

TELEPÍTÉS-OPTIMÁLÁS DISZKRÉT KAPACITÁSOKKAL

Jelen tanulmányban a szerző a *telepítési operációkutatásnak* egy fontos feladattípusával, az *oszthatatlan műszaki-gazdasági egységek területi elhelyezésének problémájával* foglalkozik. Feltételezi ehhez, hogy a lehetséges telephelyek előre ismertek, a mellékfeltételek a szállítási probléma kombinációs táblájában leírhatók, a létesítendő üzemek kapacitása fix értékkel adott és hogy a célfüggvény lépcsős, pontosabban konstans tagokat is tartalmazó lineáris függvény.¹ Az ilyen típusú feladatok megoldására a könnyednek nem mondható *enumerációs* eljárások helyett egy *heurisztikus* algoritmust javasol.

1. A probléma felvetése, modellezése és megoldó algoritmus

Az objektumok területi elhelyezésének, vagyis a *centrumok optimális pontthalmazának kijelölési problémáját a telepítés-optimálás modelljében összekapcsolhatjuk az optimális üzemnagyságok problémájával*. Ehhez csupán az szükséges, hogy a hozzárendelési terv által *igényelt üzemnagyságok* (a centrumok funkciója szerinti kibocsátások igényelt volumenei) és a *telephelyi teljes társadalmi ráfordítások* közötti kapcsolatot a *telephelyi költségfüggvények* megfelelő valóságűséggel fejezzék ki. Az optimális megoldást jelentősen befolyásolják a telephelyi állandó költségek, amelyek a lineárisan, vagy degresszíven (esetleg lépcsőzetesen) növekvő telephelyi változó költségekkel együtt a telephelyi költségfüggvényeknek konkáv jelleget kölcsönöznek. Bár a telephelyi költségek egy bizonyos üzemnagyság felett progresszív növekedésbe mennek át, telephelyi költségfüggvényeinket ezekben a nyilvánvalóan gazdaságtalan tartományokban általában már szükségtelen értelmezni.

A következőkben vezessük be az x_i *telephelyi* változót, amelynek valamely megoldás szerinti értéke a *telephelyi szükséges kapacitást* mutatja. Ezt az értéket természetesen az x_{ij} viszonylati változók határozzák meg, felülről azonban rendszerint egy adott α_i kapacitás korlátozza. Így a telephelyi feltételeket az alábbi elrendezésben írhatjuk le:

$$\sum_j x_{ij} - x_i = 0, \quad (1)$$

ahol

$$0 \leq x_i \leq \alpha_i. \quad (2)$$

Mivel ily módon a telepítés-optimálás modelljében az x_{ij} és x_i diszpozíciós mennyiségek (akcióparaméterek) a viszonylati és telephelyi operációk volu-

¹ A telepítési operációkutatás feladatkörének elhatárolására a szerző „Telepítési operációkutatás a regionális tervezésben és az építőiparban. EM SZÁMGÉP 1965.” című sokszorosított tanulmányának 1. fejezetében tett kísérletet.

meneit fejezik ki, a célfüggvényben tükröződő változó és állandó költségeket keletkezési helyüknek megfelelően viszonylati és telephelyi költségekre célszerű széjjelbontani. A telephelyi diszpozíciókat így közvetlenül megkaphatjuk a modelltől és ha azokat a kombinációs táblában ellenkező (negatív) előjellel szerepeltetjük, akkor a potenciálok, valamint a módosító tényezők meghatározása és a hurokmenti változtatások elvégzése a megszokott előjel-szabályok szerint történhet. Így a kapacitáskorlátos szállítási probléma duál-disztribúciós módszerét² egy kis módosítással a kibocsátások oszlopára is kiterjeszthetjük.

A telepíthető (fejleszthető, áthelyezhető, megnyitható stb.) kapacitásaink általában nem folytonosak, hanem diszkrétnek. Legtöbbször az üzemelési vagy termelési önköltségeket és a beruházási ráfordításokat is csak ezekre a diszkrét értékekre ismerjük. Nyilvánvalóan, ha a diszkrét kapacitást nem teljesen használjuk ki, akkor a fajlagos telephelyi költségek — elsősorban az állandó költségek miatt — hiperbolikusan növekedni fognak. Ezért arra kell törekednünk, hogy a telepített kapacitásokat maximálisan ki is használjuk.

Nézzük meg ezek után, hogy a diszkrét kapacitású objektumok telepítés optimalizálását hogyan végezhetjük el. *Tételezzük fel*, hogy minden lehetséges telephelyre vonatkozóan ismerjük az egyes k típusú tervek szerinti x_{ik} lehetséges diszkrét kapacitásokat ($k = 1, \dots, d$), amelyekkel a fogyasztók adott igényeit maradéktalanul ki kell elégíteni. Továbbá a termelési költségek a kibocsátási volumennel lineárisan növekszenek, ezért azokat a szállítási költséggel együtt *viszonylati költségként* vesszük figyelembe. Azonban a *telephelyi állandó költségeket* ($K_{ik}^a \geq 0$), amelyek a megadott diszkrét kapacitások szerint is változnak, külön kezeljük. A kibocsátások koncentrálását a *telephelyi költségmutatók ciklusos újraszámításának* egy itt kialakított algoritmusával³ biztosítjuk. Ez a feladat a következő modellben írható le:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i,k,j} c_{ikj} x_{ikj} + \sum_{ik} K_{ik}^a z_{ik} &\rightarrow \min & (3) \\ \sum_j x_{ikj} - x_{ik} &= 0 & (4) \\ 0 \leq x_{ik} \leq a_{ik} & & (5) \\ \sum_{i,k} x_{ikj} = \beta_j & & (6) \\ x_{ikj} \geq 0 & & (7) \\ z_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_{ik} = 0 \\ 1, & \text{ha } x_{ik} > 0 \end{cases} & & (8) \\ \sum_j \beta_j < \sum_{ik} a_{ik} & & (9) \end{aligned} \right\} (I)$$

$$i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, d; \quad j = 1, \dots, n$$

² Vö.: Jándy G.: Szállítási és telepítési operációkutatás, Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1966. (6. 12. fejezet).

³ Az algoritmus kidolgozásában az alábbi publikációk voltak segítségemre: Balinski, M. L.: Fixed-cost transportation problems. Naval. Res. Logist. Quart. 8 (1961).

Korbut, A. A.: Nyeodnorodnue zadaci razmescsenyija (tyipa transzportnoj). Primenyenyije matyematyiki pri razmescsenyii proizvonyityelnüh szil. Moszkva, 1964.

Mas, V.: K matyematyicseszkim metodam optimal'nogo razmescsenyija predpriyatij v mnogoetapnüh szisztemah proizodsztva i potreblenyija. Voproszű Ekonomiki 1962. No. 10.

Schemmel, H., Zwick W.: Näherungsmethoden zur Lösung des nichtlinearen Transportproblems. Monatsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 3/1965.

ahol c_{ikj} a fajlagos termelési-szállítási költség (termelés az i telephelyen a k típusú üzemben és szállítás az ij viszonylaton). A (3) helyett a kombinációs táblában a következő egyszerűbb célfüggvényt fogjuk használni:

$$\sum_{i,k,j} c_{ikj} x_{ikj} + \sum_{ik} (-c_{ik})(-x_{ik}) \rightarrow \min. \quad (10)$$

E feladat szuboptimális megoldását az alábbi főbb lépések ciklusos ismétlésével határozzuk meg.

1. lépés. A c_{ik} paramétert indulásnál az alábbi összefüggésből kapjuk:

$$c_{ik}^{(0)} = \frac{K_{ik}^a}{M_{ik}^{(0)}}, \quad (11)$$

$$\text{ahol } M_{ik}^{(0)} = \min(\alpha_{ik}, \sum_j \beta_j) \quad (12)$$

az ik forrás kibocsátásának felső korlátja. Feltételezzük tehát, hogy az egyes (ik) források kapacitását az összes igény határán belül teljesen kihasználjuk.

2. lépés. A kiinduló megoldás felvételénél célszerűen úgy járunk el, hogy sorbamenve a kombinációs tábla oszlopain, először mindig azt a mezőt tesszük kötötté, amelyhez a $\min_{ik}(c_{ikj} + c_{ik})$ érték tartozik, majd ha szükséges, innen az i -ben következő legkisebb ($c_{ikj} + c_{ik}$) paraméterű mezőre térünk át. Ekkor azonban az az x_{ik} változó, amelynek értékét az α_{ik} ténylegesen korlátozta, nem szerepel a bázisban.

3. lépés. Az előbbi megoldást a duál-disztribúciós (másnéven potenciálos) módszer algoritmusa⁴ szerint addig javítjuk, míg a (10) függvény minimumhelyét adó megoldást (ciklus-optimumot) meg nem találjuk. Ha a telephelyi kibocsátások oszlopához zéró értékű potenciált rendelünk ($v_{n+1} = 0$), akkor minden forrásnál, ahol x_{ik} benne van a bázisban: $-u_i = c_{ik}$.

Az egyes ciklusokban az optimum kritériuma:

$$-u_i + c_{ikj} \geq v_j, \quad (13)$$

$$i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, d; \quad j = 1, \dots, n$$

minden viszonylati mezőben, és

$$-u_i + c_{ik} \geq 0 \quad (14)$$

minden bázisban nem szereplő telephelyi mezőben. (Itt az x_{ik} értékét az α_{ik} diszkrét kapacitás ténylegesen korlátozza. Az ilyen — bázisban nem szereplő — $x_{ik} = \alpha_{ik}$ értékeket táblázatainkban pl. bekarikázással különböztetjük meg.)

4. lépés. Miután a (13) és (14) feltételek teljesültek, megkeressük azokat a forrásokat, amelyeknek a ciklus-optimum szerint szükséges kibocsátása felső korlátukkal (M_{ik}) egyenlő. Jelöljük ezeket a forrásokat ik^* index-szel. Tehát $x_{ik^*} = M_{ik^*}$. Ha ilyen forrást nem találunk, akkor az 5. lépésre térünk át. Ellenkező esetben feljegyezzük a teljesen kihasznált források (telephely + üzemtípus) ik^* indexeit, majd az újabb ciklusra áttérve ismét meghatározzuk a telephelyi költségmutatókat. Biztosítjuk azonban, hogy a teljesen kihasznált

⁴ Vö.: Jándy i. m. 3. 26 fejezet.

források az újabb ciklusban is megtartsák minimális fajlagos költségüket a többi forráshoz pedig ismét a lehetséges legkisebb telephelyi fajlagos költséget rendeljük. Vagyis

$$c_{ik}^{(1)} = \begin{cases} c_{ik}^{(0)}, & \text{ha } ik = ik^* \\ \frac{K_{ik}^a}{M_{ik}^{(1)}}, & \text{ha } ik \neq ik^*. \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{ahol } M_{ik}^{(1)} = \min(\alpha_{ik}, \sum_j \beta_j - \sum_{ik^*} \alpha_{ik^*}). \quad (16)$$

(A felső zárójeles indexek a ciklusok sorszámára utalnak.)

Ezután visszatérve a 3. lépésre, a meglevő bázisban ismét meghatározzuk a potenciálokat és a kombinációs táblában levő megoldást addig javítjuk, míg a (13) és (14) szerinti kritériumok ebben az újabb ciklusban is teljesülnek. Ha azonban $x_{ik} = 0$ minden $ik \neq ik^*$ esetében, vagyis a ciklus-optimumban csak teljesen kihasznált és passzív források szerepelnek és így

$$\sum_j \beta_j = \sum_{ik^*} \alpha_{ik^*}, \quad (17)$$

tehát a (16)-ból $M_{ik}^{(1)} = 0$, akkor a 7. lépésre térünk át. Ha pedig valamennyi aktív, de nem teljesen kihasznált forrásban ($0 < x_{ik} < \alpha_{ik}$)

$$\alpha_{ik} \leq \sum_j \beta_j - \sum_{ik^*} \alpha_{ik^*}, \quad (18)$$

vagy ha csak olyan források telítődtek újra, amelyek a megelőző ciklusban nem, de két ciklussal korábban már teljesen kihasználtak voltak, akkor szintén az 5. lépésre térünk át, mert különben előfordulhatna, hogy egy korábbi ciklusba jutunk vissza, ami az iterációs eljárás rövidre zárását, körforgását eredményezné.

5. lépés. Ha az előbbi ciklusban számított c_{ik} paraméterekkel a szükséges telephelyi kibocsátás egy újabb forrásban sem érte el saját M_{ik} korlátját, akkor az újabb (legyen ez most a μ -edik) ciklusban a telephelyi költségmutatók újraszámítása a következő képlet szerint történik:

$$c_{ik}^{(\mu)} = \begin{cases} \frac{K_{ik}^a}{x_{ik}}, & \text{ha } 0 < x_{ik} < \alpha_{ik} \\ c_{ik}^{(\mu-1)}, & \text{ha } x_{ik} = 0, \text{ vagy } ik = ik^*. \end{cases} \quad (19)$$

Ha most az új telephelyi költségmutatókkal a (13), (14) feltételek nem teljesülnek, a 3. lépésre, ellenkező esetben a 6. lépésre térünk át.

6. lépés. Ha a (13) és (14) feltételek a bázis változtatása nélkül az új c_{ik} paraméterekkel is teljesülnek, akkor azokban a sorokban, amelyekben

$$0 < x_{ik} < \alpha_{ik},$$

célszerű még a következő ellenőrzést is elvégezni. Jelöljük ezeket a sorokat ik index-szimbólummal. Ha az $\{ik\}$ sorhalmaznak valamely gh sorában csak egy kötött viszonylati mező van (legyen ez a ghj), akkor e mező oszlopában és az $\{ik\}$ halmazban keressük azokat a mezőket, amelyekben

$$c_{ikj} < v_j \quad (20)$$

és vizsgáljuk meg, hogy az x_{ghj} érték áthelyezhető-e ezekbe a mezőkbe, vagyis

$$-x_{ik} + \alpha_{ik} \geq x_{ghj}. \quad (21)$$

Ha a (20) és (21) feltétel fent áll, akkor az x_{ghj} értéket saját oszlopában át-
helyezzük, mégpedig abba a sorba, ahol a (20) és (21) teljesülése mellett a
 $\sum_j (v_j - c_{\bar{i}k_j}) x_{\bar{g}h_j} = \max$, a gh sorban pedig a telephely szükséges kibocsátása

$$x_{ik} = 0$$

és a telephelyi paraméter új értéke célszerűen

$$c_{gh} = K_{gh}^a$$

lesz. A célfüggvény értéke ezzel a lépéssel nyilvánvalóan csökkeni fog. A v_j
árnyékár ugyanis azt mutatja, hogy a vizsgált ciklus-optimum szerint aktivi-
zálva a források (telephelyet és üzem típust), a j jelű fogyasztónak mekkora
áldozatot (fajlagos beszerzési költséget) kell vállalnia. Mivel az $\bar{i}k$ forrásokat
ebben a ciklus-optimumban ugyanazzal az x_{ik} mennyiséggel aktivizáltuk,
mint amelyre az állandó költségét vetítettük $\left(c_{ik} = \frac{K_{ik}^a}{x_{ik}} \right)$, ennél a lépésnél
a fajlagos beruházási költséget már nem vesszük figyelembe. A fentiekben
értelmezett x_{ghj} értékek áthelyezhetőségét ily módon sorban megvizsgáljuk.
Ha ilyen áthelyezési lehetőséget nem találunk, akkor a költségmutatók ciklusos
újraszámításának a végéhez értünk és a 7. lépésre térünk át. Ha viszont e lépés
keretében egy vagy több áthelyezést végrehajtottunk, akkor attól függően,
hogy egy újabb telephelyi kibocsátás telítődik-e, vagy sem, a 4., illetve az 5.
lépésre ugrunk vissza.

7. lépés. A vizsgált megoldás már a *szuboptimális telepítési kombinációt* adja.
Hátra van még, hogy mindazoknak a forrásoknak felhasználásával, amelyek
ebben a kombinációban aktívak voltak — a telephelyi állandó költségeket már
figyelman kívül hagyva — újra meghatározzuk az optimális hozzárendelési
tervet. Lehetséges ugyanis, hogy így egy gazdaságosabb hozzárendelési tervet
kapunk, az állandó költségek pedig nem változhatnak, hiszen arról már az
előbb döntöttünk, hogy hol, milyen kapacitású üzemet létesítsünk.

Ha a kihasználatlan kapacitások gazdasági hatása a különböző telep-
helyeken nem azonos, akkor ezt figyelembe kell venni, amit a modell mindig
lehetővé is tesz. Például

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i,k,j} c_{ikj} x_{ikj} + \sum_{ik} d_{ik} y_{ik} &\rightarrow \min \\ \sum_j x_{ikj} + y_{ik} &= \alpha_{ik} \\ \sum_{ik} x_{ikj} &= \beta_j \\ x_{ikj}, y_{ik} &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

ahol d_{ik} a rendelkezésre álló kapacitás nem teljes kihasználása következtében
felmerülő fajlagos költséget reprezentálja az i telephelyen, a k típusú üzemben.

A telepítés-optimalizációs modellekben a meglévő (fejleszthető, vagy fel-
számolható) kapacitásokat, illetve a meglévő azonos gazdasági funkciójú háló-
zatot is figyelembe kell venni. Nézzük meg most példaként, hogy az (I) rendszer
szerinti modellbe hogyan építhetjük be a meglévő α_i ($i = 1, \dots, g$) kapacitáso-
kat, amelyek rekonstrukció révén α_i értékre növelhetők. A meglévő α_i kapacitás
igényelt növelésének mértékét az x_i változóval fejezem ki. Az új létesítmények
lehetséges telephelyeit az $i = g + 1, \dots, m$ indexekkel jelölöm. A rekonstrukció
egyszeri ráfordítása miatt figyelembe veendő állandó költséget a K_i^a szimbólum

reprezentálja. Ha a rekonstrukció több diszkrét változatban lehetséges, akkor az új kapacitást $\bar{\alpha}_{ik}$ és az állandó költséget K_{ik}^a ($i = 1, \dots, g; k = 1, \dots, b$) szimbólummal kellene jelölnünk, ahol a k index a rekonstrukció fokozatára vonatkoznék. Ezzel azonban most ne bonyolítsuk modellünket. Tehát

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=g+1}^m \sum_{k=1}^d \sum_{j=1}^n c_{ikj} x_{ikj} + \sum_{i=1}^g K_i^a z_i + \sum_{i=g+1}^m \sum_{k=1}^d K_{ik}^a z_{ik} \rightarrow \min \\ & \sum_j x_{ij} - x_i = \alpha_i \quad i = 1, \dots, g \\ & 0 \leq x_i \leq \bar{\alpha}_i - \alpha_i \\ & \sum_j x_{ikj} - x_{ik} = 0 \quad i = g+1, \dots, m \\ & 0 \leq x_{ik} \leq \alpha_{ik} \quad k = 1, \dots, d \\ & \sum_{i=1}^g x_{ij} + \sum_{i=g+1}^m \sum_{k=1}^d x_{ikj} = \beta_j \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij}, x_{ikj} \geq 0 \\ & z_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_i = 0 \\ 1, & \text{ha } x_i > 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, g \\ & z_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_{ik} = 0 \\ 1, & \text{ha } x_{ik} > 0 \end{cases} \quad i = g+1, \dots, m \\ & \quad \quad \quad k = 1, \dots, d \end{aligned} \right\} \text{(III)}$$

Ha az így megfogalmazott és a kombinációs táblába beírt telepítési feladat optimális megoldása szerint valamely meglévő telephely α_i kibocsátását nem szükséges növelni ($x_i = 0$), akkor a „ $-x_i$ ” helyett a „ $+y_i$ ” változót kell bevinnünk a modellbe ($\sum_j x_{ij} + y_i = \alpha_i$), amihez állandó költség nem tartozik, de — amint azt a (II) rendszerben is láttuk — változó költség tartozhat. Így a feladatot újból megoldva választ kapunk arra kérdésre, hogy gazdaságos-e még a meglévő i centrum működése, illetve milyen mértékben célszerű annak kapacitását kihasználni. Ha $y_i = \alpha_i$, akkor a teljes kapacitás kihasználatlan marad. Ebben az esetben külön kell megvizsgálni a likvidálás gazdasági hatását.

A fentiekben tárgyalt problémákhoz hasonlóan lehetővé válik a többféle terméket gyártó üzemek, illetve a *többfunkciós centrum-hálózat* optimális szakosított telepítési kombinációjának iteratív meghatározása. A költségek dinamizálásával, illetve ugyanarra az időpontra történő vetítésével pedig egy hosszabb időszak *beruházási ütemtervét* is meghatározhatjuk.⁵ Értelemeszerűen használhatjuk ezt az algoritmust a *többlepcsős* telepítési problémáknál is.

A számítógépi algoritmus végleges kialakításához még nagyszámú kísérleti feladat megoldására lesz szükség. A következő fejezetekben az itt részletezett algoritmust három kis számpéldával illusztrálom.

⁵ Vö.: Jándy G.: Telepítési operációkutatás a regionális tervezésben és az építőiparban. Sokszorosított tanulmány, EM Számgép. 1965. 7–8. fejt.

2. Számpélda az algoritmus 4. lépésének igazolására

Tételezzük fel, hogy öt fogyasztó igényeinek kielégítése céljából egy ellátó hálózatot kell telepíteni. A telepítésre négy hely alkalmas és a fogyasztók kiszolgálására csak egy 200-as egységű üzemtypust ($\alpha_i = 200, i = 1, 2, 3, 4$) használhatunk fel. Így a k indexre most nincs szükségünk. Feltételezzük, továbbá, hogy a fajlagos termelési költségek telephelyenként változnak, de a telephelyi kibocsátás mértékétől függetlenek, vagyis a változó termelési költségek a termelési volumennel lineárisan növekszenek és ugyancsak lineárisak a szállítási költségek is. Ezért a c_{ij} viszonylati paraméterek a fajlagos szállítási és termelési költségeket együttesen reprezentálják. A telephelyi

		F o g y a s z t ó k						
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)		
		6	7	6	7	9	-3	600
Lehetséges telephelyek	(1)	5 6	2 200	5 +	4 +	8 +	-3	600 (-200)
	(2)	3 3	7 30	3 +	4 80	6 30	-	-200 400 (-200)
	(3)	5 5	2 10	5 +	3 +	7 +	-5	1000 -10 (-200)
	(4)	7 3	5 +	2 +	8 +	2 90	-7	1400 -90 (-200)
			+	+	+	+		-200
		30	210	60	80	120		-500

"0" ciklus 1. táblázat

állandó költségek telephelyenként ugyancsak változnak. Az 1. táblázat viszonylati mezőinek bal felső sarkában a c_{ij} paramétereket, a telephelyi mezők jobb felső sarkában a K_i^q állandó költséget, jobb alsó sarkában pedig az α_i kapacitáskorlátot találjuk, az utóbbit negatív előjellel. Az 1. lépésben meghatározzuk az induló telephelyi költségmutatókat ($c_i^{(0)}$), amit az 1. táblázat telephelyi mezőinek bal felső sarkában tüntettem fel, ugyancsak ellenkező előjellel. Majd meghatározzuk ennek a ciklusnak optimális megoldását (2. és 3. lépés), ami szintén az 1. táblázatból olvasható ki.

Ha most a 4. lépés elhagyásával közvetlenül az 5. lépésre térnénk át, ami pedig a költségmutatók ciklusos újraszámításának eddig szokásos módja volt, akkor a 2. táblázat szerinti ciklusban egy optimális megoldáshoz érkezünk. Ugyanis az újabb ciklusra áttérve a $-c_4^{(2)} = -14,0$ lesz és az előző (a 2. táblázatból kiolvasható) ciklus-optimum már nem változik. Az előző fejezetben leírt algoritmust betartva azonban meggyőződhetünk arról, hogy ez az optimum csupán egy helyi szélsőérték.

	14,6	18,6	14,6	15,6	17,6	
16,6	6	2	5	4	8	-3 600
		200				(-200)
+			+	+	+	-200
11,6	3	7	3	4	6	-2 400
	30	10	60	80	20	(-200)
						-200
100,0	5	2	5	3	7	-100,0 1000
						0
+			+	+	+	-200
15,6	3	5	2	8	2	-15,6 1400
				100		-100
+			+			-200
	30	210	60	80	120	-500

$$Q(\underline{x}) = 1380 + 2400 = 3780$$

(Rossz megoldás) 2. táblázat

	13	12	13	13	16	
10	6	2	5	4	8	-3 600
		200				(-200)
+			+	0	+	-200
10	3	7	3	4	6	-2 400
	30		60		110	(-200)
						-200
10	5	2	5	3	7	-10 1000
		10		80		-90
+			+		+	-200
14	3	5	2	8	2	-14 1400
					10	-10
+			+			-200
	30	210	60	80	120	-500

"1" ciklus 3. táblázat

Visszatérve az 1. táblázat szerinti ciklus-optimumhoz és betartva az algoritmusban előírt lépéseket, a 4. lépésben megállapítjuk, hogy $x_1 = M_1$ és $x_2 = M_2$, ezért a következő ciklusban a telephelyi költségmutatókat a (15) és (16) szerint határozzuk meg. Így kapjuk a 3. táblázatból kiolvasható ciklus-optimumot. Mivel ebben újabb kibocsátás már nem telítődött, most az 5. lépésre térünk át és a (19) szerinti képletet használjuk. Ebben a ciklusban már a szuboptimális kombinációt kapjuk meg (lásd a 4. táblázatot), ugyanis az újabb ciklusra áttérve $-c_3^{(3)} = -10,0$ lesz és a ciklus-optimum nem változik. Tehát a 6. lépésre térünk át, de áthelyezési lehetőséget nem találunk és így a 7. lépés következik. Az optimális hozzárendelési tervet az 5. táblázat kombi-

nációs táblájában határoztam meg, pontosabban most ott igazoltam, hogy a 4. táblázat megoldása jelen esetben a változó költségek szempontjából sem javítható.

Az összköltség a 2. táblázat szerinti megoldás esetében 3780 (amiből 1380 a változó és 2400 az állandó költség), míg a 4. táblázat szerinti megoldás esetében 3660 (ebből 1660 a változó és 2000 az állandó költség). A két megoldás közötti költségkülönbség tehát itt 3,3%. Bár az algoritmus így sem biztosítja, hogy az utolsó (szuboptimális) megoldás szükségszerűen az abszolút szélsőértéket adja, de bizonyos, hogy azt ily módon nagyobb biztonsággal közelítjük meg, mintha a 4. lépést elhagynánk.

	15,1	13,1	15,1	14,1	18,1	
11,1	6	2	5	4	8	-3 600 (-200)
12,1	3	7	3	4	6	+ -200 -2 400 (-200)
11,1	5	2	5	3	7	-200 -11,1 1000 -100
14,0	3	5	2	8	2	-200 -140,0 1400 0
						-200
	30	210	60	80	120	-500

$$Q(x) = 1660 + 2000 = 3660$$

"2" ciklus 4. táblázat

	4	2	4	3	7	
0	6	2	5	4	8	(-200)
1	3	7	3	4	6	-200 (-200)
0	5	2	5	3	7	-200 -100
0	3	5	2	8	2	-200 0
	30	210	60	80	120	-500

Az optimális hozzárendelési terv 5. táblázat

3. Számpélda az algoritmus 6. lépésének igazolására

Változtassuk most meg az előbbi számpélda viszonylati költségmutatóit és telephelyi állandó költségeit és tételizzük fel, hogy az egyetlen felhasználható üzemtípus 300-as kapacitású ($\alpha_i = 300, i = 1, 2, 3, 4$). Ezeket az új paramétereket a 6. táblázatban találhatjuk meg. Az induló telephelyi költségmutatók ($c_i^{(0)}$) meghatározása után a 2. lépésben a kiinduló megoldást úgy sikerült felvenni, hogy kapacitáskorlátba seholy nem ütköztünk, így ezt nem is szükséges leellenőrizni. Ugyanis minden igényt a legkisebb költséggel elégítettünk ki (triviális optimum). Mivel egy telephely kibocsátása sem telítődött, a következő ciklus telephelyi költségmutatóit az 5. lépéssel kapjuk. Ebben a ciklusban azonban a megoldás nem változik és így a 3. 4. és 5. lépésben ismét végigmenve a

8	6	17	5	9	-2,1 630 0 -300
4 30	8	14	5	2 120	-1,8 540 -150 -300
7	4 210	15	3 80	8	-3,0 900 -290 -300
5	7	4 60	5	4	-2,7 810 -60 -300
30	210	60	80	120	-500

”0” ciklus 6. táblázat

	7,6	7,1	17,5	6,1	5,6	
2,1	8	6	17	5	9	-2,1 630 0 -300
+	+	+	+	+		
3,6	4 30	8	14 14-17,5=-3,5	5	2 120	-3,6 540 -150 -300
+	+	+	+	+		
3,1	7	4 210	15 15-17,5=-2,5	3 80	8	-3,1 900 -290 -300
+	+	+	+	+		
13,5	5	7	4 60	5	4	-13,5 810 -60 -300
+	+	+	+	+		
30	210	60	80	120	-500	

”1” ciklus 7. táblázat

6. lépésre térünk át. A kombinációs tábla 4. sorában (lásd a 7. táblázatot) $0 < x_4 < \alpha_4$, és csak egy kötött mező van (4, 3). Ennek a mezőnek oszlopában a 2. és a 3. sorban a viszonylati fajlagos költség kisebb a fogyasztóhoz tartozó árnyékárnál és a 2. sorban a (21) szerinti feltétel is teljesül, vagyis az $x_{43} = 60$ mennyiség oda átvihető. Ezzel a lépéssel a célfüggvény értéke $(14 - 4) \cdot 60 - 810 = -210$ értékkel változik. Ezután az 5. lépésre kellene visszatérni.

Megjegyzem, hogy a 6. lépés szerinti javítás még hatékonyabb lenne, ha nem ragaszkodnánk ahhoz, hogy a teljes átviendő mennyiséget egyetlen forráshoz rendeljük, hanem megengednénk, hogy azt megosztottan is áthelyezhessük. Ha például a 7. táblázatban a $c_{23} = 16$ lenne, akkor célszerűbb lenne a megengedhető mennyiséget $(300 - 290 = 10)$ előbb a 3. sorba áthelyezni ($x_{33} = 10$) és csak a visszamaradt mennyiséget $(60 - 10 = 50)$ vinnénk át a 2. sorba ($x_{23} = 50$). Ugyanígy járhatnánk el akkor is, ha változatlanul $c_{23} = 14$, de $\alpha_2 = 200$ lenne. Tovább tökéletesíthetnénk ezt a lépést azáltal is, hogy a két kötött viszonylati mezőt tartalmazó sorok szerinti telephelyek megszüntetésének gazdasági hatását is megvizsgáljuk stb. Elsősorban a gyakorlat fogja megmutatni, hogy e lépés hatékonyságának fokozása érdekében az 1. fejezetben leírt algoritmust mennyire célszerű tovább bonyolítani.

4. Számpélda több felhasználható üzem típus esetére

Végül bemutatok egy számpéldát arra az esetre is, amikor a telepítendő objektumok háromféle nagyságban készülhetnek el:

$$\alpha_{i1} = 300, \alpha_{i2} = 200, \alpha_{i3} = 100$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Itt tehát a k indexre is szükségünk van ($k = 1, 2, 3$).

Az ellátó hálózatot ismét öt fogyasztó igényeinek kielégítése céljából kell létesíteni és a telepítésre négy hely alkalmas. Hogy az állandó költség hatását jobban figyelemmel kísérhessük, a példában olyan viszonyokat tételeztem fel, amikor a viszonylati (termelési) költségek az üzemnagyságtól a feladat határai között függetlennek tekinthetők. Az állandó költségek telephelyenként változnak és a kapacitással degresszíve növekednek. A viszonylati költségmutatókat, a telephelyi kapacitáskorlátokat és állandó költségeket az induló ciklussal együtt a 8. táblázatban láthatjuk. Mivel ebben a ciklus-optimumban egyetlen telephelyi kibocsátás sem telítődött, az újabb telephelyi költségmutatókat nem a 4., hanem az 5. lépésben határozzuk meg. Így az újabb ciklus-optimum a (2,2) jelű forrás kapacitását teljesen kihasználja (lásd a 9. táblázatot), de mivel

$$\sum_j \beta_j - \sum_{ik} \alpha_{ik} = 300$$

és az aktív (de nem telített) forrásokban ugyanakkora a kapacitás ($\alpha_{11} = 300$ és $\alpha_{21} = 300$), az újabb ciklus telephelyi költségmutatóit ismét az 5. lépésben határozzuk meg. (Figyeljük meg, hogy ha most a (15) szerint számítanánk újra a telephelyi költségmutatókat, az induló ciklusba kerülnénk vissza és

ebből a két cikusból álló körből nem tudnánk kijutni.) Az újabb ciklust a 10. táblázatban láthatjuk. Mivel itt a ciklus-optimumban csak teljesen kihasznált (1,1 és 2,2) és passzív (az összes többi ik $\{ik^*\}$ források szerepelnek, ez már a szub-optimális telepítési kombináció és a 7. lépésre térünk át. Ilyen esetben, amikor a ciklus-optimumban a (17) feltétel teljesül, akkor az már az optimális hozzárendelési tervet is megadja, tehát a 7. lépésben annak meghatározására már nincs szükség.

Érkezett: 1966 április hóban.

V_j		①	②	③	④	⑤		
$-u_i$		4,5	5,3	5,5	4,3	2,5		
2,3	1	6	3	5	2	7	-2,3	700
			210		80		-290	
		+		+		+	-300	
3,0	1	6	3	5	2	7	-3,0	600
							0	
		+	+	+	+	+	-200	
4,0	3	6	3	5	2	7	-4,0	400
							0	
		+	+	+	+	+	-100	
1,5	1	3	7	4	4	1	-1,5	450
			30	60		120	-210	
		+		+			-300	
2,0	2	3	7	4	4	1	-2,0	400
							0	
		+	+	+	+	+	-200	
3,0	3	3	7	4	4	1	-3,0	300
							0	
		+	+	+	+	+	-100	
3,7	1	5	2	3	1	6	-3,7	1100
							0	
		+	+	+	+	+	-300	
5,0	3	5	2	3	1	6	-5,0	1000
							0	
		+	+	+	+	+	-200	
7,0	3	5	2	3	1	6	-7,0	700
							0	
		+	+	+	+	+	-100	
5,3	1	3	5	2	3	2	-5,3	1600
							0	
		+	+	+	+	+	-300	
7,0	3	3	5	2	3	2	-7,0	1400
							0	
		+	+	+	+	+	-200	
10,0	3	3	5	2	3	2	-10,0	1000
							0	
		+	+	+	+	+	-100	
		30	210	60	80	120	-500	

''0'' ciklus 8. táblázat

$v_j \backslash u_i$		①	②	③	④	⑤	
		5,14	5,41	6,14	4,41	3,14	
2,41	1	6	3	5	2	7	-2,41 700 -290
	+		210	+	80	+	-300
3,0	1 2	6	3	5	2	7	-3,0 600 0
	+			+		+	-200
4,0	3	6	3	5	2	7	-4,0 400 0
	+		+	+	+	+	-100
2,14	1	3	7	4	4	1	-2,14 450 -10
	0		+	0	+	10	-300
2,14	2	3	7	4	4	1	-2,0 400 (-200)
	30			60		110	-200
3,0	3	3	7	4	4	1	-3,0 300 0
	+		+	+	+	+	-100
3,7	1	5	2	3	1	6	-3,7 1100 0
	+		+	+	+	+	-300
5,0	3 2	5	2	3	1	6	-5,0 1000 0
	+		+	+	+	+	-200
7,0	3	5	2	3	1	6	-7,0 700 0
	+		+	+	+	+	-100
5,3	1	3	5	2	3	2	-5,3 1600 0
	+		+	+	+	+	-300
7,0	4 2	3	5	2	3	2	-7,0 1400 0
	+		+	+	+	+	-200
10,0	3	3	5	2	3	2	-10,0 1000 0
	+		+	+	+	+	-100
		30	210	60	80	120	-500

"1" ciklus 9. táblázat

$v_j \backslash u_i$		①	②	③	④	⑤	
		6,41	5,41	7,41	4,41	4,41	
2,41	1	6	3	5	2	7	2,41 700 -300
	+						-300
3,0	2	6	3	5	2	7	3,0 600 0
	+						-200
4,0	3	6	3	5	2	7	-4,0 400 0
	+						-100
45,0	1	3	7	4	4	1	-45,0 450 0
	+						-300
34,1	2	3	7	4	4	1	-2,0 400 -200
	+						-200
3,0	3	3	7	4	4	1	-3,0 300 0
	+						-100
3,7	1	5	2	3	1	6	-3,7 1100 0
	+						-300
5,0	2	5	2	3	1	6	-5,0 1000 0
	+						-200
7,0	3	5	2	3	1	6	-7,0 700 0
	+						-100
5,3	1	3	5	2	3	2	-5,3 1600 0
	+						-300
7,0	2	3	5	2	3	2	-7,0 1400 0
	+						-200
10,0	3	3	5	2	3	2	-10,0 1000 0
	+						-100
		30	210	60	80	120	-500

Optimális megoldás 10. táblázat

A BETON σ — ε DIAGRAMJÁRÓL

A dolgozat a beton nyúlás — feszültség diagramjára egy olyan törtkitevőjű hatványfüggvényt javasol alkalmazni, mely folytonos, és a határfeltételeket maradéktalanul kielégíti. A javasolt összefüggés néhány alkalmazását példákön mutatja be.

1. Bevezetés

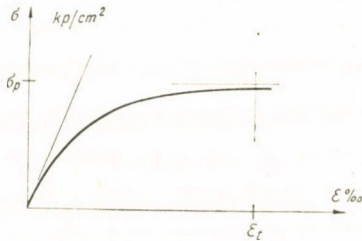
A beton σ — ε diagramját az empirikus adatok megközelítése céljából a különböző szerzők különbözőképp javasolják felvenni [1].

A σ — ε diagramnak két jellegzetes feltételt kell kielégítenie. Kezdeti érintője iránytangensének a kezdeti rugalmassági tényező értékét kell adnia és a törési összenyomódás értékénél a törőfeszültséget, azaz a prizmaszilárd, ságot kell elérnie.

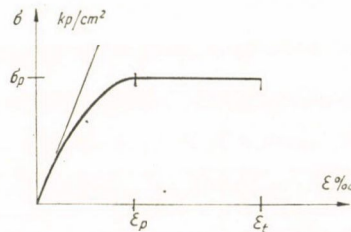
Az eddig alkalmazott diagramtípusok közül a Ritter—Mörsch-féle

$$E = E_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_p} \right)$$

összefüggésből levezettek logaritmikus összefüggést adnak (l. 1. ábra), mely a második feltételt nem elégíti ki. Ennek a kiküszöbölésére vezették be a para-



1. ábra.



2. ábra.

bolából és vízszintes egyenesből, összetett σ — ε diagramot melyek az ε_p pontnál csatlakoznak, (l. 2. ábra). Ez azonban nem folytonos, az ε_p pont felvétele önkényes, ezenkívül minden betonminőségre azonos rugalmassági tényező változást ad, ez pedig a tapasztalattal ellenkezik.

Jelen dolgozatban a σ — ε diagram olyan felvételére teszünk javaslatot, mely az említett hiányosságokat kiküszöböli.

2. Jelölések

K	a beton kockaszilárdsága.
σ	a beton feszültsége.
σ_p	a beton prizmaszilárdsága.
E'	a beton feszültségtől függő rugalmassági tényezője.
E_0	a rugalmassági tényező kezdeti értéke.
ε	a fajlagos összenyomódás értéke.
ε_t	a törési összenyomódás értéke.

3. Javaslat a σ - ε diagramra

Vegyük fel a σ - ε diagramot egy törtkitevőjű hatványfüggvénynek, ahol a kitevő értékét a bevezetésben említett feltételek kielégítéséből határozzuk meg.

Legyen

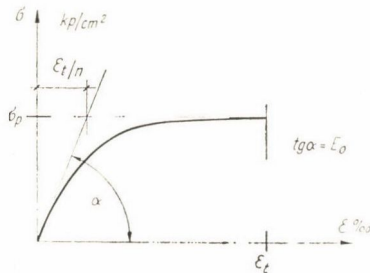
$$\sigma = \sigma_p \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} \right)^n \right]. \quad (1)$$

Ebből

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} = 1 - \sqrt[n]{1 - \frac{\sigma}{\sigma_p}}. \quad (2)$$

A rugalmassági tényezőt kifejezve:

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = n \frac{\sigma_p}{\varepsilon_t} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} \right)^{n-1}. \quad (3)$$



3. ábra.

Az $\varepsilon = 0$ helyen a (3) kifejezésnek az E_0 értéket kell felvennie, azaz

$$E_0 = n \frac{\sigma_p}{\varepsilon_t}. \quad (4)$$

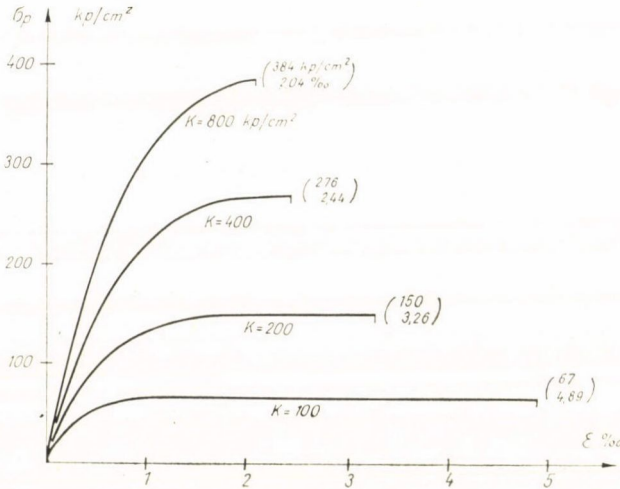
Innen

$$n = \frac{E_0 \varepsilon_t}{\sigma_p}.$$

A (3) kifejezésbe betéve (2) és (4) értékeit, a beton feszültségétől függő rugalmassági tényezőjére a következőt kapjuk:

$$E = E_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_p} \right)^{1 - \frac{\sigma_p}{E_0 \varepsilon_t}} \quad (5)$$

A σ_p , E_0 és az ε_t értékeire a különböző szerzők tendenciájukban azonos, de számértékeikben különböző adatokat adnak meg. Szemléltetés céljából



4. ábra.

fogadjuk el a Palotás [2] által $K \leq 800$ kp/cm² esetére javasolt értékeket. Így

$$E_0 = 550\,000 \frac{K}{200 + K}, \quad \left| \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right| \quad (6)$$

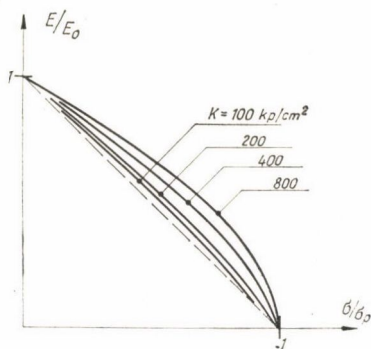
$$\sigma_p = 600 \left(\frac{K}{200 + K} \right)^2, \quad \left| \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} \right| \quad (7)$$

$$\varepsilon_t = 1,629 \frac{200 + K}{K}, \quad \left| \frac{\text{‰}}{\text{‰}} \right| \quad (8)$$

A (6), (7) és (8) értékekkel meghatároztuk a σ – ε diagramot különböző betonszilárdságokra, és azt a 4. ábrán szemléltetjük. A rugalmassági tényezőnek a feszültséggel való változása a különböző betonminőségek esetén az 5. ábrán látható.

Az 5. ábra szerint a rugalmassági tényező feszültséggel való változása gyengébb betonoknál a Ritter–Mörsch, nagyszilárdságú betonoknál a parabolából és egyenesből összetett diagramhoz áll közel.

A javasolt $\sigma-\varepsilon$ diagram folyamatos, a megkövetelt határfeltételeket kielégíti, és ezért tág határok között felhasználható. Néhány alkalmazását a következő fejezetben mutatjuk be.



5. ábra.

4. Példák a javasolt $\sigma-\varepsilon$ diagram alkalmazására

4,1 Derékszögű négyszögű vasbeton keresztmetszet törőnyomatéka

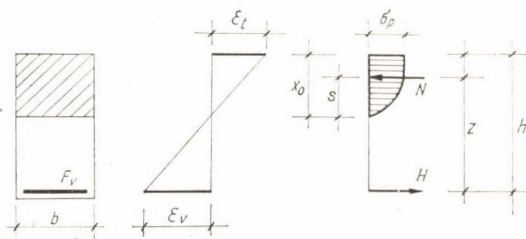
A b szélességű keresztmetszet adatait és a jelöléseket a 6. ábrán tüntetjük fel.

A vizsgálatnál feltesszük, hogy az alkalmazott acélbetét ideálisan rugalmas-plasztikus, és így a folyási határig az acélbetét rugalmassági tényezője állandó.

A betonfeszültségek N eredője:

$$N = b \int_0^{x_0} \sigma dx = \sigma_p b x_0 \frac{n}{1+n}, \quad (9)$$

$$s = \frac{\int_0^{x_0} \sigma x dx}{\int_0^{x_0} \sigma dx} = \frac{x_0}{2} \left(\frac{3+n}{2+n} \right). \quad (10)$$



6. ábra.

A (9) és (10) adatok felhasználásával a törőnyomaték az

$$M_t = N(h - x_0 + s) \quad (11)$$

kifejezésből határozható meg. Így

$$M_t = \sigma_p b x_0 \left(\frac{n}{1+n} \right) \left(h - \frac{x_0}{2} \cdot \frac{1+n}{2+n} \right). \quad (12)$$

Ha az acélbetétben a σ_v feszültség nem éri el a σ_f folyási határt, akkor

$$\sigma_v = \varepsilon_v E_v, \quad (13)$$

és a (6) ábrából kifejezhetően

$$\sigma_v = \frac{h - x_0}{x_0} \varepsilon_t E_v. \quad (14)$$

A (14) összefüggést behelyettesítve a $H = N$ egyensúlyi egyenletbe, és felhasználva a

$$B = \frac{F_v \varepsilon_t E_v}{2b \sigma_p} \cdot \frac{n+1}{n} \quad (15)$$

rövidítést, x_0 -ra a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{x_0^2}{2} + Bx_0 - Bh = 0. \quad (16)$$

A (16) ból

$$x_0 = \sqrt{B^2 + 2Bh} - B. \quad (17)$$

A (17) segítségével a (12) képletből az M_t törőnyomaték meghatározható. Ha a

$$\sigma_v = \frac{\sigma_p b x_0}{F_v} \cdot \frac{n}{1+n} \quad (18)$$

képletből számított vasfeszültség a σ_f folyási határt meghaladja, akkor az x_0 értéket a $H = N$ egyensúlyi egyenletből kell közvetlenül meghatároznunk. Így az

$$F_v \sigma_f = \sigma_p b x_0 \frac{n}{1+n} \quad (19)$$

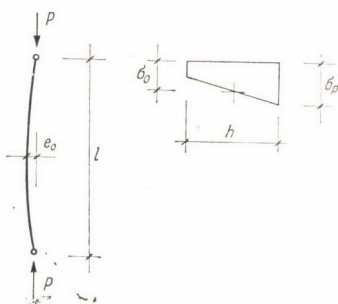
egyensúlyi egyenletből:

$$x_0 = \frac{F_v \sigma_f}{b \sigma_p} \cdot \frac{1+n}{n}. \quad (20)$$

A törőnyomaték ez után ismét a (12) kifejezésből határozható meg.

4.2 Kis külpontossággal nyomott oszlop teherbírása

Vizsgáljuk a 7. ábrán ábrázolt, a végén összpontos P erővel terhelt, szinuszgörbe alakú, közepén e_0 külpontosságú, l hosszúságú kétesuklós tömör keresztmetszetű rudat az ENGESSER I. elmélet alapján. Ez azt jelenti, hogy figyelembe vesszük a rugalmassági tényezőnek a központos nyomóerő miatti csökkenését. A külpontos hatások vizsgálatánál az így meghatározott rugalmassági tényezőt állandónak tekintjük, és a lineárisan rugalmas elmélettel



7. ábra.

számítva azt a P_t erőt tekintjük tönkretévő erőnek, melynél az ilyen alapon meghatározott lineáris feszültségábra szélsőszerű értéke a prizmaszilárdságot eléri.

El vizsgálatnál σ_0 a súlyponti feszültség, k , ill. i a keresztmetszet magasságára, ill. inerciasugara. Legyen $\lambda = l/i$, $\varphi = \sigma_0/\sigma_p$, és F a keresztmetszet területe.

Az említett tönkremenési feltétel a bevezetett jelölésekkel a következő:

$$\sigma_p = \sigma_0 \left(1 + \frac{e/k}{1 - \sigma_0/\sigma_k} \right), \quad (21)$$

ahol σ_k a csökkentett rugalmassági tényezővel meghatározott EULER-féle kritikus feszültség.

Így

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E_0}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_p} \right)^{1 - \frac{\sigma_p}{E_0 \varepsilon_t}}. \quad (22)$$

A (22) kifejezést a (21) egyenletbe helyettesítve, rendezve és egyszerűsítve a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{(1-\varphi) \sigma_p/E_0 \varepsilon_t} \left[\frac{1}{\varphi} - 1 - \frac{e}{k} \right] = \frac{\sigma_p \lambda^2}{\pi^2 E_0}. \quad (23)$$

A (23) egyenletből φ értékét meghatározva, a P_t tönkretevő erő:

$$P_t = \varphi \sigma_p F. \quad (24)$$

A javasolt $\sigma-\varepsilon$ diagram a bemutatott példákon kívül még számos feladat megoldására jól alkalmazható.

IRODALOM

1. *Palotás L.*: Vasbeton rúdszerkezetek stabilitási kérdései. *Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tud. Közleményei* II. kötet 6. (1956).
2. *Mihailich—Palotás*: Vasbetonépítéstan. Tankönyvkiadó Budapest 1964.