

AZ EGYENLETANALÍZIS ÉS A DIMENZIÓANALÍZIS KAPCSOLATÁNAK NÉHÁNY KÉRDÉSE

1. Bevezetés

A hasonlóság-elmélet három főtétele e század első évtizedeiben fogalmazták meg és igazolták matematikailag egzakt formában [26, 27, 28]. A főtételek — a *Newton*, a *Buckingham* — *Federman* és a *Kirpicsov* — *Guhman* tételek — ma már több oldalról bizonyítottan világos formában állnak előttünk, amelyekből minden hasonlóság-elméleti meggondolás levezethető [18, 28].

A főtételek röviden a következők:

Az *első*, a *Newton-féle főtétel Ehrenfest* — *Afanassjeva* meghatározása szerint: Két ugyanolyan jellegű folyamat hasonló, amely geometriailag hasonló rendszerben játszódik le az esetben, ha a jelenséget meghatározó mennyiségek az egymásnak megfelelő pontokban mindkét rendszerben arányosak [11, 12, 13].

A *második*, a *Buckingham* — *Federman-féle főtétel P. K. Konakov* meghatározása szerint: Adott folyamatot jellemző dimenzió nélküli mennyiségek ugyanazok, akár a folyamatot leíró differenciálegyenletekből, akár azok integráljaiból vezetjük le őket [27, 28].

A *harmadik főtétel M. V. Kirpicsov és A. A. Guhman* meghatározása szerint: A hasonlóság szükséges és elégséges feltétele az, hogy a két folyamatot jellemző, egymásnak megfelelő összes dimenzió nélküli számok egymással egyenlők legyenek [18, 27, 28].

Mint látható, az első és harmadik főtétel a hasonlóság fogalmát, a szükséges és elégséges feltételeit definiálja. A fentieket figyelembe véve különösnek tűnik az a tény, hogy gyakran a három főtételt, vagy annak egyikét figyelmen kívül hagyják a hasonlóság-elméleti következtetéseknél. Gyakran csupán az egyes dimenzió nélküli számok invarianciájának kérdéseivel foglalkoznak, ami feltétlenül szükséges, azonban semmiképpen nem lehet elegendő. Az ilyen szemlélet mellett a probléma lényege háttérben marad. Ugyanis az egyes, egymásnak megfelelő dimenzió nélküli számoknak a különböző méretű rendszerekben való egyenlősége a kérdéses természeti folyamatot leíró egyenlet invarianciájának csupán a feltételei egyenleteit képezi. (Megjegyezzük, hogy az invariancia fogalmán az egyes dimenziós, vagy dimenzió nélküli számoknak, vagy függvényeknek meghatározott transzformációval szemben való változatlanságát értjük [20].) Amennyiben tehát egymáshoz hasonló jelenségeket kívánunk előállítani, úgy elsődlegesen a folyamatot leíró egyenlet, vagy egyenletrendszer invarianciáját kell biztosítani (a kezdeti és a kerületi feltételek figyelembevételével) hasonlósági transzformációval szemben.

Hasonlósági transzformáción — mint ismeretes — olyan leképzési módot értünk, amelynél a tetszőleges x' változóról az x'' változóra az $x' = \lambda_x x''$

összefüggéssel térünk át, ahol a λ_x egy arányossági tényező, helyesebben hasonlósági *transzformációs paraméter*. Megjegyezzük, hogy a vízépítőmérnöki gyakorlatban λ -t *átszámítási tényezőnek* is nevezik. Az egyenletek invarianciájának természetesen feltételei vannak. A hasonlósági transzformáció alkalmazása esetén feltételi egyenletek gyanánt az egymásnak megfelelő dimenzió nélküli számok egyenlősége adódik.

Az a tény, hogy a kismintakísérletezésnél sokszor csupán az egyes dimenzió nélküli számokat elemzik, azzal is magyarázható, hogy a folyamatot leíró összefüggések matematikai alakban nem mindig ismertek. A másik ok talán a dimenzió nélküli számok mechanikus jellegű képzési módja. Ugyanis — mint ismeretes — dimenzió nélküli számok képezhetők (többek között) azonos dimenziójú mennyiségek (pl. erők, energiák stb.) arányba állításával, vagy dimenzióanalízis alkalmazásával is. Az említett két módszer különösen mechanikus képzési szabályaival tűnik ki, aminek hatására a probléma lényege könnyen háttérbe szorulhat.

A hidraulikai, hidromechanikai feladatok hasonlóság-elméleti vizsgálatánál — különösen hazai vonatkozásban — a *Froude*, a *Reynolds*, a *Cauchy* — *Rayleigh* és a *Weber* számokat említik elsődlegesen, amelyekkel egyes átszámítási feladatok több-kevesebb pontossággal megoldhatók. Így az említett dimenzió nélküli számok a kísérletezők tudatában különös jelentőségűvé váltak a folyamatot jellemző összefüggések háttérbe szorítása mellett. Ez a szemlélet az évtizedek során erősen berögződött. Sajnos a gyakorlatban elég ritkán történik meg az alkalmazott modelltörvény érvényességének kísérleti igazolása, pedig több-léptékben végzett modellkísérletek alapján, vagy a megépített főkiviteli műtárgyon végzett mérések segítségével erre általában lehetne módot találni.

A hasonlóság-elmélet fő nehézsége a hasonló jelenségek kritériumainak kielégítése. Különösen a *Kirpicsov*—*Guhman*-tétel betartása okoz súlyos problémát, amely a hasonlóság szükséges és elégséges feltételeit definiálja. A nehézséget az a tény okozza, hogy a folyamatot leíró egyenletek invarianciájának feltételét képező, egymásnak megfelelő dimenzió nélküli számok egyenlősége egyidejűleg nem tartható be kivétel nélkül. Ez a tény indokolta az ún. *közelítő modellezés* bevezetését, mikoris csupán a folyamatra jellemző leglényegesebb dimenzió nélküli számokat (esetleg csupán egyet) tekintik a hasonlóság feltételi egyenleteinek [18].

Az utolsó évtizedben több ésszerű kezdeményezés történt, különösen a szovjet kutatók részéről a hasonlóság-elmélet alkalmazásából adódó nehézségek kiküszöbölésére [28]. Korábbi tanulmányainkban mi is kísérletet tettünk a problémakör felülvizsgálatára [19, 20, 21]. A vonatkozó szakirodalom tanulmányozása során megállapítható, hogy az újszerű kezdeményezések világviszonylatban két fő kérdés-csoport köré csoportosíthatók. Ezek: az *egyenletanalízis* és *dimenzióanalízis*.

Jelen tanulmányunk célját a következőkben foglalhatjuk össze: az egyenletanalízis és a dimenzióanalízis kialakulása fontosabb történeti állomásainak figyelembevételével párhuzamot vonunk e fenti két jelentős kutatási módszer között. Rámutatunk részleges azonosságukra és különbözőségeikre. Ennek kapcsán megkíséreljük a korábbi tanulmányainkban bevezetett *invariáns függvény* fogalmának beillesztését az egyenletanalízis fogalomkörébe. Végül körvonalazzuk a további kutatások munkaprogramját.

2. Egyenletanalízis

Az egyenletanalízisnek, mint egzakt hasonlóság-elméleti módszernek az alkalmazása *J. Bertrand* munkásságáig vezethető vissza. *Bertrand* 1848-ban megjelent tanulmányában fektette le az egyenletanalízis alapjait [3]. A módszer rendszeres, matematikai alapokon történő kifejtése azonban csak a XX. század első évtizedeiben történt. *T. A. Ehrenfest* – *Afanassjeva* ma már klaszszikusnak nevezhető tanulmányaiban elméleti, matematikai módszerekkel fejtette ki az egyenletanalízis legfontosabb tételeit, amelyek a hasonlóság-elmélet alapvető elgondolásait is tartalmazzák [11, 12, 13].

Az egyenletanalízis gyakorlati, modellkísérleti feladatok megoldásában való alkalmazásának szélesebbkörű elterjedése nagymértékben szovjet kutatók érdeme. Különösen *M. V. Kirpicsov* akadémikus és iskolája játszott ebben fontos szerepet. *M. V. Kirpicsov*, *P. K. Konakov* és *A. A. Guhman* különösen hőtechnikai problémák modellezési kérdéseit vizsgálták egyenletanalízis segítségével [27, 28]. A szovjet kutatók vezették be – tudomásunk szerint először – az egyenletanalízis két formájának, a hasonlósági transzformációk és a saját léptékek módszerének a megkülönböztetését. A hasonlósági transzformációk módszerének alkalmazása az $x'/x'' = \lambda_x$ homogén lineáris transzformáció alkalmazását jelenti, ahol az egyvesszős és kétvesszős mennyiségek a hasonló rendszerek egymásnak megfelelő pontjaiban érvényes tetszőleges x változó értékeit jelölik. A saját léptékek módszerének alkalmazásakor pedig egy és ugyanazon rendszeren belül két azonos jellegű változó hányadosával számolunk (két jellemző hosszúság, sebesség stb.). Ezen utóbbi eljárás lényegét tekintve mérés, csupán ezúttal nem egy konvencionális mennyiséghez, hanem egy – a vizsgált rendszerre jellemző – valamely kiválasztott mennyiséghez viszonyítjuk a többi azonos dimenziójú mennyiséget.

Vizsgáljuk meg a továbbiakban az egyenletanalízis alapelvét. Mint ismeretes, az egyes természeti folyamatok matematikai formában egyenlettel, egyenletrendszerrel írhatók le. A jelenségek alapegyenletei (gyakran differenciál- vagy integrálegyenletek), amelyek kifejezik az alapvető fizikai megfontolásokat, a vizsgált folyamat mechanizmusának matematikai modelljeit. Az alapegyenletek azonban csupán a folyamat belső vonásait rögzítik. Az egyes rendszerek elemei azonban nemcsak egymással, hanem általánosságban a külső környezettel is kapcsolatban vannak. Az alapegyenletek ezt a külső kapcsolatot nem tükrözik. Azokat az ismereteket, amelyek egyértelműen meghatározzák a rendszer környezettel való kölcsönhatásának viszonyait, határ-(kerületi-) feltételeknek szokás nevezni. Azonban a rendszernek egy meghatározott időpontban meglevő állapotával kapcsolatos probléma sem vizsgálható csupán az alapegyenletek segítségével. Ezért indokolt a kezdeti feltételek megadása. A határ- és kezdeti feltételek képezik együttesen a probléma megoldásának egyértelműségi feltételeit.

Tehát az alapegyenletek a jelenségek sokaságát írják le. Az alapegyenletek a jelenségeknek azt a belső oldalát tükrözik, amely az egész sokaságra jellemző. Az egyedi jelenség konkretizálásához az egyértelműségi feltételek ismerete szükséges [18]. Az egyenletanalízis tulajdonképpen a rendszert leíró egyenlet, vagy egyenletrendszer olyan általános elemzési módszere, amellyel különböző transzformációkkal szemben történő viselkedésüket vizsgáljuk, az egyértelműségi feltételek figyelembevételével. Így merül fel elsősorban az invariancia fogalma.

Az invarianciaelvek biztosítják azt, hogy az egyes (időben, térben stb. különálló) események között kapcsolatokat állapítsunk meg. Az invarianciaelvek minden esetben valamilyen transzformációkkal együtt értelmezhetők. Legáltalánosabb transzformációk közé tartoznak pl. a térbeli (euklideszi transzformációk) és az időbeli eltolások, mikor is az egyvesszős események más helyen, illetőleg más időben zajlanak le, mint a kétvesszős események. Az említett két invarianciaelv érvényessége természetszerű és egyszerűen belátható.

Azonban nem minden invarianciaelv érvényessége ennyire kézenfekvő. A természettudományok fejlődése során a technikai igényeknek megfelelően a problémák megoldásának matematikai nehézségei a modellkísérletezés irányába fordították a figyelmet. Ennek eredményeképpen kialakuló hasonlóság-elmélet, amely ma az egyenletanalízis egyik legegzezaktabb módon definiált területe, egyre szélesebb körben elterjedt a legkülönbözőbb típusú feladatok modellkísérleti megoldásában.

A hasonlóság eredendően geometriai fogalom, amely a hasonlósági transzformáció révén azonban nemcsak geometriai, hanem tetszőleges fizikai mennyiségekre is vonatkoztatható. Ezért beszélhetünk a geometriai hasonlóság mellett dinamikai, hőtani stb. hasonlóságról. Általánosságban, ha tetszőleges változó (térbeli, időbeli stb.) eloszlása, mint fizikai mező értelmezhető, úgy beszélhetünk a *fizikai mennyiségek mezőinek hasonlóságáról* [10].

A fizikai mezők hasonlóságának azonban feltételei vannak, és a feltételei egyenletek éppen az egyenletanalízissel határozhatók meg. Ugyanis abból indulhatunk ki, hogy a hasonló jelenségeket leíró egyenletek hasonlósági transzformációkkal szemben invariánsak. Tehát az egymáshoz hasonló (egyvesszős és a kétvesszős) eseményeket leíró egyenletek a hasonlósági transzformáció alkalmazása esetén sem változtathatók meg alakjukat. Ezen megállapítás alapján a hasonlóság feltételei a folyamatot leíró alapegyenletekből (és egyértelműségi feltételekből) kifejezhetők [18, 28].

Az alapegyenletek és egyértelműségi feltételek ismerete alapján tehát a hasonlósági feltételek meghatározhatók. Ezeknek matematikai alakját struktúráját, természetszerűleg az alapegyenletek és az egyértelműségi feltételek határozzák meg. E megállapításból mély elvi következtetések tehetők a hasonlóság második főtétele alapján, miszerint a változók száma csökkenthető a dimenziós rendszerről a dimenzió nélküli rendszerre történő áttéréssel. Ezért tekinthető elvileg helyesebbnek — a jelenségek hasonló rendszerekre történő általánosításakor — az összefüggéseknek dimenzió nélküli alakban történő felírása. Ennek előnyei az alábbiakban foglalhatók össze:

1. A dimenzió nélküli formában felírt homogén egyenletek a kísérleti, mérési eredmények nagyfokú *általánosítását* jelentik, mivel a dimenzió nélküli összefüggések hasonló rendszereket definiálnak. Hiszen az egyes dimenzió nélküli számok adott értékei az azokban szereplő egyes dimenziós változók elvileg végtelen sokaságának különböző kombinációjából adódhatnak. Ez pedig azt jelenti, hogy a probléma dimenzió nélküli változókkal történő vizsgálata nem egyetlen konkrét eset elemzése, hanem a közös tulajdonságokkal rendelkező hasonló jelenségek sokaságának vizsgálata.

2. A dimenzió nélküli összefüggések felírásának eredményeképpen *csökken a változók száma* a dimenziómatrix rendszámának megfelelően. A feladatok dimenzió nélküli formában történő elemzése teszi lehetővé azt, hogy az egyes tényezők (pl. dimenziós változók) hatását nem elszigetelten, hanem

összességében vesszük figyelembe. Ezen túlmenően a kísérleti adatok matematikai feldolgozása is lényegesen egyszerűsödik.

3. A fentiekből kifolyólag a dimenzió nélküli összefüggések általában *modellkísérletek útján meghatározhatók*. Ez adott esetben a kísérleti költség jelentős csökkenését eredményezheti.

4. A dimenzió nélküli formában felírt összefüggések gyakran módot adnak arra, hogy a vizsgált jelenség egy meghatározott (esetleg speciális) fázisát *jellemző dimenzió nélküli számot meghatározzuk* (pl. a lamináris áramlásból a turbulens áramlásba történő átmenetnél a *Reynolds*-szám, áramló állapotról a rohanó állapotba való átmenetnél a *Froude*-szám).

5. Végül, de nem utolsósorban elkerülhetjük azt a *hibalehetőséget*, ami az inhomogén egyenletek alkalmazásánál akkor adódik, ha a változók szám-szerű behelyettesítésénél nem az előírt mértékegységrendszert alkalmazzuk. Ugyanis inhomogén egyenletek esetében a számszerű állandók csak meghatározott mértékegység-rendszer esetében érvényesek.

A továbbiakban konkrét feladatot említünk meg az egyenletanalízis egy érdekes alkalmazásáról, ugyanakkor rámutatunk annak néhány hiányosságára.

1956—57-ben *H. A. Einstein* és *Ning Chien* vezettek be figyelemre méltó módszert mozgómedrű folyók torzított kismintái hasonlósági feltételeinek számítására [9, 14]. Ezen eljárásnak az alapja is elsődlegesen az egyenletanalízis. Kilenc feltételi egyenlettel jellemzik a folyamatot, amely egyenletekben tíz független transzformációs paraméter (ún. átszámítási tényező) szerepel. A feltételi egyenletek részben a vizsgált folyamat meghatározott oldalát jellemző törvényszerűségek egyenlet formájában (mint pl. a *Manning*-féle összefüggés), részben pedig egymásnak megfelelő dimenziómentes számok egyenlősége (mint pl. $Fr' = Fr''$).

A módszer hiányossága *elvi szempontból* az, hogy nem tesz különbséget a fent említett alapvetően két különböző feltételi egyenlet-típus között. Pedig a különbség lényeges. Hiszen pl. a $Fr' = Fr''$ -nek a feltételi egyenletek sorába történő felvétele a vizsgált természeti folyamat egy meghatározott oldalát jellemző belső összefüggésnek (pl. a *Navier—Stokes* differenciálegyenletek) a nehézségi és a tehetetlenségi erők hatását kifejező tagjai figyelembevételét jelenti. Ennek következtében még az alábbi kérdések is jogosan felvethetők.

Azon természeti törvényt kifejező összefüggésnek (pl. a *Navier—Stokes* differenciálegyenletnek) amelyeknek, egyik, invarianciát biztosító feltétele a $Fr' = Fr''$ egyenlőség, vajon elhanyagolható-e a többi tagja, illetőleg a többi feltételi-egyenlet (pl. a *Reynolds*-szám: $Re' = Re''$)? Vagy csupán azért nem vesszük azt figyelembe, mivel a többi feltételi egyenletből adódó következtetéssel össze nem egyeztethető követelményt állít. A fentiek röviden azt jelentik, hogy a kilenc egyenletből álló rendszer nem feltétlenül teljes, sőt a folyamatot alapvetően jellemző valamely egyenlet helyett annak invarianciáját biztosító feltételei közül csupán egyet vettünk számításba az egyenletanalízis során. Ily módon az sem bizonyos, hogy a kilenc feltételi egyenlet egymástól független-e vagy sem.

Helyesen akkor járunk el, ha felírjuk a kérdéses folyamatot jellemző egyenletet, vagy egyenletrendszert a kezdeti és kerületi feltételekkel együtt és az ismert módok egyikével (a hasonlósági transzformációk, vagy a saját léptékek módszerével) meghatározzuk az egyenletek invarianciájának feltételeit, amelyek a továbbiakban a méretnövelés feltételi egyenleteit fogják képezni.

H. A. Einstein és Ning Chien módszerével kapcsolatban gyakorlati szempontból még megemlíthetjük, hogy a feltéti egyenletek nagy száma nem mindig eredményez nagyobb pontosságot. Hiszen a különböző egyenletek (akár elméleti, akár kísérleti úton levezetett összefüggések legyenek azok) különböző érvényességi feltételek mellett adnak helyes eredményt. Ennek következtében az egyes egyenletek érvényességi tartománya sem biztos hogy azonos. Ezért komplexebb feladat esetében célszerűbb lehet a modellezési főfeladat részfeladatokra történő bontása, mikor is a részproblémák modellezése és hasonlóság-elméleti vizsgálata már egyszerűbben és pontosabban megoldható. Ezt egyébként számos kísérlet is igazolta a gyakorlatban.

Az utóbbi években hazánkban Ivicsics Lajos ismertetett a szakirodalomban egy elgondolást, amellyel a klasszikus hasonlóság-elmélet „ellentmondásait” kívánja kiküszöbölni [25]. Az ún. *rokonjelenségek* fogalmán alapuló eljárás szintén az egyenletanalízis témakörébe tartozik.

Korábbi tanulmányainkban kísérletet tettünk néhány újszerű gondolat felvetésére, amelyek szintén az egyenletanalízis témakörében tárgyalhatók [19, 20, 21]. Az egyenletanalízis módszerének megfelelően a vizsgált természeti folyamatot leíró alapegyenletekből és egyértelműségi feltételekből indulunk ki. Bevezettük az *invariáns függvény* fogalmát, amelyen általánosságban egy tetszőleges természeti folyamatot leíró olyan függvénykapcsolatot értünk, amely meghatározott transzformációval szemben változatlan. Hasonlósági transzformációk alkalmazása esetén invariáns függvény gyanánt dimenzió nélküli függvénykapcsolat adódik. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy a dimenzió nélküli függvények fogalma újszerű lenne, hiszen azokat már több évtizede eredményesen alkalmazzák különböző természeti folyamatok jellemzésére. Az invariáns függvény fogalma ennél általánosabb, amint azt korábbi tanulmányaimban részletesen kifejtettem [21, 22]. Az invariáns függvény fogalmának a bevezetésével (és magával az elnevezéssel is) hangsúlyozni kívánjuk a probléma lényegét, a jelenséget leíró egyenleteknek az invarianciáját. Az invariáns függvényt (az egyértelműségi feltételekkel együtt) tekintjük — hasonlósági transzformáció esetén — a hasonlóság, általában pedig a méretnövelés feltéti egyenletének az invariancia feltételei egyenleteivel együtt. Ugyanakkor nem írjuk elő azt, hogy az invariáns függvényt alkotó egyenes, egymásnak megfelelő dimenzió nélküli számok értékei minden esetben kivétel nélkül azonosak legyenek a különböző rendszerekben. Hiszen ezt általában nem is tudjuk megvalósítani, mivel éppen ez jelenti a harmadik hasonlósági főtétel alkalmazásának a bevezetőben már említett nehézségeit. Ezek megoldásának módjai elgondolásunk szerint az alábbiaknak megfelelően csoportosíthatók:

1. a) A hasonlósági *transzformációs paraméterek* (az ún. átszámítási tényezők) értékeinek *célszerű felvétele* a konkrét feladat esetében az adott szabadsági fok figyelembevételével.

b) A folyamatot leíró alapegyenlet, illetőleg az *invariáns függvény speciális alakban történő felírása* esetén hasonlósági transzformáció alkalmazásával.

c) Az a) és b) pontokban foglaltak *célszerű kombinációja*.

2. A hasonlósági transzformációtól eltérő *egyéb transzformáció típusok alkalmazása* az 1. a)–c) pontokban, a hasonlósági transzformáció esetében tett megfontolások értelemszerű figyelembevételével.

A továbbiakban tekintsük végig a felsorolt pontokban foglalt lehetőségeket.

1. a) Az egyes transzformációs paraméterek célszerű felvételével a hasonlóság feltételi egyenleteiből egyidejűleg több is figyelembe vehető. Ebbe a csoportba lehet sorolni azokat a megoldásokat, amelyek *a különböző méretű rendszerekben eltérő fizikai jellemzőkkel rendelkező anyagot, kontinuumot alkalmaznak, vagy pl. valamilyen geometriai, vagy egyéb torzítást vezetnek be.* E módszerrel gyakran elérhető a szabadsági fok számának növelése a transzformációs paraméterek megválasztásánál. A módszert egyébként elterjedten alkalmazzák a modellkísérletezésben. Ezt az eljárást alkalmaztuk korábban megjelent tanulmányainkban a talaj kapilláris tartományában végbemenő szivárgási folyamat hasonlósági feltételeinek a meghatározására [23].

b) Sok esetben a kérdéses folyamatot leíró alapegyenlet, vagy *invariáns függvény speciális alakja is* lehetőséget nyújthat a hasonlóság feltételi egyenleteinek egyszerűsítésére. Ilyen szempontból kiemelkedő helyet foglalhatnak el a *hatványszorzat alakú összefüggések.* Az elgondolás gyakorlati megvalósítása a következőképpen történhet.

Elméleti, vagy kísérleti úton meghatározzuk a kérdéses jelenséget leíró dimenzió nélküli függvénykapcsolatot — az invariáns függvényt — hatványszorzat formájában, amelyben az egyes dimenzió nélküli számok egy-egy változóként szerepelnek. Természetesen itt elsősorban az a kérdés vetődik fel, hogy a kapcsolat felírható-e hatványszorzat alakban. Ezt a kérdést általánosságban eldönteni nem lehet. A tapasztalat nagyon sok esetben azt mutatja, hogy a jelenségek hatványszorzat alakú összefüggései jellemezhetők. Ezt igazolja az is, hogy a műszaki tudományok legkülönbözőbb területein (leggyakrabban empirikus formában) felírt dimenziómentes összefüggések (amelyeket a szovjet szakirodalom alapján *kritériumos egyenleteknek* neveznek) sokszor hatványszorzat alakúak. Amennyiben pl. kísérleti úton megállapítjuk, hogy a jelenségek hatványszorzat alakban matematikailag nem írhatjuk le, úgy még mindig van lehetőségünk a megoldásra.

Ugyanis a vizsgált jelenség egy *szűkebb tartományának*, vagy csupán egy meghatározott oldalának vizsgálatával a problémát egyszerűsíthetjük: a folyamat általánosabb jellemzésétől eltekinthetünk. Ennek mértéke természetesen csak adott esetben határozható meg. Ily módon elérhető az, hogy a szűkebb jelenségtartomány vizsgálata esetében egyszerűbb, pl. hatvány szorzatú alakú kapcsolattal dolgozhatunk. Tehát a jelenségek általánosabb alakban történő vizsgálatáról a speciálisabb, szűkebb tartomány felé való eltolódás egyszerűsítheti a modellezési problémákat.

A hatványszorzat alakú dimenzió nélküli összefüggések a hasonlósági feltételek meghatározásánál való alkalmazásának előnye az, hogy a transzformációs paraméterek között a kapcsolat egyszerűen meghatározható. A jelenséget leíró, törvényszerűséget kifejező, hatványszorzat alakú dimenzió nélküli kapcsolat invarianciájának biztosítására nem kell előírni azt, hogy a benne szereplő összes — a hasonló rendszerekben egymásnak megfelelő — dimenzió nélküli szám értéke azonos legyen. Ez lényeges előnyt jelent, mivel az invariancia feltételi egyenleteinek száma csökken, és így a transzformációs paraméterek megválasztásánál a szabadsági fok száma nagyobb lesz.

Korábbi tanulmányainkban erre a lehetőségre már több alkalommal rámutattunk [20, 24]. Szennyvíztisztító telepek levegőztető medencéiben végbemenő oxigéndiffúziós folyamatok vizsgálatánál — két különböző méretben megépített geometriailag hasonló berendezések alkalmazásával — a fenti elgondolásnak az adott esetben való érvényességét kísérletileg is igazoltuk [24].

c) Az a) és b) pontokban kifejtett elvek értelemszerűen együttesen is alkalmazhatók. Erre különösen akkor kerülhet sor, amikor a kérdéses folyamat kettő, vagy több hatványszorzat alakú egyenlettel — egyenletrendszerrel — jellemezhető.

2. Az 1a)–c) pontokban foglaltakhoz viszonyítva teljesen újszerű utat követhetünk, ha a *hasonlósági transzformáció helyett más transzformáció típusát alkalmazunk*. Ez a gondolat M. V. Kirpicsov és P. K. Konakov munkáihoz vezethető vissza [28], aminek nyomán a szovjet kutatók jelenleg is foglalkoznak a megoldás lehetőségeivel. Hazai viszonylatban Kirpicsov és Konakov elgondolásai alapján Fáy Gyula és Zselev Borisz is felvetették a transzformáció-elmélet — a Lie-féle transzformációk — alkalmazásának a kérdését [15], azonban gyakorlati alkalmazásra — tudomásunk szerint — ezideig még nem került sor.

A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályán 1962. október 24-én „Kismintavizsgálatok a vízgazdálkodásban” címmel tartott ankéton hozzászólásomban felvettem az invariáns függvény fogalmának bevezetése kapcsán az általános transzformáció-elmélet alkalmazásának a lehetőségét. A későbbiekben megjelent tanulmányainkban e kérdéssel kapcsolatban néhány további gondolatot ismertettünk [21, 22]. Ezúttal ismét e gondolatmenethez kívánunk csatlakozni.

Mindenekelőtt megállapítható, hogy a transzformáció-elméletnek a modellkísérletek elvi alapjaként történő alkalmazásával további lehetőségek nyílnak a modellezés területén. A *hasonlóság-elmélet modellelméletté általánosítható* a hasonlósági transzformációnak más — esetleg bonyolultabb — transzformáció típusokkal történő helyettesítésével [21]. Az operátorszámításnak itt jelentős alkalmazási területe nyílik, mivel az alapegyenletek gyakran pl. differenciálegyenletek formájában jelentkeznek. Ezért — a hasonlósági transzformációk esetének megfelelően — a differenciáloperátorok által kifejezett művelet az alkalmazott transzformációtípus szerint értelmezendő, illetőleg fejezhető ki.

A leképezések között elsődlegesen a Lie-féle folytonos transzformációk jöhetnek szóba, amelyeknek speciális esete a hasonlósági transzformáció. Adott esetben alkalmazni és értelmezni lehet a komplex függvénytan alapján a *konform leképezést is* mint matematikai modellezést.

A konform képzés esetében — mint ismeretes — az alak csupán elemeiben marad hasonló, és az egyes leképzett alakzatok már nem feltétlenül hasonlóak. Modellelméleti szempontból (matematikai) modellnek és főként a w , illetőleg a z síkok felelnek meg és a köztük levő kapcsolatot a $w = f(z)$ analitikus függvény adja meg egyértelműen. Ily módon minden ortogonális hálózat egy, vagy több transzformációval visszavezethető a legegyszerűbb ortogonális hálózatra, a két egymásra merőleges párhuzamos egyenesekből álló négyzetrácsra, ami kinematikailag egyenes vonalú egyenletes mozgásnak felel meg. A véges méretű idomokra konform leképzéssel általában azért nem terjeszthető ki a hasonlóság, mert a dw/dz értéke csak a pont elemi környezetében állandó. Azonban a hasonlósági transzformáció is felírható ily módon a $w = a \cdot z$ alakban. Az additív transzformáció pedig $w = z + (a + ib)$.

Ismétlen hangsúlyozzuk, hogy az általános transzformáció-elméletnek az egyenletanalízisbe történő bevonásával a modellkísérletezésnek egészen új útjai és távlatai nyílnak meg. A fentiek figyelembevételével a hasonlóság-elmélet általánosításaként — egyéb transzformációk alkalmazásával — a modellelmélet, és minden valószínűség szerint a hasonlóság három főtételének

megfelelően a modellelmélet főtételei is értelmezhetők. Ennek matematikai igazolása különböző transzformációk esetén a jövő kutatási feladatai közé tartozik.

Megemlítjük még, hogy az invariáns függvény fogalmán alapuló modellezési elgondolás lényegileg az egyenletanalízis (a hasonlóság-elmélet), a csoport-elmélet és a transzformáció-elmélet ismert és bizonyított tételein nyugszik. Ilyen értelemben csupán az elgondolás szintézisét tekintjük újszerűnek.

Az egyenletanalízis kérdésével kapcsolatos gondolatsor befejezésekképpen az *analógia* és a *matematikai modellezés* kérdését vizsgáljuk meg röviden.

A hasonlóság kérdésének elemzésénél hangsúlyoztuk azt, hogy a hasonló jelenségek esetében az egymásnak megfelelő változók fizikai, kémiai stb. tartalma teljes egészében azonos. Az analógiák esetében azonban — mint ismeretes — az egymásnak megfelelő változók tartalma, jellege részben, vagy teljes egészében különbözik egymástól. Ennek megfelelően a hasonlósági kapcsolatban álló modellek (rendszerek) az analóg modellek speciális eseteinek foghatók fel, mikor is az alapegyenletben szereplő matematikai jelek, szimbólumok, fizikai, kémiai stb. értelmezése a különböző rendszerekben azonos [22]. A lényeg — amit kiemelni szándékozunk — az, hogy *mind a hasonló, mind az analóg jelenségeket egyaránt az egyenletanalízis szemszögéből lehet vizsgálni* és e leképzési módok között ily módon összefüggés állapítható meg. A hasonló és az analóg rendszerek legfontosabb közös jellemzője az alapegyenletek (és egyértelműségi feltételek) invarianciája. Ez a felismerés ad lehetőséget arra, hogy a hasonló és az analóg rendszereket egységes szempontok szerint osztályozzuk [22].

A modellezés, a modellalkotás kérdése még jobban általánosítható a *matematikai modellek* alapján. Ugyanis a matematikai kapcsolatok a természeti jelenségek sajátos tükörképei, és ilyen vonatkozásban — a legáltalánosabb modellalkotás értelmében — *a matematika egyenletei modelleknek tekinthetők*. A fentiekben tett megállapításokból kitűnik, hogy mind az analóg, mind a hasonlósági modellek alapja bizonyos matematikai összefüggések fennállása. A matematikai kapcsolatok többnyire differenciálegyenlet formájában az analógia és a hasonlóság feltételeit kiadó egyenleteknek tekinthetők.

A matematikai modellek jellegüknél fogva lényegesen absztraktabbaknak tekinthetők, mint pl. a fizikai modellek. De ebből az is következik, hogy általánosabb, átfogóbb tulajdonságokkal rendelkeznek. A természeti jelenségek szélesebb körét jellemezheti, illetőleg definiálhatja kvantitatíve egy-egy általános összefüggés. *Lenin* a „Materializmus és empiriokriticismus” c. művében ezt a következőképpen fogalmazta meg: „A természet egysége a jelenségek különböző területeire vonatkozó differenciálegyenletek meglepő analógiájában nyilvánul meg”. *Leninnek* ez a megállapítása tekinthető az analógia és a hasonlóság ismeretelméleti alapjának.

A matematikai modellek a kérdéses jelenségnek csupán bizonyos oldalát tükrözik hűen, amiből az következik, hogy a jelenség és a matematikai tükörképe közti megfelelés csupán bizonyos határokon belül, közelítéssel áll fenn. Az eltérés a jelenség és a matematikai modell között az alábbiakban nyilvánul meg: A matematikai formát, a modellt absztrakció útján alkotjuk meg, miközben a jelenség lényeges tulajdonságait kiemeljük, figyelembe vesszük, az adott esetnek megfelelő lényegtelen oldalakat pedig elhanyagoljuk. A jelenségek és matematikai modelljeik között fennálló eltéréseknek általában ez az absztrakció, idealizálás a legjelentősebb oka. Továbbmenően: a matematikai

egyenletek mindig tartalmaznak mérésekből származó mennyiségeket (különösen vonatkozik ez az empirikus összefüggésekre), mikor is a mérésekből, a megfigyelésekből származó hibák is hozzájárulnak az említett eltéréshez. Végül a matematikai egyenletek megoldásai gyakran közelítő jellegűek.

Az említett szempontok fokozott kiküszöbölésével természetesen egyre adekvátabb modellek alkothatók. Sok esetben azonban — pl. az absztrakció fokának csökkentésével — erősen komplikált összefüggésekhez jutunk, amelyeknek gyakorlati alkalmazása nehezebb. Ennek következményei és ebből fakadó nehézségek a matematikai és fizikai modellezés esetén egyaránt fellépnek.

3. Dimenzióanalízis és annak az egyenletanalízissel való kapcsolata

A szakirodalom tanulmányozása során megállapítható, hogy a hasonlóság-elmélet és a dimenzióanalízis párhuzamosan fejlődött ki. Ahhoz, hogy e két fontos kutatási módszer között levő viszonyt tárgyalhassuk, — az egyenletanalízis kérdésének elemzéséhez hasonlóan — célszerűnek tartjuk a dimenzióanalízis kialakulásának főbb állomásait röviden megemlíteni.

J. Fourier 1822-ben ismertette a fizikai egyenletek homogenitásával kapcsolatos fontos megállapítást, miszerint a *Gauss*-féle mértékegység-rendszerben felírt egyenletekben az összeg tagjai azonos dimenzióval rendelkeznek, és transzcendens függvény esetében az argumentum dimenzió nélküli [17]. Az egyenletek homogenitására vonatkozó ezen megállapítást *Fourier*-szabálynak nevezik. *J. Bertrand* 1878-ban megjelent tanulmányában és a Francia Akadémián megtartott előadásában kiegészítette *Fourier* megállapítását: minden helyesen felírt egyenlet — függetlenül a szerkezetétől — homogén [4]. A homogenitás miatt az egyenletek dimenzió nélküli alakra hozhatók. *Bertrand* kifejtette, hogy az egyes dimenzió nélküli számok, nemcsak egyenletanalízissel, hanem az egyes mennyiségek dimenzióinak elemzésével is meghatározhatók. A fentiek szerint a dimenzióanalízis kialakulása *Bertrand* munkásságával kezdődött. Megjegyezzük, hogy a *dimenzióanalízis* (Dimensional Analysis) elnevezés *P. W. Briggantól* származik, aki 1922-ben megjelent könyvében először foglalta össze részletesen a módszer alapelveit és alkalmazási lehetőségeit [6].

A XX. század első évtizedétől kezdődően már a természettudományok legkülönbözőbb területein alkalmazták a dimenzióanalízis módszerét, gyakran különböző matematikai, számítástechnikai fogások bevezetésével.

Apell és *d'Hauterville* a mechanikában alkalmazták a dimenzióanalízist eredményesen. Az *Apell*-féle módszer lényege abban áll, hogy a transzformációs paraméterek célszerű megválasztásával a fizikai mennyiségeket egységnyi értékűre transzformálják [1, 2].

A hasonlóság-elmélet és a dimenzióanalízis történetének jelentős állomása volt az 1912–14-es időszak. Ekkor tette közzé *A. Federman* a második hasonlósági főtétel matematikai bizonyítását, ami a dimenzióanalízisnek is alapját képezi [16]. 1914-ben *E. Buckingham* ismertette a tételt speciálisabb esetre vonatkozóan [7]. Módszerének jellegzetessége az a feltevés, hogy a folyamatot leíró alapegyenlet hatványszorzatok összegéből áll, és a tagok egyenként csupán egyetlen leszármaztatott (nem alapdimenzióval bíró) dimenziós mennyiséget tartalmaznak. Ebből a feltételezésből adódik *Buckingham* módszerének az alapelve, miszerint a folyamatot jellemző dimenzió nélküli mennyiségek száma

a lezármaztatott mennyiségek számával azonos. Természetesen ezen megállapítás általánosságban nem érvényes, hiszen a bizonyítás is csupán a fenti megszorítások mellett igaz. Megjegyezzük, hogy *Buckingham* bizonyítása során a dimenzió nélküli számokat π -vel jelölte. Innen származik az alapelv — a π -teoréma — elnevezése.

Tolman 1914-ben kidolgozott módszerének alapelve pedig az, hogy az alapidimenzióval rendelkező mennyiségek transzformáció paramétereit azonos értékűnek választotta [31].

Rayleigh 1915-ben ismertetett egy módszert, amelyet később róla neveztek el. *Rayleigh* feltételezi, hogy az egyes fizikai változók között hatványszorzat alakú összefüggés írható fel. Az egyes változók kitevőit az egyenlet homogenitásának feltétele — a *Fourier*-szabály — alapján határozta meg [30].

Amint az eddigiekből kitűnik, a hasonlóság-elmélet és a dimenzióanalízis alapjainak lerakása közel azonos időszakban történt. Közben nézeteltérések alakultak ki a kétféle módszert képviselő kutatók között. Itt említjük meg a *Rayleigh* és *Riabusinszkij* között lefolyó vitát, amelyet végérvényesen *T. A. Ehrenfest*—*Afanassjeva* tisztázott [13]. Különösen éles viták voltak *T. A. Ehrenfest*—*Afanassjeva* és *Norman Campbell* között, amelybe *Bridgman* is csatlakozott. Az idevágó tanulmányok a *Philosophical Magazine* hasábjain jelentek meg [8, 12, 13].

A vita egy szűrőfolyamatot eredményezett, aminek hatására az egyes fogalmak, tételek tisztázódtak, illetőleg bizonyítást nyertek. Ugyanakkor kezdtek világossá válni a hasonlóság-elmélet és a dimenzióanalízis viszonyai is. Mielőtt azonban e kérdés tárgyalására rátérnénk, megemlítünk még néhány újabb állomást a dimenzióanalízissel kapcsolatos elgondolások kidolgozásáról.

Bridgman 1922-ben megjelent könyvében már nyomatékosan felhívta a figyelmet a *Buckingham*-féle szabály korlátaira [6]. Ilyen értelemben 1946-ban *Van Driest* általánosítja a tételt: a jellemző mennyiségekből képezhető dimenzió nélküli mennyiségek maximális számát megkapjuk, ha a jellemző mennyiségek számából levonjuk a változóknak azt a — szintén maximális — számát, amelyekből dimenzió nélküli mennyiségek még nem képezhetők [29]. Azonos elgondolást követett kutatásai során *L. I. Szedov* is [31]. *H. L. Langhaar* a későbbiekben a *dimenziómatrix* fogalmának bevezetésével definiálta a kérdést [29]. Meghatározása szerint a folyamatot jellemző változókból képezhető dimenzió nélküli mennyiségek maximális számát akkor kapjuk meg, ha a változók számából a *dimenziómatrix* rendszámát levonjuk. E megállapítás egzakt módon általánosítja a *Buckingham*-féle szabályt.

Újabban a dimenzióanalízis módszerének bizonyos egyszerűsítéseire irányuló javaslatokkal is találkozhatunk. Itt említjük meg *Ch. C. Bowman* és *V. E. Hansen* eljárását. Ők a *dimenziómatrix*ot alkalmazó eljárásból indultak ki és annak egyszerűsítésére dolgoztak ki egy eljárást [5].

A rövid történeti áttekintés után vizsgáljuk meg a dimenzióanalízis lényegét, ill. annak az egyenletanalízissel való viszonyát.

A *dimenzióanalízis* — mint ismeretes — a *dimenzió nélküli számok meghatározásának módszere a vizsgált jelenségben résztvevő mennyiségek dimenziói alapján*. A dimenzióanalízis nem tévesztendő össze a *dimenzió-elmélettel*, amely a dimenziókkal, dimenzió-rendszerekkel, azok meghatározásával és összefüggéseivel foglalkozik.

Figyelembe véve az egyenletanalízis és a dimenzióanalízis lényegi tulajdonságait, megállapíthatjuk, hogy azok *részben közös, részben eltérő* tulajdon-

ságokkal rendelkeznek. Vizsgáljuk meg a továbbiakban ezeket az azonosságokat és különbözőségeket.

1. A két módszer egyaránt a változók között levő egyenletekből indul ki. Azonban míg az egyenletanalízis esetében konkrétan a vizsgált folyamatra jellemző összefüggést, és annak egyértelműségi feltételeit vesszük alapul, addig a dimenzióanalízis esetében a legáltalánosabb összefüggésekből indulunk ki. Ezen utóbbiak képezik a leszármaztatott dimenziók és az alapidimenziók kapcsolatának alapjait.

2. *A hasonlóság-elmélet és a dimenzióanalízis közti alapvető eltérést az előismeretek mennyiségi különbsége képezi [18].* A hasonlóság-elmélet alkalmazásakor a folyamat mechanizmusáról, lefolyásáról lényegesen nagyobb mennyiségű előismerettel (a folyamatot leíró egyenlet és egyértelműségi feltételek) rendelkezünk, szemben a dimenzióanalízis alkalmazásával, mikoris csupán a legáltalánosabb viszonyokból indulunk ki. Megjegyezzük, hogy éppen a fentiek miatt kell fokozott elővigyázattal lenni a dimenzióanalízis alkalmazásakor és a vizsgált folyamat mechanizmusáról feltétlen meg kell szerezni a legáltalánosabb képet a jelenség előzetes minőségi (vagy kísérleti úton történő) elemzésével. Természetesen, *ha a hasonlóság-elmélet alkalmazása lehetséges, úgy azt feltétlenül előnyben kell részesíteni*, mivel konkrétabb eredményt ad. Ha az előismeretek mennyisége nem teszi lehetővé a hasonlóság-elmélet alkalmazását, úgy a dimenzióanalízis módszeréhez fordulhatunk, ami lényegesen általánosabb eredményt ad. Ez természetesen a két módszer kiindulási feltételeinek különbözőségéből fakad.

3. Az egyenletanalízist (a hasonlósági transzformációk esetére) a hasonlóság-elméletre szűkítve megállapítható, hogy *egy konkrét jelenségről a hasonlóra történő áttérés az egyik mértékegységrendszerről a másikra való áttérésnek felel meg.* A megfeleléség alapja, matematikai kifejezője a hasonlósági transzformáció. Más szóval az egyenletanalízis általános rendszeréből (amelyben különböző transzformációk alkalmazhatók) a hasonlóság-elmélet a dimenzióanalízis megfelelője, mivel mindkét módszer esetében a hasonlósági transzformációt alkalmazzuk a leképezés során.

4. Az egyenletanalízis vizsgálata kapcsán rámutattunk arra, hogy a transzformációs paraméterek között levő kapcsolatok egyszerűsíthetők

a) a transzformációs paraméterek célszerű felvételével,

b) az alapegyenletek speciális alakban történő felírásával.

A fentiek a dimenzióanalízisben is értelmezhetők. Az a) esetnek felelnek meg pl. az *Apell* és a *Tolman*-féle eljárások, míg a b) esetnek a *Rayleigh*- és — bizonyos vonatkozásban — a *Buckingham*-féle módszerek.

5. Minden esetben lényeges az *előismeretek mennyiségének helyes felmérése*, illetőleg annak megállapítása, hogy

a) az egyenletanalízis (a hasonlóság-elmélet),

b) vagy a dimenzióanalízis apparátusát válasszuk a megoldáshoz,

c) vagy egyik módszer sem alkalmazható megfelelő biztonsággal.

Az a)–c) pontokban foglaltak eredményességének különböző valószínűségi fokai értelmezhetők. Ennek ellenére a hasonlóság-elmélettel és a dimenzióanalízissel — a problémák helyes felvetésével — azonosan helyes eredményt kaphatunk. A jó műszaki érzék és meglátás különösen a dimenzióanalízis alkalmazásakor szükséges.

A fenti 5 pontban foglaltak alapján megállapíthatjuk, hogy a dimenzióanalitikusok és a hasonlóság-elméletet előnyben részesítő kutatók között folyó

több évtizedes vita — amely még napjainkban is folytatódik —, csak a fogalmak, tételek tisztázása szempontjából nevezhető eredményesnek. Teljesen indokolatlan a vitának az a része, amely az egyik, vagy másik módszer teljes elvetését célozza. Véleményünk szerint a *dimenzióanalízis és a hasonlóság-elmélet módszerei dialektikus egységet képeznek* — azonosságukkal és különbözőségükkel — és az adott feladat, illetőleg az előismeretek mennyisége dönti el azt, hogy melyiket célszerű alkalmazni. A vita, amely az *empirizmus* és a *racionalizmus* harca sajátos megnyilvánulásának fogható fel, nem valószínű, hogy fenti célját elérje.

*

A fentiekben foglalkoztunk az egyenletanalízis és a dimenzióanalízis általános kérdéseivel, azoknak egymáshoz való viszonyával. Korábbi dolgozatainkban bevezetett fogalmakat (mint pl. az *invariáns függvény*) és elgondolásokat igyekeztünk egységes szemlélet alapján beépíteni az egyenletanalízis — dimenzióanalízis témakörébe. A hasonlóság-elmélet és a modellelmélet általános kérdéseivel foglalkozó tanulmányainkat [19, 20, 21, 22] — beleértve a jelen dolgozatot is — a további hasonló tárgyú kutatásaink *munkaprogramjának* tekintjük. Ezeknek fő célja egy *általános koncepció kialakítása* volt. Az általános jellegű kérdések tisztázása mellett már *konkrét feladatok megoldása* kapcsán több esetben igazoltuk kísérleti úton az elvi elgondolások érvényességét [24].

A kutatás további irányát illetően az alábbi főbb kérdéscsoportokat lesz célszerű a jövőben részletesen megvizsgálni:

1. A hasonlóság-elmélet keretén belül konkrét feladatok megoldása kapcsán kell megvizsgálni a hasonlóság harmadik főtételeinek betartásával kapcsolatos nehézségek megoldásának további lehetőségeit, főként

- a) a transzformációs paraméterek célszerű megválasztásával,
- b) és az alapegyenletek speciális alakban történő felírásával.

2. Konkrét feladatok megoldása kapcsán meg kell vizsgálni a hasonlóság-elmélet, ill. a dimenzióanalízis alapján kapott eredményeket — összehasonlítva azokat — a helyes megoldást igénylő előismeretek mennyiségének figyelembe vételével. Ezáltal olyan tapasztalatokra tehetünk szert, amelyek segítségével határozottabban eldönthető, hogy adott esetben a dimenzióanalízis eredményesen használható-e, avagy sem.

3. A modellelmélet keretén belül meg kell vizsgálni különböző transzformációk alkalmazásának lehetőségeit. Egzakt matematikai módszerekkel *igazolni kell a hasonlóság-elmélet három főtételeinek megfelelő tételek létezését és érvényességét különböző transzformációk esetén.*

4. *Analógiák felkutatásával* lehetővé kell tenni azt, hogy az analógiás modellezési módszert a jelenleginél lényegesebben elterjedtebben alkalmazzák. Véleményünk szerint a *jövő alapvető modellezési módszere a fizikai és a matematikai modellezés egységén fog alapulni.*

5. Az egyenletanalízis és a dimenzióanalízis — mint általános kutatási eljárások — céljukat illetően három különböző módszerként értelmezhetők:

- a) mint modellmódszerek,
- b) mint a fizikai kutatás módszerei,
- c) és mint a matematikai kutatás módszerei.

Alkalmazásuk mindhárom területén a jövőben is feltétlenül gyümölcsöző lehet.

IRODALOM

1. *Apell*: *Mechanique rationelle*. 1893.
2. *Apell-d'Hauteville*: *Teoreticeszkaja mechanika*. 1912.
3. *Bertrand, J.*: Note sur la similitude en Mecanique. *Journal de l'Ecole Polytechnique*. 1848. Cahier 32. S. 189.
4. *Bertrand, J.*: Sur l'homogenite dans les formules de Physique. *Comtes Rendus de l'Academia des sciences*. Paris. Vol. 86. 1878.
5. *Bowman, Ch. C — Hansen, V. E.*: Simplification of Dimensional Analysis. *Preceedings ASCE. Journal of the Engineering Mechanics Division*. V. 85. No EM 1. Janury 1959.
6. *Bridgman, P. W.*: *Dimensional Analysis*. Yale University Press. 1922.
7. *Buckingham, E.*: On Physically Similar Sistems: Illustrations of the use of Dimensional Equations. *Phys. Rev.* Vol. IV. p. 345. 1914.
8. *Campbell, Norman*: *Dimensional Analysis*. *Philosophical Magazine*. XLVII. p. 481. 1924.
9. *Chien Ning*: Similarity Laws of Distorted River Models with Movable Bed. *Transactions of ASCE*, Paper No. 2805, Vol. 121. p. 440. 1956.
10. *Doležalik, V.*: Hasonlóság és modellezés a kémiai technológiában. *Műszaki Könyvkiadó*. Bp. 1962.
11. *Ehrenfest-Afanassjeva, T. A.*: Der Dimensionsbegriff und der analytische Bau physikalischer Gleichungen. *Mathematische Annalen*. B. LXXVII, H. 2. S. 259. 1916.
12. *Ehrenfest-Afanassjeva, T. A.*: *Dimensional Analysis and the Theory of Similitude*. *Philosophical Magazine*. January 1925.
13. *Ehrenfest-Afanassjeva, T. A.*: *Dimensional Analysis viwed from the Standpoint of the Theory of Similitude*. *Philosophical Magazine*. Vol. 1. Jan. 1926.
14. *Einstein, H. A. — Chien Ning*: Similarity of Distorted River Models with Movable Beds. *Transactions of ASCE*, Paper No. 2805. Vol. 121. p. 440. 1956.
15. *Fáy Gy. — Zselev B.*: A fizikai hasonlóság-elmélet koncepciójáról. *Fizikai Szemle*, 1963. 9—11.
16. *Federman, A.*: O nektorih obsesih metodah integririvanija uravnenij sz esisznümi proizvodnümi pervov porjadka. *Razdel X i XI, Izvestija Szt. Peterburg Politechn. in-ta*. T. XVI. vüp. 1. 1911 (1912).
17. *Fourier, J.*: *Theorie analitique de la chaleur*. T. 1, p. 137. 1822.
18. *Gukman, A. A.*: Vvedenie v teoriju podobija. *Vüszsaja skola*. Moszkva, 1963.
19. *Horváth Imre*: A hasonlóságról. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* 1963. 1—2.
20. *Horváth Imre*: Az invariáns függvény, mint a hasonlóság feltétele. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények*, 1964. 3—4.
21. *Horváth Imre*: A modellelméletről. *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények* 1965. 3—4.
22. *Horváth Imre*: A modellalkotás, mint tudományos kutatási módszer. *Magyar Filozófiai Szemle*, 1965. 2.
23. *Horváth, I.*: Ähnlichkeitsbedingungen für die Untersuchung von Sickerströmungen. *Oesterreichische Wasserwirtschaft*. 1965. 5—6.
24. *Horváth, I.*: Modelling of Oxygen Transfer Processes in Aeration Tanks. (A második nemzetközi szennyvíztisztítási konferenciára készült tanulmány) 1965.
25. *Ivicsics Lajos*: Gondolatok a fizika rokonjelenségeinek fogalmáról *Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények*, 1962. 3.
26. *Kirpicsov, M. V. — Mihejev, M. A.*: Modelirovanije telplovüh usztrojsztv. *AN. SzSzsZr* Moszkva, Leningrád 1936.
27. *Kirpicsov, M. V.*: *Teorija podobija*. *AN. SzSzsZr*. Moszkva 1953.
28. *Kirpicsov, M. V. — Konakov, P. K.*: *Matematicsieszkije osznovi teorii podobija* *AN. SzSzsZr*. Moszkva 1949.
29. *Langhaar, H. L.*: *Dimensional Analysis and Theory of Models*. New-York, London, 1951.
30. *Rayleigh*: The Principle of Similitude. *Nature*. Vol. 95. S. 66. 1915.
31. *Szedov, E. I.*: Metodü podobija i razmernosztí v mechanike. *Izdatelsztvo Nauka*. Moszkva 1965.
32. *Tolman, R. C.*: Principle of Similitude. *Phys. Rev. B*. 3. p. 244. 1914.