főirányokban egységnyi eltolódást előidéző erők a következőképpen számíthatók:

$$\boxed{\begin{aligned} p_u &= \frac{A+B}{2} + \left[\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 + C^2\right]^{1/2} \\ p_v &= \frac{A+B}{2} - \left[\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 + C^2\right]^{1/2} \end{aligned}} \tag{13}$$

Ezek után az épületkeresztmetszet elfordulási középpontjának meghatározását fogjuk vizsgálni [7] és [9] szerint. Ennek érdekében tételezzük fel, hogy valamely a befogástól z távolságban levő födémre a *4. ábrán* felvett z tengelylyel párhuzamosan, az egyelőre még ismeretlen helyen levő elfordulási középpontban $R_x = 1$ Mp vízszintes erő működik. A definíció szerint, ennek hatására a födém nem fordul el, hanem csak az x, illetve y tengely irányában, Δ_{xx}, illetve Δ_{xy} eltolódást szenved. A főirányok számításánál alkalmazott módszerhez hasonlóan x és y irányban az alábbi vetület egyenletek írhatók fel:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{xx} A + \Delta_{xy} C &= 1 \\ \Delta_{xx} C + \Delta_{xy} B &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

A kapott egyenletrendszerből $K = AB - C^2$ rövidítést bevezetve, a födémeltolódásokra a következők adódnak:

$$\Delta_{xx} = \frac{B}{K}; \qquad \Delta_{xy} = -\frac{C}{K}.$$

Az eltolódások ismeretében $R_x = 1$ Mp külső erőből az egyes falelemeket terhelő x, illetőleg y irányú erők már egyszerűen számíthatók. Így az „i”-edik falelemre x irányban

$$r_{ixx} = \Delta_{xx} p_{ixx} + \Delta_{xy} p_{izy} = \frac{1}{K}(Bp_{ixx} - Cp_{ixy}) \tag{15}$$

és y irányban

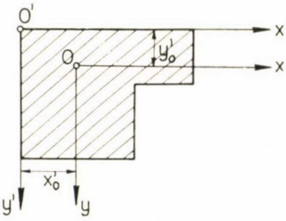
$$r_{ixy} = \Delta_{xx} p_{ixy} + \Delta_{xy} p_{iyy} = \frac{1}{K}(Bp_{ixy} - Cp_{iyy}) \tag{16}$$

erő működik. Mivel a külső erő ezeknek az eredője, felírható, hogy nyomatéka egy pontra (esetünkben az *5. ábrán* jelölt x' y' tengelyrendszer kezdőpontjára O'-re), egyenlő az egyes falelemeket terhelő erők nyomatékösszegével ugyanarra a pontra.

Tehát

$$\sum_{i=1}^{m} (x'_i\, r_{ixy} - y'_i\, r_{ixx}) = y'_0 \cdot 1$$

Itt x'_i illetve y'_i az „i"-edik falelem nyírási középpontjának távolsága az y' illetve x' tengelytől, és y' pedig az elfordulási középpont távolsága az x' tengelytől. Ez utóbbi távolság, felhasználva (15) és (16) eredményeit:



5 ábra

$$y'_0 = \frac{B}{K}\left[\sum_{i=1}^{m} y'_i\, p_{ixx} - \sum_{i=1}^{m} x'_i\, p_{ixx}\right] + \frac{C}{K}\left[\sum_{i=1}^{m} x'_i\, p_{iyy} - \sum_{i=1}^{m} y'_i\, p_{ixy}\right]. \quad (17)$$

A fentiekhez teljesen hasonlóan $R_y = 1$ Mp y tengely irányú erő hatását vizsgálva, levezethető az elfordulási középpont y' tengelytől mért távolsága, amelyre a következőt kapjuk:

$$x'_0 = \frac{A}{K}\left[\sum_{i=1}^{m} x'_i\, p_{iyy} - \sum_{i=1}^{m} y'_i\, p_{ixy}\right] + \frac{C}{K}\left[\sum_{i=1}^{m} y'_i\, p_{ixx} - \sum_{i=1}^{m} x'_i\, p_{iyx}\right] \quad (18)$$

Végezetül meg fogjuk határozni, hogy az épületkeresztmetszet elfordulási középpontjában, a keresztmetszet egységnyi elfordulásához mekkora erőpárt szükséges működtetni. Ennek érdekében tételezzük fel, hogy a vizsgált keresztmetszethez tartozó födém egységnyi elfordulást szenved. Ekkor az „i"-edik falelem nyírási középpontja x irányban x_i és y irányban y_i mértékben tolódik el és az eltolódás előidézéséhez a nyírási középpontjában x irányban

$$r_{i\varphi x} = (x_i\, p_{ixy} - y_i\, p_{ixx})$$

és y irányban

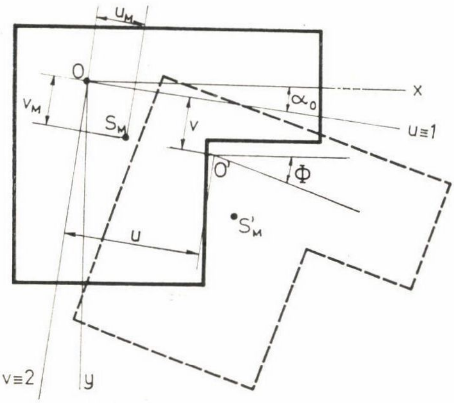
$$r_{i\varphi x} = (x_i\, p_{iyy} - y_i\, p_{ixy}) \quad (20)$$

nagyságú erőnek kell működni. A képletekben szereplő $x_i = x'_i - x'_0$ és $y_i = y'_i - y'_0$, vagyis az „i"-edik falelem nyírási középpontjának az elfordulási középpontban felvett koordináta rendszertől mért távolságait jelentik. Az elfordulás hatására keletkező erők elfordulási középpontra vonatkozó nyomatékösszegének egyenlőnek kell lenni az elfordulást előidéző erőpár forgatónyomatékával, tehát

$$M = \sum_{i=1}^{m} (x_i\, r_{iyx} - y_i\, r_{iiy}) = \left[\sum_{i=1}^{m} y_i^2\, p_{ixx} - 2\sum_{i=1}^{m} x_i\, y_i\, p_{ixy} + \sum_{i=1}^{m} x_i^2\, p_{iyy}\right] \quad (21)$$

3. A rezgés jellemzésére szolgáló differenciálegyenletrendszer és annak megoldása

Komplikált rezgő rendszer mozgásának differenciálegyenlete sok esetben közvetlen módon felírható a *Lagrange-féle* egyenlet segítségével, felhasználva a szerkezet mozgási és helyzeti energiáját tartalmazó összefüggéseket. A lemezvázas magasházak önrezgésszámának meghatározásakor is ezt az utat választjuk, és először a vizsgált épület „i"-vel jelölt födémének elmozdulásaiból indulunk ki. Amint már az elözőkben rávilágítottunk, a födém rezgés alatti mozgása az elfordulási középpont körüli elfordulással és ezzel egyidejű eltolódással jellemezhető. Az eltolódás helyett a továbbiak-



6 ábra

ban annak főirányba vett összetevőit vesszük figyelembe, és ennek megfelelően a 6. ábrán is bemutatott módon a födém elfordulási középpontjának eltolódását u, illetve v komponensekkel és az elfordulását Φ-vel jelöljük.

Az elmozdulás hatására az ábrának megfelelően a födém elfordulási középpontja 0'-be és tömeg súlypontja S'_M-be kerül és egy adott pillanatban mozgási energiája, mint a forgó és haladó mozgást végző merev test lendülete az alábbiak szerint kapható meg.

$$E_{mi} = \frac{m_i \dot{u}_i^2}{2} + \frac{m_i \dot{v}_i^2}{2} + \frac{J_{0i} \dot{\Phi}_i^2}{2} + m_i \dot{\Phi}_i (u_M \dot{v}_i - v_M \dot{u}_i) \tag{22}$$

(A betű feletti pont az elmozdulás idő szerinti differenciálhányadosát jelenti.)

Az egész épület mozgási energiája pedig mátrix felírásban:

$$E_m = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^* \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}^* \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \dot{\Phi}^* \mathbf{M}\dot{\Phi} + \mathbf{M}\dot{\Phi} \, (u_M \dot{\mathbf{v}} - v_M \dot{\mathbf{u}}) \tag{23}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_i \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{v}_i \\ \vdots \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} \qquad \dot{\Phi} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\Phi}_i \\ \vdots \\ \dot{\Phi}_n \end{bmatrix} \text{ vektorok}$$

és

$\mathbf{M} = \langle m_1, m_2 \ldots m_n \rangle$; $\mathbf{J}_0 = \langle J_{01}, J_{0i}, \ldots J_n \rangle$ diagonálmátrixok.

A födém helyzeti energiája ugyanabban a pillanatban a következő lesz:

$$E_{hi} = \frac{1}{2} [k_{ui}\, u_i^2 + k_{vi}\, v_i^2 + k_{\Phi i}\, \Phi_i^2] \tag{24}$$

Itt k_{ui}, illetve k_{vi} a födém u illetve v irányú eltolódási rugóállandóját, k_i pedig a csavarási rugóállandóját jelenti.

Az egész épület helyzeti energiája a mozgási energiánál alkalmazott felírásban

$$E_h = \frac{1}{2} [\mathbf{u}^* \, \mathbf{K}_u \mathbf{u} + \mathbf{v}^* \mathbf{K}_v \mathbf{v} + \Phi^* \mathbf{K}_\Phi \Phi] \tag{25}$$

ahol

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_i \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix} \text{vektor}$$

és

$\mathbf{K} = \langle k_1, k_2, \ldots k_n \rangle$ diagonálmátrix.

A mozgás differenciálegyenletének felírására szolgáló Lagrange egyenlet a következő:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_m}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial E_m}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f} \tag{26}$$

Az egyenletben $\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\Phi})$ a födémtömegközéppont mozgására jellemző úgynevezett általánosított koordinátáinak vektorait és f pedig az aktív dinámvektorokat jelenti, amely esetünkben — mivel szabad rezgésről van szó, — zérus.

Ezek után határozzuk meg a Lagrange egyenlet deriváltjait.

$$\frac{\partial E_m}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{M}\, \dot{\mathbf{u}} - v_M\, \mathbf{M}\, \dot{\boldsymbol{\Phi}}$$

$$\frac{\partial E_m}{\partial \dot{\mathbf{v}}} = \mathbf{M}\, \dot{\mathbf{v}} + u_M\, \mathbf{M}\, \dot{\boldsymbol{\Phi}}$$

$$\frac{E_M}{\partial \dot{\boldsymbol{\Phi}}} = \mathbf{J}_0\, \dot{\boldsymbol{\Phi}} + \mathbf{M}\, (u_M\, \dot{\mathbf{v}} - v_M\, \dot{\mathbf{u}})$$

továbbá

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_M}{\dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} - v_M\,\mathbf{M}\,\ddot{\boldsymbol{\Phi}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{E_m}{\dot{\mathbf{v}}} = \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{v}} + u_M\,\mathbf{M}\,\ddot{\boldsymbol{\Phi}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{E_m}{\partial\dot{\boldsymbol{\Phi}}} = -v_M\,\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{v}} + u_M\,\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{J}_0\,\ddot{\boldsymbol{\Phi}}$$

$$\frac{\partial E_m}{\partial\mathbf{u}} = \frac{\partial E_m}{\partial\mathbf{v}} = \frac{\partial E_m}{\partial\Phi} = 0,$$

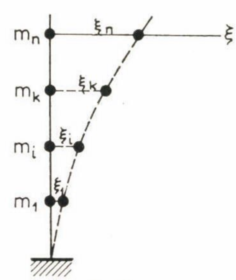
végül

$$\frac{\partial E_h}{\partial\mathbf{u}} = \mathbf{K}_u\,\mathbf{u}$$

$$\frac{\partial E_h}{\partial\mathbf{v}} = \mathbf{K}_v\,\mathbf{v}$$

$$\frac{\partial E_h}{\partial\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{K}_\Phi\,\boldsymbol{\Phi}$$

Ha megvizsgáljuk $\frac{\partial E_h}{\partial\mathbf{q}}$ alapján felírt három deriváltat, láthatjuk, hogy azok tulajdonképpen a megfelelő födémre vonatkozó és a rezgés alatt fellépő visszatérítő erő, illetve erőpár nagyságát jelentik, amelyet a födém rugalmas támasza fejt ki. Egytömegű, egyszabadságfokú rendszernél ezek könnyen meghatározhatók, esetünkben azonban, mivel több tömeg van, egy bizonyos



7 ábra

tömegre ható visszatérítő dinámok nagyságát a többi tömeg elmozdulása is befolyásolja, ugyanis az egyik tömeg helyén bekövetkező elmozdulás hatására a másik tömeg is elmozdul és viszont. Vizsgáljuk meg ilyen esetekben a visszatérítő dinámok kiszámítási módját.

A *7. ábrán* vázolt egyik végén befogott tartón koncentrált tömegek helyezkednek el. Jelöljük az „i”-edik tömeg helyén működő egységnyi vízszintes erő hatására keletkező ξ irányú eltolódásokat az „i” helyen a_{ii}-vel és egy másik „k”-val jelölt tömeg helyén a_{ik}-val. Hasonlóképpen a „k”-adik tömeg helyén működő egységnyi vízszintes irányú erő hatására a „k”, illetőleg „i” helyén a_{kk}, illetőleg a_{ki} eltolódások jönnek létre. Mint ismeretes *Maxwell* felcserélhetőségi tétele értelmében $a_{ki} = a_{ik}$. A fentiek ismeretében ki tudjuk számítani azokat az R erőket, melyek együttesen az „i” tömeg helyén ξ_i eltolódást okoznak. Ezek az erők viszont egyben megadják, hogy az egyidejűleg bekövetkező ξ_i kitérés alkalmával mekkora rugalmas visszatérítő erő működik az m_i-vel jelölt tömegre.

Az egyes tömegekre ható rugalmas visszatérítő erők meghatározására a szuperpozíció elve szerint az alábbi egyenletrendszer szolgál

$$\begin{aligned}
a_{11} R_1 + a_{12} R_2 + \dots + a_{1n} R_n &= \xi_1 \\
a_{21} R_1 + a_{22} R_2 + \dots + a_{2n} R_n &= \xi_2 \\
\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \dots \quad\quad & \cdot \\
\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \dots \quad\quad & \cdot \\
a_{n1} R_1 + a_{n2} R_2 + \dots + a_{nn} R_n &= \xi_n
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrix formában felírva

$$\mathbf{N}\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi} \tag{27}$$

itt

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \text{ vektorok}$$

és

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ mátrix}$$

A mátrix egyenlet megoldása

$$\mathbf{K} = \mathbf{N}^{-1} \boldsymbol{\xi} \tag{28}$$

ahol $\mathbf{N}^{-1}$ $\mathbf{N}$-nek úgynevezett inverz mátrixa. Tekintettel, hogy $\mathbf{N}$ mátrix szimmetrikus, inverze is szimmetrikus, tehát $a'_{ij} = a'_{ji}$. A fentiek alapján a helyzeti energia általánosított koordináták szerinti deriváltjai a következők lesznek:

$$\frac{\partial E_h}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{r}_u = \mathbf{N}_u^{-1} \mathbf{u}$$

$$\frac{\partial E_h}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{r}_v = \mathbf{N}_v^{-1} \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial E_h}{\partial \boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{r}_{\Phi} = \mathbf{N}_{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\Phi}$$

és ezek egyben megadják a födémekre ható visszatérítő dinámokat. A fentiekben

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{N}_u^{-1}\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a'_{u,11}\,u_1 + a'_{u,12}\,u_2 + \ldots + a'_{u,1n}\,u_n \\ a'_{u21}\,u_1 + a'_{u,22}\,u_2 + \ldots + a'_{u,2n}\,u_n \\ \vdots \\ a'_{u,n1}u_1 + a'_{u,n2}\,u_2 + \ldots + a'_{u,nn}\,u_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{N}_v^{-1}\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a'_{v,11}\,v_1 + a'_{v,12}\,v_2 + \ldots + a'_{v,1n}\,v_n \\ a'_{v,21}\,v_1 + a'_{v,22}\,v_2 + \ldots + a'_{v,2n}\,v_n \\ \vdots \\ a'_{v,n1}\,v_1 + a'_{v,n2}\,v_2 + \ldots + a'_{v,nn}\,v_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{\Phi} = \mathbf{N}_{\Phi}^{-1}\,\Phi = \begin{bmatrix} a'_{\Phi,11}\,\Phi_1 + a'_{\Phi,12}\,\Phi_2 + \ldots + a'_{\Phi,1n}\,\Phi_n \\ a'_{\Phi,21}\,\Phi_1 + a'_{\Phi,22}\,\Phi_2 + \ldots + a'_{\Phi,2n}\Phi_n \\ \vdots \\ a'_{\Phi,n1}\,\Phi_1 + a'_{\Phi n2}\,\Phi_2 + \ldots + a'_{\Phi,nn}\,\Phi_n \end{bmatrix}$$

(A vesszővel jelölt tagok a terhelési tényezőkből képzett mátrix (**N**) inverzének ($\mathbf{N}^{-1}$-nek) megfelelő tagjait jelentik.)

Ezek után a mozgást leíró differenciálegyenlet-rendszer a következő lesz:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{N}\,\ddot{\mathbf{u}} - v_M\,\mathbf{M}\,\boldsymbol{\Phi} + \mathbf{N}_u^{-1}\,\mathbf{u} = 0 \\ &\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{v}} + u_M\,\mathbf{M}\,\boldsymbol{\Phi} + \mathbf{N}_v^{-1}\,\mathbf{v} = 0 \\ &-v_M\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + u_M\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{J}_0\,\ddot{\boldsymbol{\Phi}} + \mathbf{N}_{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\Phi} = 0 \end{aligned}} \tag{29}$$

Mielőtt a differenciálegyenlet-rendszer megoldására rátérnénk, foglalkozni kell a visszatérítő dinámok meghatározására szolgáló egyenletrendszerek együtthatóinak (terhelési tényezők) kiszámításával. Ezek az 1.2 fejezet alapján könnyen megkaphatók.

A (13) összefüggés tartalmazza ugyanis az u illetőleg v irányú egységnyi eltolódáshoz szükséges p_1, illetőleg p_2 erőt. Az $\mathbf{r}_u$ és $\mathbf{r}_v$ számítására szolgáló egyenletrendszerek együtthatói, melyek az egységnyi erők hatására keletkező elmozdulásokat jelentik, egyszerűen ezek reciprokaként kaphatók meg, tehát

$$a_{u,ik} = \frac{1}{p_{u,ik}} \quad \text{és} \quad a_{v,ik} = \frac{1}{p_{v,ik}} \tag{30}$$

ahol p_{ik} az „i"-edik helyen bekövetkező egységnyi eltolódást okozó „k" helyen működő erőt jelenti. A (13) összefüggés értelemszerűen érvényes valamennyi p_{ik} meghatározására, csak az (5), (6), (7), (8) képletekben szereplő H képletébe az „i" és „k" helyeknek megfelelő távolságokat kell behelyettesíteni.

Az épületkeresztmetszet egységnyi erőpár hatására keletkező elfordulása a födém síkjában működő egységnyi elfordulást előidéző erőpár számértékének reciprokával egyenlő. Vagyis

$$a_{\Phi ik} = \frac{1}{M} \tag{31}$$

az itt szereplő M értékét a (21) összefüggésből tudjuk számítani.

Mivel egyik végén mereven befogott és másik végén megtámasztás nélküli rendszerről van szó, ha az „i"-edik épületkeresztmetszetet síkjában Φ szöggel elforgatjuk, akkor közte és a szabad vég közötti valamennyi „k" keresztmetszet azonos szöggel fordul el, tehát felírható, hogy

$$a_{\Phi ii} = a_{\Phi ik} \tag{32}$$

A differenciál-egyenletrendszer megoldásánál a többtömegű rezgőrendszereknél szokásos módszer szerint járunk el. Feltételezzük, hogy a rendszer szabad rezgése harmonikus rezgés lesz, így

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \sin \omega t$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \sin \omega t$$

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0 \sin \omega t$$

függvényekkel jellemezhető, és

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{u}_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{\mathbf{v}} = -\omega^2 \mathbf{v}_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{\mathbf{\Phi}} = -\omega^2 \mathbf{\Phi}_0 \sin \omega t$$

A fentieket behelyettesítve a (29) differenciálegyenlet-rendszerbe, majd sin ω t-vel végigosztva kapjuk, hogy

$$\boxed{\begin{array}{lll} (\mathbf{N}_u^{-1} - \omega^2\mathbf{M})\,\mathbf{u}_0 + \mathbf{0}\,\mathbf{v}_0 & + \omega^2 v_M\,\mathbf{M}\,\mathbf{\Phi}_0 & = 0 \\ \mathbf{0}\,\mathbf{u}_0 + (\mathbf{N}_v^{-1} - \omega^2\,\mathbf{M})\,\mathbf{v}_0 & - \omega^2 u_M\,\mathbf{M}\,\mathbf{\Phi}_0 & = 0 \\ \omega^2 v_M\,\mathbf{M}\,\mathbf{u}_0 - {}^2u_M\,\mathbf{M}\,\mathbf{v}_0 & + (\mathbf{N}_\Phi^{-1} - \mathbf{J}_0\,\omega^2)\,\mathbf{\Phi}_0 & = 0 \end{array}} \tag{33}$$

Itt **0** az n-ed rendű zérus mátrixot jelenti.

Bevezetve továbbá

$$(\mathbf{N}_u^{-1} - \omega^2\,\mathbf{M}) = \mathbf{P}$$

$$\omega^2 v_M\,\mathbf{M} = \mathbf{Q} \qquad \text{(diagonál mátrix)}$$

$$(\mathbf{N}_v^{-1} - \omega^2\,\mathbf{M}) = \mathbf{R}$$

$$-\omega^2 v_M \mathbf{M} = \mathbf{S} \qquad \text{(diagonál mátrix)}$$

$$(\mathbf{N}_\Phi^{-1} - \omega^2 \mathbf{J}_0) = \mathbf{T}$$

jelöléseket, egyenletrendszerünk a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{u}_0 + \mathbf{Q}\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{Q}\,\boldsymbol{\Phi}_0 &= 0 \\ \mathbf{O}\mathbf{u}_0 + \mathbf{R}\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{S}\,\boldsymbol{\Phi}_0 &= 0 \\ \mathbf{Q}\mathbf{u}_0 + \mathbf{S}\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{T}\,\boldsymbol{\Phi}_0 &= 0 \end{aligned} \qquad (34)$$

A kapott homogén egyenletrendszernek akkor van zérustól különböző megoldása, ha az együtthatókból képzett determináns zérus. Esetünkben az együttható mátrixot az alábbi hipermátrix adja:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{O} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{S} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Végül a rezgés sajátkörfrekvenciájának a meghatározására szolgáló egyenlet a következő:

$$\boxed{\det \mathbf{W} = (\det \mathbf{P})\,(\det \mathbf{R} \det \mathbf{T} - \det \mathbf{S}^2) = \det \mathbf{Q}^2 \det \mathbf{R} = 0}\,. \qquad (36)$$

A kapott egyenlet ω^2-ben 3n-ed fokú, melynek 3n gyöke van. Tekintettel arra, hogy a karakterisztikus egyenletben szereplő mátrixok szimmetrikusak és maga a W hipermátrix is szimmetrikus, az egyenlet gyökei valósak lesznek és így ω-ra valós vagy tiszta képzetes eredményeket kapunk. A mozgás fizikai feltételeiből következik, hogy a tiszta képzetes, illetve a valós negatív előjelű gyökök nem jöhetnek számításba, és így tulajdonképpen ω-ra n számú értéket vehetünk figyelembe. Ezek közül a legkisebb adja az alaprezgés sajátkörfrekvenciáját, a többi pedig a bonyolultabb rezgésalakoknak megfelelő körfrekvenciákat. Így az épület alapsajátkörfrekvenciája $\omega = \omega_{\min}$, és alaprezgésszáma:

$$N = \frac{\omega_{\min}}{2\pi}. \qquad (37)$$

Tekintettel arra, hogy (33) egyenletrendszer megoldása igen nagy számítási munkát igényel és több emeletes háznál gépi számítás nélkül elképzelhetetlen, bemutatjuk a megoldás gépi számításra alkalmasabb formáját is.

Ha szétválasztjuk a (33) egyenletrendszer ω-át tartalmazó és nem tartalmazó tagjait, a következőt írhatjuk fel:

$$(\mathbf{A}^{-1} - \omega^2 \mathbf{B})\,\mathbf{q} = 0$$

ahol

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{N}_u^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_v^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\Phi^{-1} \end{vmatrix} \quad \text{hipermátrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & -v_M \mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & u_M \mathbf{M} \\ -v_M \mathbf{M} & u_M \mathbf{M} & \mathbf{J}_0 \end{vmatrix} \quad \text{hipermátrix}$$

és $\mathbf{q}$ az elmozduláskoordinátákat ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\Phi}$) tartlmazó hipervektor. Ezek után közvetlen adódik

$$\mathbf{E}\,\mathbf{q} = \omega^2\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{q}$$

(Itt E az egységhipermátrix és $\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}^{-1}$ hipermátrix inverze. Így az $\mathbf{N}_u$, $\mathbf{N}_v$, $\mathbf{N}_\Phi$ mátrixok invertálása elkerülhető.)

Bevezetve még $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{C}$ hipermátrix és — mivel a gép az egyenlet legnagyobb gyökétől szolgáltatja az eredményeket, rezgéstani szempontból pedig a legkisebb alaprezgés és az azt követő gyökök érdekesek — a $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ jelölést, kapjuk:

$$(\mathbf{C} - E\,\lambda)\,\mathbf{q} = 0.$$

Ebből λ mint a $\mathbf{C}$ sajátértéke számítható.

4. Közelítő számítás az önrezgésszám meghatározására

Az előzőkben ismertetett módszer szerint a lemezvázas épületek önrezgésszáma különösebb nehézségek nélkül meghatározható, de több emeletes házaknál az egyenletek és az ismeretlenek nagy száma miatt a feladat — gazdaságosan — csak elektronikus számítógéppel oldható meg. Ennek a hátránynak kiküszöbölésére ismertetni fogunk egy közelítő számítást, amellyel tetszőleges számú emelet esetén is, különösebb számítási nehézség nélkül, jó közelítő eredményt kapunk. A számítás Dunkerley egyenletének segítségével történik [11], amely egy „n" számú tömegből álló rezgőrendszer önrezgésszámának meghatározása helyett a feladatot leegyszerűsíti „n" darab egytömegű rendszer önrezgésszámának meghatározására, a következő összefüggés szerint:

$$\frac{1}{\omega^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_1^2}\,. \tag{38}$$

Itt ω_i az elhanyagolható tömegű tartó képzelt saját körfrekvenciáját jelenti, abban az esetben, ha csak az i-edik tömeg van a tartón. Az így kapott érték a pontos eredménynél 5—15%-kal kisebb.

Esetünkben tehát azt kell csinálni, hogy olyan épületnél számítjuk ki a sajátkörfrekvenciát, amely csak egy szinttel rendelkezik és ez a szint az épület tényleges szintjeinek megfelelően változik. Ekkor ugyanis mindig egy kapcsolt rezgést végző egytömegű rendszerrel állunk szemben, melyre nézve ugyancsak felírható a (33) egyenletrendszer, csak lényegesen egyszerűbb formában, mivel egytömegű rendszernél a visszatérítő dinámot a rugóállandó és az elmozdulás szorzata adja meg. A rugóállandó pedig az egységnyi eltolódást előidéző dinám számértékével egyenlő és ezt már az 1.2 fejezetben meghatároztuk; eltolódásnál p_u, illetve p_v [lásd (13) képlet] és elfordulásnál M [lásd (21) képlet].

Ennek értelmében az „i”-vel jelölt egytömegű rendszer szabadrezgésére az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned}
&(p_{ui} - m_i\,\omega^2)\,u_i + \omega^2 v_M\, m_i\, \Phi_i &&= 0\\
&(p_{vi} - m_i\,\omega^2)\,v_i - \omega^2 u_M\, m_i\, \Phi_i &&= 0\\
&\omega^2 v_M\, m_i\, u_i \quad - \omega^2 u_M\, m_i\, v_i + (M_i - J_{0i}\,\omega^2)\,\Phi_i &&= 0
\end{aligned} \tag{39}$$

A homogén egyenletrendszernek akkor van zérustól különböző megoldása, ha az együtthatóiból alkotott determináns zérus, tehát

$$\begin{vmatrix}
(p_{ui} - m_i\,\omega^2) & 0 & \omega^2 v_M\, m_i\\
0 & (p_{vi} - m_i\,\omega^2) & -\omega^2 u_M\, m_i\\
\omega^2 v_M\, m_i & -\omega^2 u_M\, m_i & (M_i - J_{0i}\,\omega^2)
\end{vmatrix} = 0\,.$$

A determináns kifejtése után ω^2-re a következő harmadfokú egyenletet kapjuk:

$$a\,\omega^6 + b\,\omega^4 + c\,\omega^2 + d = 0 \tag{40}$$

ahol

$$\begin{aligned}
a &= m_i^2(u_M^2\, m_i + v_M^2\, m_i - J_{0i})\\
b &= m_i\,[J_{0i}(p_{ui} + p_{vi}) - m_i(p_{ui}\, u_M^2 + p_{vi}\, v_M^2) + m_i\, \overline{M}_i]\\
c &= -[m_i\, M_i(p_{ui} + p_{vi}) + p_{ui}\, p_{vi}\, J_0]\\
d &= p_{ui}\, p_{vi}\, M_i.
\end{aligned}$$

A determináns szimmetriájából következik, hogy az egyenlet gyökei valósak. Számunkra az alaprezgéshez tartozó körfrekvencia $\omega_{\min}$ jöhet szóba, és így n' számú szint esetében n különböző $\omega_{\min}$ értéket kapunk, amelyekből az épület sajátkörfrekvenciája a (38) képlet szerint határozható meg.

5. Nyílászáró szerkezetek okozta gyengítések figyelembevétele

Az egyes falelemek merevségi tényezőinek számításánál a H értékében szereplő s tényező tartalmazza a nyílászáró szerkezetek falelem merevségének csökkentésére gyakorolt hatását. Ennek a tényezőnek figyelembevételénél főleg kísérleti úton kapott eredményekre támaszkodhatunk [7]. Ezek alapján, ha a falban levő nyílás szélességének és a fal szélességének viszonyát ε-nal jelöljük, akkor az „n” tényező meghatározása a következőképpen lehetséges: ha $\varepsilon \leqq 0{,}55$, akkor

$$s = 3{,}46 + 1 \tag{41}$$

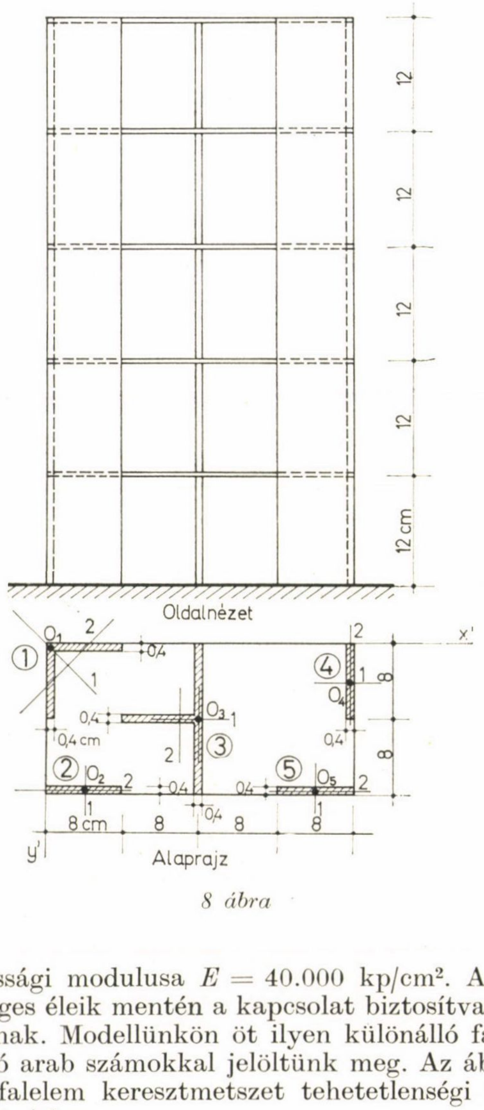
ha $0{,}55 \leqq \varepsilon \leqq 0{,}7$, akkor

$$s = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-\varepsilon)^4}}\,. \tag{42}$$

A fenti eredmények egyetlen falra vonatkoznak. A gyakorlatban szereplő falelemek legtöbbször több fal élek mentén mereven egymáshoz való illesztésével készülnek, és az egyes részek rendszerint különbözőképpen vannak nyílásokkal áttörve. Ilyen esetben az egész falelemre vonatkozó „s” tényezőt az egyes falakhoz tartozó és a fentiek alapján meghatározható tényezők átlagos értékével lehet azonosnak venni.

6 Számpélda

Az önrezgésszám előzők szerinti közelítő meghatározását a 8. ábrán bemutatott 4 emeletes lemezvázas épületmodellen végezzük el. A méretek az ábrán szerepelnek. A modell anyaga Columbia C. jelű műanyag, melynek



8 ábra

dinamikus rugalmassági modulusa $E = 40.000$ kp/cm^2. Az egymáshoz csatlakozó falak függőleges éleik mentén a kapcsolat biztosítva van, így ezek egy-egy falelemet alkotnak. Modellünkön öt ilyen különálló falelem van, melyeket az ábrán látható arab számokkal jelöltünk meg. Az ábrán ugyancsak feltüntettük egy-egy falelem keresztmetszet tehetetlenségi főirányait (1,2) és nyírási középpontját (0).

A falelem keresztmetszetek főtehetetlenségi nyomatékai a következők:

1. falelem: $J_1 = 57{,}75\ \mathrm{cm}^4$ $\quad J_2 = 10{,}75\ \mathrm{cm}^4$
2. falelem: $J_1 = 17{,}00\ \mathrm{cm}^4$ $\quad J_2 \cong 0$
3. falelem: $J_1 = 137{,}00\ \mathrm{cm}^4$ $\quad J_2 = 35{,}9\ \mathrm{cm}^4$
4. falelem: $J_1 = 17{,}00\ \mathrm{cm}^4$ $\quad J_2 \cong 0$
5. falelem: $J_1 = 17{,}00\ \mathrm{cm}^4$ $\quad J_2 \cong 0.$

A merevségi tényezők számítása (5), (6), (7), (8) szerint:

1. falelem

$$p_{1xx} = \frac{1}{H} 34{,}25$$

$$p_{1xy} = p_{1yx} = \frac{1}{H} 23{,}5$$

$$p_{1yy} = \frac{1}{H} 34{,}25$$

2. falelem

$$p_{2xx} = \frac{1}{H} 17{,}00$$

$$p_{2yy} = 0$$

$$p_{2xy} = 0$$

3. falelem

$$p_{3xx} = \frac{1}{H} 137{,}0$$

$$p_{3yy} = \frac{1}{H} 35{,}9$$

$$p_{3xy} = 0$$

4. falelem

$$p_{4xx} = 0$$

$$p_{4yy} = \frac{1}{H} 17{,}0$$

$$p_{4xy} = 0$$

5. falelem

$$p_{5xx} = \frac{1}{H} 17{,}0$$

$$p_{5yy} = 0$$

$$p_{5xy} = 0$$

A merevségi tényezők egyes szintekre vonatkozó értékei („s” valamennyi falelemre egy).

$$H_{\mathrm{I}} = \frac{12^3}{3E} = \frac{5{,}75 \cdot 10^2}{E}$$

$$H_{\mathrm{II}} = \frac{24^3}{3E} = \frac{4{,}6 \cdot 10^3}{E}$$

$$H_{\mathrm{III}} = \frac{36^3}{3E} = \frac{1{,}55 \cdot 10^4}{E}$$

$$H_{\mathrm{IV}} = \frac{48^3}{3E} = \frac{3{,}67 \cdot 10^4}{E}$$

$$H_{\mathrm{V}} = \frac{60^3}{3E} = \frac{7{,}18 \cdot 10^4}{E}$$

1. falelem	I. szint	$p_{1xx}^{(\mathrm{I})} = 5{,}96 \cdot 10^{-2} E$	[kp/cm]
		$p_{1xy}^{(\mathrm{I})} = 4{,}09 \cdot 10^{-2} E$	[kp/cm]
		$p_{1yy}^{(\mathrm{I})} = 5{,}96 \cdot 10^{-2} E$	[kp/cm]
	II. szint	$p_{1xx}^{(\mathrm{II})} = 7{,}43 \cdot 10^{-3} E$	[kp/cm]
		$p_{1xy}^{(\mathrm{II})} = 5{,}12 \cdot 10^{-3} E$	[kp/cm]
		$p_{1yy}^{(\mathrm{II})} = 7{,}43 \cdot 10^{-3} E$	[kp/cm]
	III. szint	$p_{1xx}^{(\mathrm{III})} = 2{,}19 \cdot 10^{-3} E$	[kp/cm]
		$p_{1xy}^{(\mathrm{III})} = 1{,}52 \cdot 10^{-3} E$	[kp/cm]
		$p_{1yy}^{(\mathrm{III})} = 2{,}19 \cdot 10^{-3} E$	[kp/cm]
	IV. szint	$p_{1xx}^{(\mathrm{IV})} = 9{,}4 \cdot 10^{-4} E$	[kp/cm]
		$p_{1xy}^{(\mathrm{IV})} = 6{,}3 \cdot 10^{-4} E$	[kp/cm]
		$p_{1yy}^{(\mathrm{IV})} = 9{,}4 \cdot 10^{-4} E$	[kp/cm]
	V. szint	$p_{1xx}^{(\mathrm{V})} = 4{,}8 \cdot 10^{-4} E$	[kp/cm]
		$p_{1xy}^{(\mathrm{V})} = 3{,}27 \cdot 10^{-4} E$	[kp/cm]
		$p_{1yy}^{(\mathrm{V})} = 4{,}8 \cdot 10^{-4} E$	[kp/cm]
2. falelem	I. szint	$p_{2xx}^{(\mathrm{I})} = 2{,}96 \cdot 10^{-2} E$	[kp/cm]
	II. szint	$p_{2xx}^{(\mathrm{II})} = 3{,}7 \cdot 10^{-3} E$	[kp/cm]
	III. szint	$p_{2xx}^{(\mathrm{III})} = 1{,}13 \cdot 10^{-3} E$	[kp/cm]
	IV. szint	$p_{2xx}^{(\mathrm{IV})} = 4{,}64 \cdot 10^{-4} E$	[kp/cm]
	V. szint	$p_{2xx}^{(\mathrm{V})} = 2{,}37 \cdot 10^{-4} E$	[kp/cm]
3. falelem	I. szint	$p_{3xx}^{(\mathrm{I})} = 2{,}39 \cdot 10^{-1} E$	[kp/cm]
		$p_{3yy}^{(\mathrm{I})} = 6{,}24 \cdot 10^{-1} E$	[kp/cm]
	II. szint	$p_{3xx}^{(\mathrm{II})} = 2{,}98 \cdot 10^{-2} E$	[kp/cm]
		$p_{3yy}^{(\mathrm{II})} = 7{,}8 \cdot 10^{-3} E$	[kp/cm]

III. szint $p_{3xx}^{(III)} = 8{,}85 \cdot 10^{-3} E$ [kp/cm]

$p_{3yy}^{(III)} = 2{,}51 \cdot 10^{-3} E$ [kp/cm]

IV. szint $p_{3xx}^{(IV)} = 3{,}73 \cdot 10^{-3} E$ [kp/cm]

$p_{3yy}^{(IV)} = 9{,}75 \cdot 10^{-4} E$ [kp/cm]

V. szint $p_{3xx}^{(V)} = 1{,}93 \cdot 10^{-4} E$ [kp/cm]

$p_{3yy}^{(V)} = 5{,}0 \cdot 10^{-4} E$ [kp/cm]

4. falelem I. szint $p_{4yy}^{(I)} = 2{,}96 \cdot 10^{-2} E$ [kp/cm]

II. szint $p_{4yy}^{(II)} = 3{,}7 \cdot 10^{-3} E$ [kp/cm]

III. szint $p_{4yy}^{(III)} = 1{,}13 \cdot 10^{-3} E$ [kp/cm]

IV. szint $p_{4yy}^{(IV)} = 4{,}64 \cdot 10^{-4} E$ [kp/cm]

V. szint $p_{4yy}^{(V)} = 2{,}37 \cdot 10^{-4} E$ [kp/cm]

5. falelem I. szint $p_{5xx}^{(I)} = 2{,}96 \cdot 10^{-2} E$ [kp/cm]

II. szint $p_{5xx}^{(II)} = 3{,}7 \cdot 10^{-3} E$ [kp/cm]

III. szint $p_{5xx}^{(III)} = 1{,}13 \cdot 10^{-3} E$ [kp/cm]

IV. szint $p_{5xx}^{(IV)} = 4{,}64 \cdot 10^{-4} E$ [kp/cm]

V. szint $p_{5xx}^{(V)} = 2{,}37 \cdot 10^{-4} E$ [kp/cm]

$A_{I} = 35{,}78 \cdot 10^{-2}E$	$B_{I} = 15{,}9 \cdot 10^{-2}E$	$C_{I} = 4{,}09 \cdot 10^{-2}E$
$A_{II} = 44{,}63 \cdot 10^{-3}E$	$B_{II} = 18{,}93 \cdot 10^{-3}E$	$C_{II} = 5{,}12 \cdot 10^{-3} E$
$A_{III} = 13{,}30 \cdot 10^{-3}E$	$B_{III} = 5{,}63 \cdot 10^{-3}E$	$C_{III} = 1{,}52 \cdot 10^{-3}E$
$A_{IV} = 55{,}98 \cdot 10^{-4}E$	$B_{IV} = 23{,}79 \cdot 10^{-4}E$	$C_{IV} = 6{,}3 \cdot 10^{-4}E$
$A_{V} = 28{,}84 \cdot 10^{-4}E$	$B_{V} = 12{,}17 \cdot 10^{-4}E$	$C_{V} = 3{,}27 \cdot 10^{-4}E$

A főirányok meghatározása (10) képlet szerint:

$$\mathrm{tg}\, 2\,\alpha_0 = \frac{2C}{A - B} = \frac{2 \cdot 4{,}09 \cdot 10^{-2}}{19{,}88 \cdot 10^{-2}} = 0{,}412$$

$$2\,\alpha_0 = 22^\circ\, 26' \qquad \alpha_0 = 11^\circ\, 13'$$

Ez a szög a nagyobbik eltoló erőhöz tartozó irányt (u) adja meg és erre merőleges a másik főirány.

A főirányokban egységnyi eltolódást okozó erők a (13) képlet szerint:

I. szint $p_u^{I} = E\; 36{,}59 \cdot 10^{-2}$ kp/cm

$p_v^{I} = E\; 15{,}09 \cdot 10^{-2}$ kp/cm

II. szint $p_u^{II} = E\; 45{,}58 \cdot 10^{-3}$ kp/cm

$p_v^{II} = E\; 17{,}98 \cdot 10^{-3}$ kp/cm

III. szint $p_u^{III} = E\; 13{,}57 \cdot 10^{-3}$ kp/cm

$p_v^{III} = E\; 5{,}35 \cdot 10^{-3}$ kp/cm

IV. szint $p_u^{IV} = E\; 56{,}98 \cdot 10^{-4}$ kp/cm

$p_v^{IV} = E\; 22{,}78 \cdot 10^{-4}$ kp/cm

V. szint $p_u^V = 29{,}43 \cdot 10^{-4}$ kp/cm

$p_v^V = 11{,}57 \cdot 10^{-4}$ kp/cm

Az elfordulási középpont a (17), illetőleg a (18) képlet szerint:

$$y_0' = 10{,}1 \text{ cm}$$
$$x_0' = 16{,}4 \text{ cm}$$

Az egységnyi elfordulást előidéző erőpár forgatónyomatékának meghatározása a (21) képlet szerint

I. szint $M^{I} = E\,14{,}63$ kp/cm

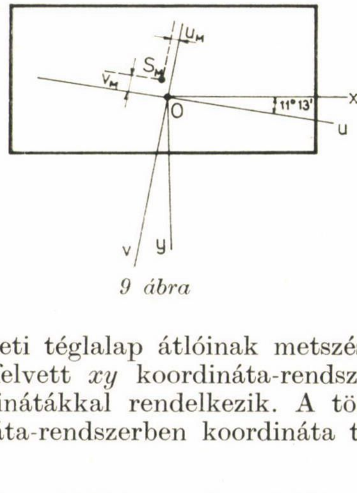
II. szint $M^{II} = E\,1{,}87$ kp/cm

III. szint $M^{III} = E\,0{,}577$ kp/cm

IV. szint $M^{IV} = E\,0{,}249$ kp/cm

V. szint $M^{V} = E\,0{,}125$ kp/cm

A *9. ábrán* feltüntettük az eddigi számítások eredményeképpen kapott eltolódási főirányokat (u, v) és az elfordulási középpontot (0). Az épület tömegét az egyes szintek magasságában vesszük fel. Esetünkben az egy szintre jutó egyenletesen megoszló tömegintenzítás $8 \cdot 10^{-3}$ kg/cm². A tömegközéppont (S_M) a keresztmetszeti téglalap átlóinak metszéspontjában van, és az elfordulási középponton felvett xy koordináta-rendszerben $x_M = -0{,}4$ cm és $y_M = -2{,}1$ cm koordinátákkal rendelkezik. A tömegközéppont koordinátái és az u, v koordináta-rendszerben koordináta transzformációval kaphatók meg:



9 ábra

$$u_M = -0{,}4 \cos 11°\,13' - 2{,}1 \sin 11°\,13' = -0{,}4 \cdot 0{,}980 - 2{,}1 \cdot 0{,}194 = -0{,}8 \text{ cm}$$

$$v_M = 0{,}4 \sin 11°\,13' - 0{,}1 \cos 11°\,13' = 0{,}4 \cdot 0{,}194 - 2{,}1 \cdot 0{,}980 = -1{,}98 \text{ cm}$$

Egy szinten koncentrált tömeg $m_i = 4{,}0$ kg.

A födémkeresztmetszet tömegének az elfordulási középpontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$J_0 = 426 \text{ kg cm}^2$$

Elvégezve a behelyettesítéseket, a (40) egyenlet szerint ω^2-re öt különböző harmadfokú egyenletet kapunk, amelyekből a következő öt ω^2 alapsajátkörfrekvencia nyerhető:

$$\omega_{I}^2 = 5{,}75 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-2}$$
$$\omega_{II}^2 = 7{,}35 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-2}$$
$$\omega_{III}^2 = 2{,}25 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-2}$$
$$\omega_{IV}^2 = 8{,}95 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-2}$$
$$\omega_{V}^2 = 4{,}45 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-2}$$

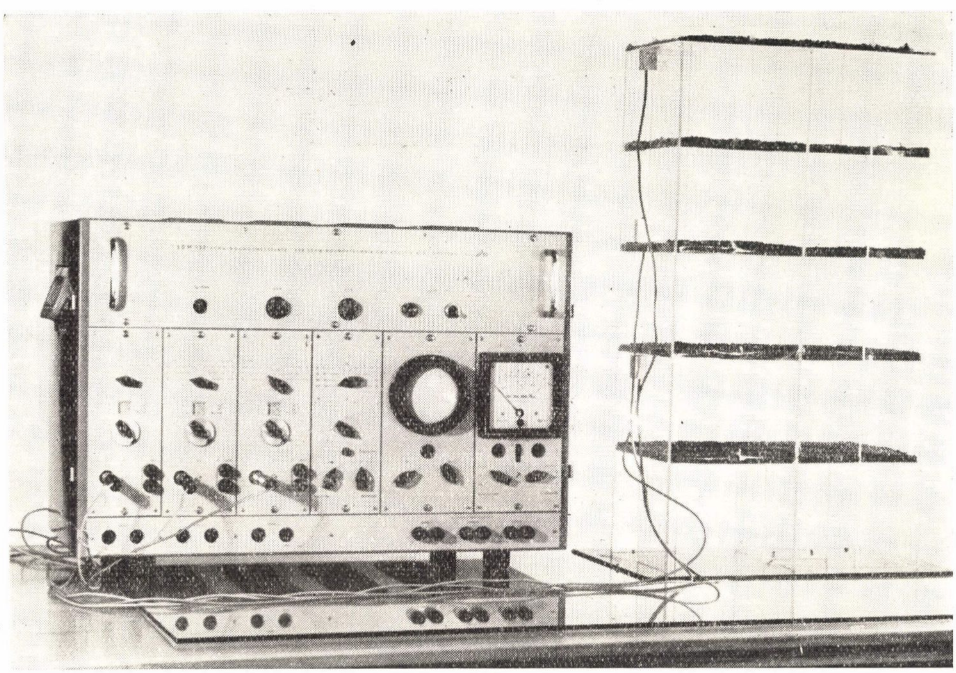
A sajátkörfrekvencia:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{2{,}75 \cdot 10^5} + \frac{1}{7{,}35 \cdot 10^4} + \frac{1}{2{,}25 \cdot 10^4} + \frac{1}{8{,}95 \cdot 10^3} + \frac{1}{4{,}45 \cdot 10^3} =$$
$$= 4{,}01 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^2$$
$$\omega^2 = 2{,}5 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-2}$$
$$\omega = 50 \text{ sec}^{-1}$$

A vizsgált modell önrezgésszáma: $N = \dfrac{50}{2\pi} = 7{,}9 \text{ sec}^{-1}$

7 Modellkísérlet

Az 6 fejezetben bemutatott számpéldában tárgyalt modellt az ott szereplő méreteknek és anyagnak megfelelően elkészítettük. Az egyes födémszinteken a számítás során figyelembe vett tömeget a szintmagasságban egyen-



1 kép

letesen elhelyezett sörét képviselte. A sörét mennyiséget úgy állapítottuk meg, hogy a födém tömege, figyelembe véve a hozzá tartozó egyéb anyagokat, 4 kg legyen. Az így kiképzett modell képe a rezgésmérő műszerrel az 1. képen látható. Az önrezgésszám mérését SDM 132 típusú elektronikus elven működő rezgésmérő műszerrel végeztük, melynek felvevőfejét a képen látható módon az egyes szintmagasságokban rögzítettük.

Az önrezgésszám meghatározására két fajta rezgést keltő hatást alkalmaztunk. Egyiknél a modellt a legfelső szintjénél vízszintes irányban meghúztuk, majd hirtelen elengedtük, másik pedig az volt, hogy a modellhez mereven hozzáerősített és egyébként mozdulatlan megtámasztásnak vízszintes irányban kis mértékű lökést adtunk. Mindkét rezgést keltő hatás ugyanazt az eredményt szolgáltatta, és a mérésekből a következők voltak megállapíthatók. A modell a két különböző gerjesztő hatásra az alaprezgésnek megfelelő alakot vette fel. Bonyolultabb rezgésalakok nem mutatkoztak. Az egyidejű hajlító és csavaró rezgések frekvenciája 9Hz volt.

IRODALOM

[1] *Bosznay, Á.*: Műszaki rezgéstan. Műszaki Könyvkiadó, 1962. Bp.

[2] *Egupov, V. K.*: Raszcset zdanij na procsnoszty usztojcsivonty i kolebanija 1965. Kiev.

[3] *Frobat, N.*: Analytische Mechanik der Schwingungen. Berlin, 1966.

[4] *Gere, J. M., Lin., Y. K.*: Coupled Vibrations of Thin Walled Beadm Open Cross Section. Journal of Applied Mechanics, 1958. szept.

[5] *Harris, C. K., Crede, Ch. E.*: Shock and Vibration Handbook. McGraw-Hill Book Comp.

[6] *Hildebrand, F. B.*: Methods of Applied Mathematics. N. Y. 1952.

[7] *Kaliszky, S.*: Vízszintes erőkkel terhelt teherhordófalas épületek számítása. Magyar Építőipar, 1964.

[8] *Major, S.*: Gép és turbinaalapok számítása és tervezése, Bp. 1956. Műszaki Könyvkiadó.

[9] *Petúr, A.*: Repülőgépek szilárdságtana. Tankönyvkiadó, Bp. 1952.

[10] *Rosman, R.*: Beitrag zur Untersuchung des Zusammenwirkens von gerecht belasteten Wändern und Stockwerkramen bei Hochbauten Beton- und Stahlbetonbau, 1963. 5. 36.

[11] *Timoshenko, S. P., Young, D. H.*: Vibration Problems in Engineering New York, 1955.

[12] *Timoshenko, S. P., Young, D. H.*: Advanced Dinamics, New York, 1948.

[13] *Vértes Gy.*: Rezgéstan. Szakmérnöki jegyzet. MTI. 1965.