

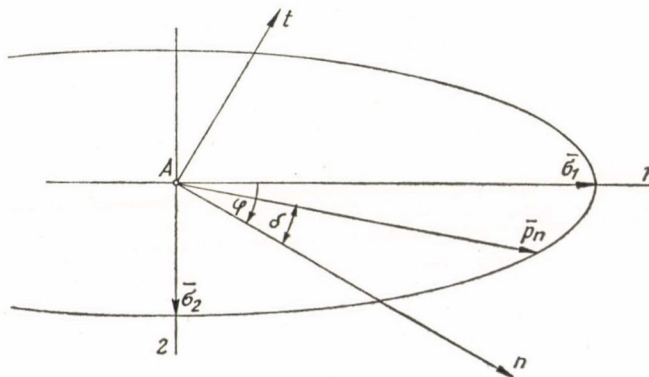
A MOHR-FÉLE TENZORÁBRÁZOLÁS TOVÁBBFEJLESZTÉSE

Másodfokú szimmetrikus tenzorokkal kapcsolatos rendkívül szellemes és egyszerű ábrázolási lehetőséget mutatott Mohr egyik alapvető dolgozatában [1]. A módszer a mérnöki gyakorlatban igen elterjedt és bizonyos érvényességi határok közt alkalmazási lehetősége közismert. Az alábbi tanulmány célja a módszer alkalmazási körének bővítésére törekvő irodalom eredményeinek rövid rendszerbe foglalása és az eljárás továbbfejlesztése olyan mértékben, hogy az e téren felvethető legáltalánosabb feladat — az általános tenzortranszformáció — megoldására is alkalmas legyen.

Előzetesen megjegyezzük, hogy bár tárgyalásaink bármilyen másodfokú szimmetrikus tenzorra érvényesek, a szóban levő összefüggéseket egyszerűség kedvéért konkrét esetben, éspedig a feszültségi tenzor esetében mutatjuk be.

1. A fősíkok törvényszerűségeinek ábrázolása

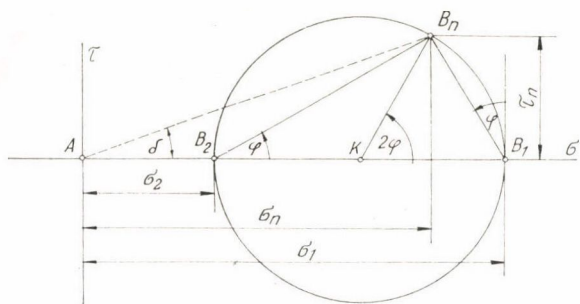
A szilárd test A pontjában a feszültségi tenzor sajátértékeit jelöljük a következő sorrend szerint: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Az egyik fősíkban felvehető n normálisokhoz tartozó \bar{p}_n feszültségvektorok végpontjainak geometriai helye a fősíkban fekvő és a testhez rögzített fő tengelyekből álló koordináta-rendszerben egy ellipszis, az n és a fősíkban erre merőlegesen felvett t normálisok által alkotott koordináta-rendszerben pedig az általánosan használt Mohr-féle feszültségi kör. Bár mindezek és a vonatkozó képletek is jól ismertek, az alkalmazásra kerülő jelölések és előjelmegállapodások bemutatása kedvéért az 1. ábrán feltüntettük példaképpen a 3. fősíkot az 1. és 2. fő tengelyekből álló és



1. ábra

balsodrásúnak választott koordináta-rendszerben, egy tetszőlegesen felvett n és ennek megfelelő t normálissal együtt. Megrajzoltuk az említett feszültségi ellipszist is.

A 2. ábrán ugyanezt a fősíkot az n és t által alkotott mozgó koordináta-rendszerből szemlélve ábrázoltuk, de a koordinátatengelyeket a szokásnak



2. ábra

megfelelően σ és τ tengelyeknek neveztük. E rendszerben a szaggatott vonallal megrajzolt feszültségvektor végpontját B_n -nel jelöltük. Ezt a továbbiakban az n normálissalhoz tartozó ábrázoló pontnak nevezzük. Megszerkesztésmódját ábránk háromféleképpen is megmutatja, az n normális φ irányszögének ellenkező értelmű felmérésével a B_1 vagy a B_2 pontnál, vagy pedig a K középpontnál ugyancsak ellenkező értelemben felmért 2φ szög segítségével.

A B_n ábrázoló pont két koordinátája a \bar{p}_n feszültségnek az n, t rendszerbeli σ_n és τ_n koordinátáit jelenti. Ezekre a jól ismert képletek is rendelkezésünkre állnak:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi \quad (1)$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi \quad (2)$$

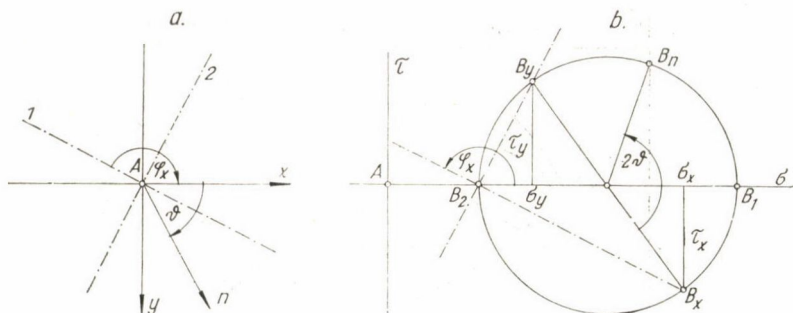
Emlékeztetbe idézzük még azt, hogy a fősíkban tetszőlegesen megadott, de egymásra merőleges két normálissal megfelelő feszültségi adatok is elegendők ebben a fősíkban fekvő bármely más n normálissalhoz tartozó σ_n és τ_n értékek számításához. Így a 3a) ábrán adott x és y normálisokhoz tartozó $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ adatok ismeretében a ϑ irányszögű n normális esetén:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\vartheta + \tau_{xy} \sin 2\vartheta \quad (3)$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\vartheta - \tau_{xy} \cos 2\vartheta \quad (4)$$

Ugyanezek az adatok — amint ismeretes — lehetővé teszik a 3b) ábra szerint a Mohr-féle feszültségi kör megrajzolását, a fenti σ_n és τ_n feszültségi

értékek meghatározását a B_n ábrázoló pont koordinátáiként, sőt az eredményvonallal feltüntetett főteengelyek megszerkesztését is. A kör megrajzolását a B_x és B_y ábrázoló pontok megkeresése teszi lehetővé. Ezek koordinátái a (3)



3. ábra

és (4) képletekből határozhatók meg, éspedig az x normális esetén $\vartheta = 0$, y esetén $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ helyettesítéssel. Így B_x koordinátái: σ_x és $\tau_x = -\tau_{xy}$, B_y koordinátái: σ_y és $\tau_y = +\tau_{xy}$.

2. A Mohr-féle tenzor-ábrázolás

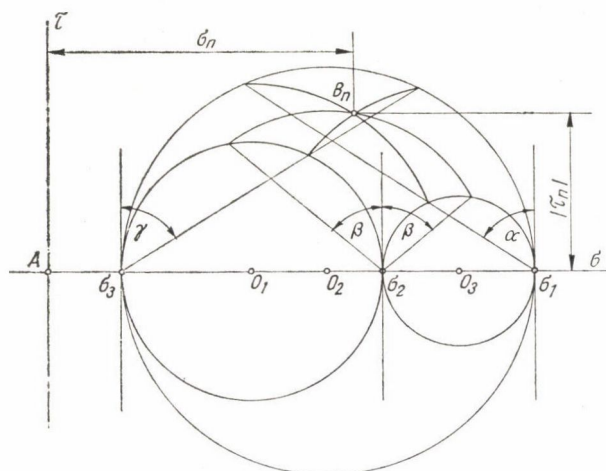
A szilárd test A pontjában legyenek ismertek az 1., 2., 3. főteengelyek és ezekhez tartozó főértékek. Már annak idején Mohr felvetette a kérdést, hogy miképpen szerkeszthető meg a feszültség olyan normális esetén, amelyik nincs benne egyik fősíkban sem. Az n -hez tartozó p_n feszültség σ_n normális és τ_n nyíró összetevőit tekintve ezúttal is a B_n ábrázoló pont koordinátáinak, tulajdonképpen ennek a B_n pontnak a megszerkesztéséről van szó.

Amint ismeretes, Mohr e feladat megoldását a három fősíkhöz tartozó feszültségi kört együttesen feltüntető ábrán mutatta meg. Igazolta ugyanis azt a tételt, hogy valamely főteengellyel egyenlő szögeket bezáró normálisok ábrázoló pontjai a szóban levő főteengelyre merőleges fősíkhöz tartozó feszültségi körrel koncentrikus körön foglalnak helyet. Ez a kör azonban könnyen meg is szerkeszthető, mert a szóban levő normálisok közt négy is feszültségi fősíkban van. Ilyen normálisra azonban az 1. pontban tárgyalt eljárás alkalmazható.

Legyenek tehát az n normális irányszögei a főteengelyekhez képest rendre: α , β , γ . A 4. ábrán megrajzoltuk az 1., 2. és 3. feszültségi fősíkhöz tartozó O_1 , O_2 és O_3 középpontú három feszültségi kört. Ezután α megfelelő felmérése után kapjuk az O_1 középpontú koncentrikus kört. Ezen vannak az 1. főteengellyel α szöget bezáró normálisok ábrázoló pontjai. Ugyanúgy kereshetjük meg a 2. főteengellyel β , vagy a 3. főteengellyel γ szöget bezáró normálisok ábrázoló pontjainak geometriai helyét. A B_n ábrázoló ponton mindhárom koncentrikus körívnek át kell mennie, így ez könnyen megkapható.

Ennek a szerkesztésnek fő hiányossága az, hogy a \bar{p}_n feszültségvektor irányát nem adja meg. A σ_n normális feszültség teljes mértékben, előjellel

együtt ismeretessé válik, de a τ_n nyírófeszültségnek csak a nagysága olvasható le, és bár tudjuk, hogy n -re merőleges, de ezzel térbeli iránya még nincs meghatározva.

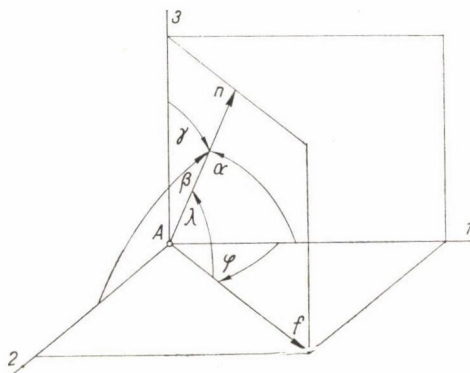


4. ábra

3. A meridiánsíkok törvényszerűségeinek ábrázolása a feszültség két derékszögű összetevőjével

Foglalkozunk az egyik főtengelesen átmenő síkban fekvő normálisokkal. Az ilyen síkot a következőkben meridiánsíknak, a szóban levő főtengelelyre merőleges fősíkot ekvátorsíknak fogjuk nevezni. Az 5. ábrán a főtengelekhez képest α , β , γ irányszögekkel meghatározott n normálison és a 3. főtengelesen átfektetett sík a meridiánsík, a 3. fősík az ekvátorsík.

A derékszögű parallel koordináta-rendszerről térjünk át poláris koordináta-rendszerre. Ekkor az n irányt az ekvátorsíkban levő φ és a meridiánsíkban



5. ábra

levő λ irányszögekkel adhatjuk meg. A φ -t hosszúságnak, λ -t pedig szélességnek nevezhetjük. A két rendszer között egyszerű az átszámítás az ábrából közvetlenül leolvasható következő összefüggésekkel:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos \lambda \cos \varphi \\ \cos \beta &= \cos \lambda \sin \varphi \\ \cos \gamma &= \sin \lambda.\end{aligned}\tag{5}$$

Hivatkozunk néhány jól ismert eredményre [2]. Így a \bar{p}_n koordinátái:

$$p_{n1} = \sigma_1 \cos \alpha; \quad p_{n2} = \sigma_2 \cos \beta; \quad p_{n3} = \sigma_3 \cos \gamma\tag{6}$$

Ezekből:

$$p_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma\tag{7}$$

Ismeretes az is, hogy:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma.\tag{8}$$

Ugyanezeket felírhatjuk az ekvátorsík és meridiánsík metszéspontjában felvett f irányra:

$$p_f^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \varphi + \sigma_2^2 \sin^2 \varphi\tag{9}$$

$$\sigma_f = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi.\tag{10}$$

De a (7) és (8) is átalakítható poláris koordinátákkal: $p_n = \sigma_1^2 \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \lambda \sin^2 \varphi + \sigma_3^2 \sin^2 \lambda$. A (9) felhasználásával:

$$p_n^2 = p_f^2 \cos^2 \lambda + \sigma_3^2 \sin^2 \lambda\tag{11}$$

Ugyanígy:

$$\sigma_n = \sigma_f \cos^2 \lambda + \sigma_3 \sin^2 \lambda.\tag{12}$$

Ilyen előkészítés után emlékezzünk meg egy további tételről. Eszerint az egyik főtengelyen átmenő síkban fekvő normálisok ábrázoló pontjai olyan körön foglalnak helyet, amelynek középpontja a σ tengelyen van és átmege a szóban levő főtengely ábrázoló pontján. E tételt már Mohr igazolta alapvető dolgozatában [1]. Később Westergaard ismertette a tétel egy újabb levezetését [3]. A következőkben eltérő megfontolás alapján egy még egyszerűbb igazolásmódot mutatunk be.

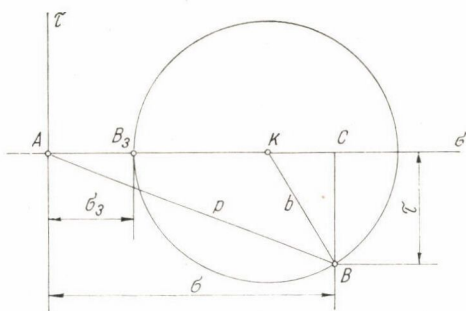
Írjuk fel egy olyan kör egyenletét, amelynek K középpontja a σ tengelyen van és átmege a 3. főtengely B_3 ábrázoló pontján. Ha a kör sugara a 6. ábra szerint b , a kör egy tetszőleges B pontjának koordinátái pedig σ és τ , akkor $\overline{KC} = \sigma - \sigma_3 - b$. A KBC derékszögű háromszögből: $(\sigma - \sigma_3 - b)^2 + \tau^2 = b^2$. Így a $\sigma^2 + \tau^2 = p^2$ összefüggés figyelembevételével a kör egyenlete:

$$p^2 - 2\sigma_3 \sigma - 2b(\sigma - \sigma_3) + \sigma_3^2 = 0.\tag{13}$$

Válasszuk meg a b sugarat úgy, hogy a kör átmenjen az 5. ábrán látható f normális σ_f és τ_f koordinátájú B_f ábrázoló pontján. Ezek behelyettesítésével a (13)-ból:

$$2b = \frac{p_f^2 - 2\sigma_3 \sigma_f + \sigma_3^2}{\sigma_f - \sigma_3}\tag{14}$$

Ezután már csak arról kell meggyőződni, hogy a meridiánsíkban fekvő tetszőleges n normális σ_n és τ_n koordinátájú B_n ábrázoló pontja rajta van-e ezen a körön? Ez esetben $\overline{AB_n} = p_n$. Helyettesítsük mindezeket a kör egyenletébe



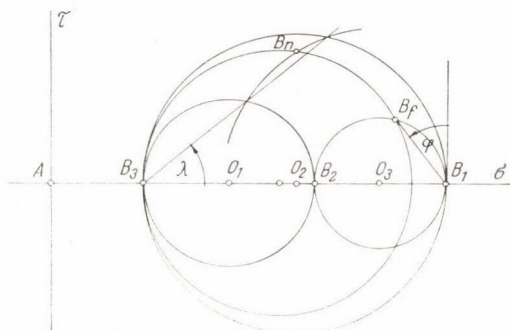
6. ábra

és vegyük figyelembe 2b fenti (14) értékét, valamint a (11) és (12) képleteket

$$\begin{aligned}
 p_n^2 - 2\sigma_3 \sigma_n - 2b(\sigma_n - \sigma_3) + \sigma_3^2 &= p_f^2 \cos^2 \lambda + \sigma_3^2 \sin^2 \lambda - 2\sigma_3 \sigma_f \cos^2 \lambda - \\
 - 2\sigma_3^2 \sin^2 \lambda - \frac{(p_f^2 - 2\sigma_3 \sigma_f + \sigma_3^2)(\sigma_f \cos^2 \lambda + \sigma_3 \sin^2 \lambda - \sigma_3)}{\sigma_f - \sigma_3} + \sigma_3^2 &= \\
 &= (p_f^2 - 2\sigma_3 \sigma_f) \cos^2 \lambda + \sigma_3^2 (1 - \sin^2 \lambda) - \\
 - (p_f^2 - 2\sigma_3 \sigma_f + \sigma_3^2) \frac{\sigma_f \cos^2 \lambda - \sigma_3 \cos^2 \lambda}{\sigma_f - \sigma_3} &= (p_f^2 - 2\sigma_3 \sigma_f + \sigma_3^2) \cos^2 \lambda - \\
 - (p_f^2 - 2\sigma_3 \sigma_f + \sigma_3^2) \cos^2 \lambda &= 0.
 \end{aligned}$$

Tehát B_n valóban rajta van a körön. Ezzel a tételt igazoltuk.

A szóban levő feszültségi kört a 7. ábra mutatja. A B_3 és B_f ábrázoló pontokon át megrajzolt körön a B_n ábrázoló pontot a 2. pontban tárgyalt O_3 középpontú koncentrikus kör segítségével kerestük meg.



7. ábra

A meridiánsíkhöz tartozó ilyen feszültségi körnek ugyanaz a fogyaté-
kossága van, mint a 2. pontban ismertetett módszernek. Bármelyik B_n ábrá-
zoló pont előjelre helyesen megadja a σ_n normális feszültséget, a τ_n nyíró-
feszültségnek azonban csak a nagyságát kapjuk meg, irányát nem.

Végül megemlítjük, hogy teljesen hasonló feszültségi kör szerkeszthető
értelemszerű változtatásokkal akkor is, ha a 3. fő tengely szerepét az 1. vagy
a 2. tölti be és ezeken átmenő meridiánsíkokról van szó.

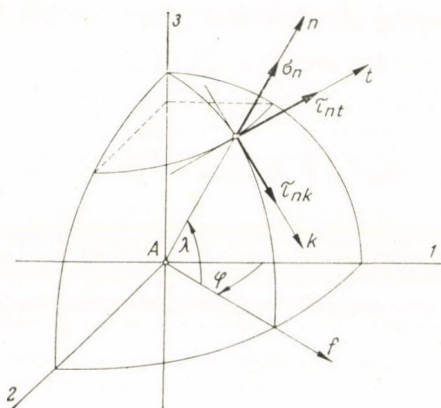
4. A meridiánsíkok törvényszerűségeinek ábrázolása a feszültség három derékszögű összetevőjével

A feszültségvektor nagyságán kívül iránya is egyértelműen ismertté
válk, ha három adott irányú összetevőjét határozzuk meg. A 8. ábra a 3. fő-
tengelyen átmenő és φ hosszúsággal megadott meridiánsíkban a λ szélességnek
megfelelő n normálist mutatja. A szemléletesebb ábrázolás kedvéért a szilárd
testből kivágott és A középpontú elemi gömb felületének n normálisú pontjá-
ban bontottuk fel képzeletben a p_n feszültségvektort a σ_n normális feszültségre,
továbbá a meridiánsíkban fekvő τ_{nk} és az arra merőleges τ_{nt} nyírófeszültségi
összetevőre.

Mindezeket az összetevőket egyszerűen határozhatjuk meg. Az f normá-
lishoz tartozó feszültségi összetevők az 1. pontban tárgyalt eljárás alapján
már rendelkezésünkre állnak. A σ_n normális feszültség a (12) szerint, vagy a
kétszeres szögre történő áttéréssel:

$$\sigma_n = \sigma_f \cos^2 \lambda + \sigma_3 \sin^2 \lambda = \frac{\sigma_f + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_f - \sigma_3}{2} \cos 2\lambda \quad (15)$$

A nyírófeszültségi összetevők számára jól ismert képlet áll rendelkezé-
sünkre az irodalomban derékszögű koordináta-rendszerre vonatkozó irányzó-



8. ábra

gek alkalmazásával. Ha az n normális irányszögei α, β, γ , egy rá merőleges n' normálisé pedig α', β', γ' , akkor amint például a [2]-ből tudjuk:

$$\tau_{nn'} = \sigma_1 \cos \alpha \cos \alpha' + \sigma_2 \cos \beta \cos \beta' + \sigma_3 \cos \gamma \cos \gamma'. \quad (16)$$

Az α, β, γ helyett a φ és λ , az α', β', γ' helyett pedig a φ' és λ' poláris koordináták vezethetők be az (5) alatti transzformációs képletek alkalmazásával. Így:

$$\begin{aligned} \tau_{nn'} = \sigma_1 \cos \lambda \cos \varphi \cos \lambda' \cos \varphi' + \sigma_2 \cos \lambda \sin \varphi \cos \lambda' \sin \varphi' + \\ + \sigma_3 \sin \lambda \sin \lambda'. \end{aligned} \quad (17)$$

A k irány esetén: $\varphi' = \varphi$ és $\lambda' = \lambda - \frac{\pi}{2}$. Ennek megfelelően:

$$\tau_{nk} = (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi - \sigma_3) \sin \lambda \cos \lambda.$$

Figyelembe véve a (10)-et és a kétszeres szögekre áttérve:

$$\tau_{nk} = (\sigma_f - \sigma_3) \sin \lambda \cos \lambda = \frac{\sigma_f - \sigma_3}{2} \sin 2\lambda \quad (18)$$

A t irány esetén: $\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$, $\lambda' = 0$. Így a (17)-ből:

$$\tau_{nt} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi \cos \lambda.$$

De az f normálisra alkalmazva a (2)-t:

$$\tau_f = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi.$$

Így:

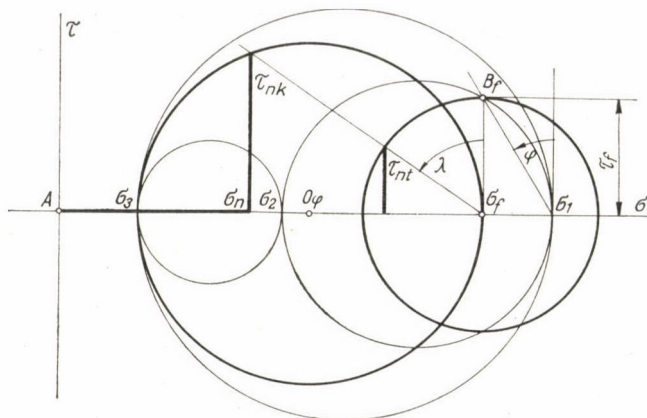
$$\tau_{nt} = \tau_f \cos \lambda \quad (19)$$

A (15) és (18) teljes analógiája az (1) és (2)-vel azt mutatja, hogy a meridiánsíkban felvett normálisokhoz tartozó feszültségeknek a meridiánsíkban levő derékszögű összetevői éppen úgy szerkeszthetők meg, mint feszültségi fősíkokban adott normálisok esetén, azonban a főfeszültségek szerepét azok a normális feszültségek (σ_f és σ_3) veszik át, amelyek a meridiánsíknak feszültségi fősíkokkal való metszsvonalaihoz tartoznak.

A 9. ábra mutatja az így kialakítható szerkesztést. A fősíkok három Mohr-féle feszültségi körét felhasználva először σ_f határozható meg, majd a $\sigma_f - \sigma_3$ átmérőjű és O_φ középpontú kör szerkeszthető meg, amelyet a φ szöggel jellemzett meridiánsík első feszültségi körének nevezhetünk. Ebben szerkeszthetjük meg teljesen a 2. ábra mintájára a meridiánsíkban fekvő σ_n és τ_{nk} feszültségi összetevőket.

A meridiánsíkra merőleges τ_{nt} összetevő (19) alatti képlete is egyszerű szerkesztést tesz lehetővé, amit ugyancsak a 9. ábrán tüntettünk fel. A σ tengelyen levő σ_f koordinátájú pontból, mint középpontból, rajzoljunk kört a B_f ábrázoló ponton át. Nevezzük ezt a φ szöggel jellemzett meridiánsík második

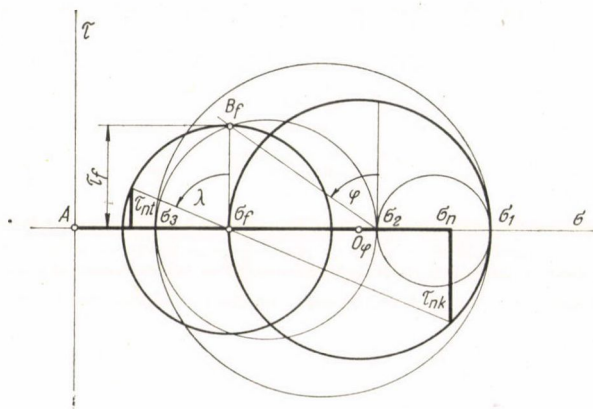
feszültségi körének. A τ_{nk} megszerkesztéséhez meghúzott λ hajlású egyenesnek ezzel a körrel való metszése minden további nélkül előjelre is helyesen megadja a τ_{nt} összetevőt.



9. ábra

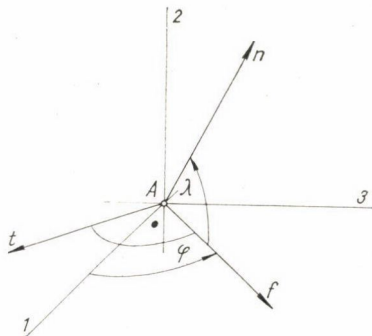
Ábránkon a meridiánsík első és második feszültségi körét, valamint a megszerkesztett három feszültségi összetevőt vastagabb vonallal tettük szembe-tűnőbbé. Végül megemlítjük, hogy φ és λ is irányszögeknek tekinthetők, így $0 \leq \varphi < 2\pi$ és $0 \leq \lambda < 2\pi$. Értéküket változtatva, szerkesztésünk előjelre nézve is mindig helyes.

Felhívjuk a figyelmet, hogy nemcsak a 3., hanem akár az 1., akár a 2. főtegelyen átmenő meridiánsíkok feszültségi körői is teljesen hasonlóan szerkeszthetők meg. Legyen szó először az 1. főtegelyen átmenő valamelyik meridiánsíkról. Ebben az esetben a 8. ábrán csak azt a változtatást kell tennünk, hogy az 1., 2., 3. főtegelyek számát rendre 2., 3., 1.-re kell módosítani. A két feszültségi kör és a feszültségi összetevők szerkesztését a 10. ábrán tüntettük fel. Amint látjuk, példánk esetében $\tau_{nk} < 0$ és $\tau_{nt} > 0$.



10. ábra

Ha a 2. főteengelyen átmenő meridiánsíkokról van szó, akkor már vigyáznunk kell a helyes előjelekre. Nem elég tehát az 1., 2., 3. számokat rendre 3., 1., 2.-vel felcserélni, hanem a 2. feszültségi fősíkból az f normális φ irányszögét a nagyobbik főfeszültségnek megfelelő 1. főteengelytől kell mérnünk, mintha a fősíkot a másik oldaláról — alulról — szemlélnénk. Ezzel természetesen ellenkezőre válik a t normális pozitív értelme is úgy, ahogy a 11. ábrán

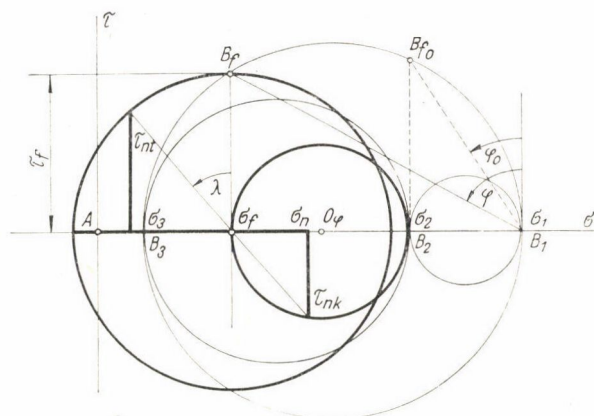


11. ábra

látjuk. Ekkor aztán a meridiánsík első és második feszültségi köre, valamint a három feszültségi összetevő a 12. ábra szerint az eddig felismert szabályok betartásával szerkeszthető meg.

Az ábrával kapcsolatosan érdekes körülményre hívjuk fel a figyelmet. A különböző φ szögeknek megfelelően $\sigma_3 \leq \sigma_f \leq \sigma_1$ határok közt változik a σ_f . Így lehet, hogy $\sigma_f < \sigma_2$, mint ábránkon is. Előfordulhat, hogy $\sigma_f > \sigma_2$. Ekkor a τ_{nk} is pozitív lesz, de a szerkesztés lényegében változatlan. Különleges esetként előfordulhat a $\sigma_f = \sigma_2$ is. Ekkor a B_f pont az ábrán látható B_{f_0} -ba kerül. Ilyenkor az első feszültségi kör sugara zérus, ezért $\tau_{nk} = 0$, a nyírófeszültség tehát merőleges a meridiánsíkra. Az ennek megfelelő φ_0 hosszúság, illetőleg irányszög az ábrából leolvasható. Ugyanis:

$$\overline{B_2 B_{f_0}} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}.$$



12. ábra

Így:

$$\tan \varphi_0 = \frac{\overline{B_1 B_2}}{\overline{B_2 B_{f0}}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}} = \sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_3}}$$

A fentieket azzal fejezzük be, hogy az első feszültségi kör létezését az irodalomban már más úton igazolták, de a további kidolgozás, a második feszültségi kör bevezetése, a feszültségvektor harmadik összetevőjének előjelre helyes megszerkesztése stb. elmaradt.

5. Tetszőleges koordinátasíkok törvényszerűségeinek ábrázolása

Másodfokú szimmetrikus tenzor nemcsak a három sajátértékével adható meg, hanem egymásra kölcsönösen merőleges, egyébként tetszőleges három normálishoz tartozó koordinátaival is. Ennek megfelelően a szilárd test A pontjában az x, y, z normálisok által alkotott koordináta-rendszerben a feszültségi tenzor hat — egymástól független — koordinátája legyen: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Ismeretes az irodalomból, hogy egy α, β, γ irányszögű n normális és egy erre merőleges, α', β', γ' irányszögű n' normális esetén:

$$\begin{aligned} \sigma_n = & \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma + 2\tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \\ & + 2\tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2\tau_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \end{aligned} \quad (20)$$

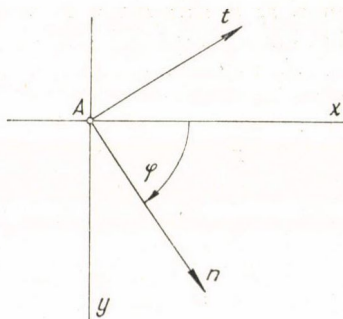
$$\begin{aligned} \tau_{nn'} = & \sigma_x \cos \alpha \cos \alpha' + \sigma_y \cos \beta \cos \beta' + \sigma_z \cos \gamma \cos \gamma' + \\ & + \tau_{xy}(\cos \alpha \cos \beta' + \cos \alpha' \cos \beta) + \tau_{yz}(\cos \beta \cos \gamma' + \cos \beta' \cos \gamma) + \\ & + \tau_{zx}(\cos \gamma \cos \alpha' + \cos \gamma' \cos \alpha). \end{aligned} \quad (21)$$

Foglalkozzunk a következőkben olyan normálisokkal, amelyek ugyanabban a koordinátasíkban vannak. Például a 13. ábrán az x, y tengelyeken átmenő koordinátasíkban látunk egy φ irányszögű n normálist. Ennek iránycosinuszai:

$$\cos \alpha = \cos \varphi; \quad \cos \beta = \sin \varphi; \quad \cos \gamma = 0.$$

Az n -re merőlegesen, az ábra szerint felvett t normálisé pedig:

$$\cos \alpha' = \sin \varphi; \quad \cos \beta' = -\cos \varphi; \quad \cos \gamma' = 0.$$



13. ábra

A (20) képlet alkalmazásával: $\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2 \tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$.
Áttérve a kétszeres szög függvényeire:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \quad (22)$$

A (21) alkalmazásával: $\tau_{nt} = \sigma_x \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_y \sin \varphi \cos \varphi - \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$. A kétszeres szög függvényeivel:

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi \quad (23)$$

Végül a harmadik derékszögű feszültségi összetevő z irányú. Ekkor is a (21) alkalmazható, de α' , β' , γ' a z tengely három irányszögét jelenti, vagyis $\cos \alpha' = \cos \beta' = 0$ és $\cos \gamma' = 1$. Figyelembe véve még, hogy $\tau_{yz} = \tau_{zy}$:

$$\tau_{nz} = \tau_{zy} \sin \varphi + \tau_{zx} \cos \varphi \quad (24)$$

Megállapíthatjuk, hogy a (22) teljesen megfelel a (3)-nak, a (23) pedig a (4)-nek. Ebből következik az az általános tétel, hogy egy tetszőleges koordinátasíkban felvett normálisokhoz tartozó feszültségeknek ugyanabban a koordinátasíkban levő derékszögű összetevői ugyanúgy szerkeszthetők meg, mintha a koordinátasík feszültségi fősík lenne, illetőleg a megfelelő koordinátatengelyek feszültségi fősíkban lennének. Így aztán σ_n és τ_{nt} megszerkesztése a 3b) ábra szerint lehetséges a σ_x és $-\tau_{xy}$ koordinátájú C_x , valamint a σ_y és $+\tau_{xy}$ koordinátájú C_y ábrázoló pontok ismeretében. Ezt a szerkesztést a 14a) ábra mutatja. A K középpontú kör nevezhető most az x, y koordinátasík első feszültségi körének. Ezen megkerestük a φ irányszögű n normális C_n ábrázoló pontját és ezzel a σ_n és τ_{nt} értékeket is megkaptuk. A C_n meghatározása akár a K pontnál 2φ , akár a C_x , vagy C_y pontnál φ szög felmérésével lehetséges.

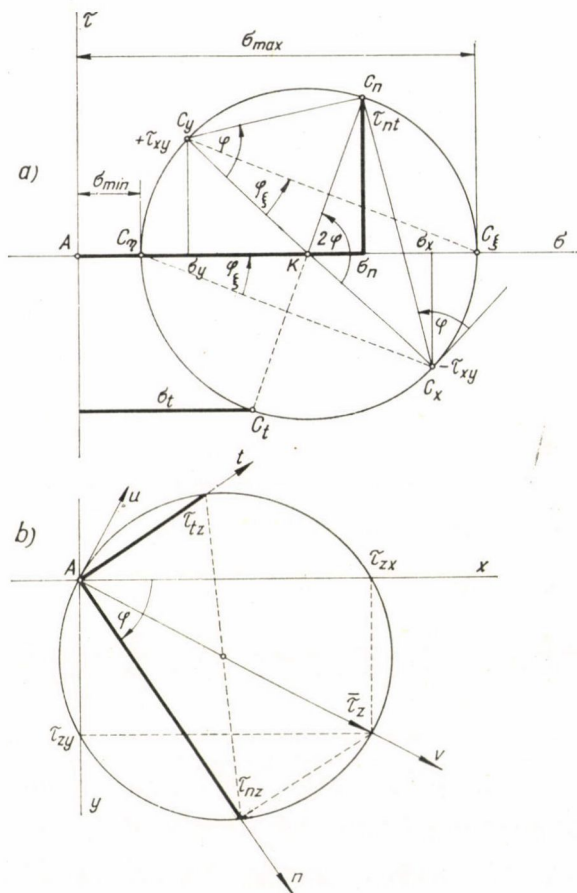
A τ_{nz} feszültségi összetevő meghatározása kedvéért most is szerkeszthetünk a koordinátasíkhöz egy második feszültségi kört. Ezt mutatja a 14b) ábra. A τ_{zx} , illetőleg τ_{zy} összetevőknek az x , illetőleg y tengelyre előjelre helyesen történt felmérése után a teljes $\bar{\tau}_z$ nyírófeszültség rendelkezésünkre áll. Erre mint átmérőre rajzolt kör a második feszültségi kör. A φ irányszögű n normális egyenesen mérhetjük le τ_{nz} előjeles nagyságát. Ez legegyszerűbben a $\tau_{nz} = \tau_{zn}$ reciprocitásnak megfelelően a $\bar{\tau}_z$ n irányra való vetítésével látható be.

A két feszültségi körből könnyen olvashatunk le egyszerű eredményeket. Az x, y koordinátasíkban fekvő normálisok közül σ_{\max} ahhoz a ξ normálishoz tartozik, amelynek C_ξ ábrázoló pontja és φ_ξ irányszöge közvetlenül leolvasható. Ez utóbbit két helyen is megmutattuk. A ξ normálist tehát a b) ábrán a $C_x C_\eta$ egyenessel párhuzamosan húzott irány adná meg. A σ_{\min} -nak megfelelő η irány erre merőleges. Természetesen ξ és η általában nem főirányok. Minthogy $\tau_{\xi t} = \tau_{\eta t} = 0$, azért a ξ vagy az η normálishoz tartozó feszültségvektor az illető normálison és a z tengelyen átfektetett meridiánsíkban van.

Az is azonnal felismerhető, hogy ha a b) ábrán az x, y koordinátasíkban a $\bar{\tau}_z$ -ra merőleges u normálist veszünk fel, akkor $\tau_{uz} = 0$, a feszültségvektor tehát ugyancsak a koordinátasíkban van. Ha u véletlenül egybeesik a ξ vagy az η normálissal, akkor ez az egyik főirány.

A legnagyobb z irányú nyírófeszültség a $\bar{\tau}_z$ által kijelölt v normálishoz tartozik: $\tau_{vz} = |\bar{\tau}_z|$.

Érdekes körülményként megemlítjük még, hogy az x, y koordinátasíkban fekvő normálisok feszültségeire a σ_z feszültség nincs befolyással, azokat tehát a feszültségi tenzor többi öt koordinátája teljesen meghatározza.



14. ábra

Befejezésül megemlítjük, hogy tetszőleges síkban fekvő feszültségi összetevőkre a Mohr-féle körszerkesztés alkalmazhatóságát — tehát a fentiekben bevezetett elnevezéssel: egy tetszőleges koordinátasík első feszültségi körének megszerkeszthetőségét — már Zizicas amerikai egyetemi tanár igazolta. Erre vonatkozó igen figyelemreméltó [4] alatti cikkében a szilárd test egy elemi hasáb alakú részének egyensúlyához tért vissza és így levezetése az itt bemutatottól eltér. A cikk ehhez tartozó ábrája főtengelekre támaszkodva megrajzolt Mohr-féle kört tüntet fel.

A meridiánsíkra merőleges nyírófeszültségi összetevő előjelre is egyértelmű egyszerű megszerkesztéséhez eddig megfelelő módszer nem állt rendelkezésre.

kezésre. Zizicas [5] alatti cikke is felhívta a figyelmet erre a kérdésre. A fentiekben bemutatott második feszültségi kör erre ad minden tekintetben kielégítő választ, sőt ezen túlmenően további törvényszerűségek felismerésére, egyszerű leolvasására is lehetőséget nyújt.

A [4] alatti cikkben szó van arról, hogy az egy síkban fekvő feszültségkomponensek megszerkesztésére vonatkozó módszer ismeretében a koordináta-tengelyek változtatásával a főtengek is meghatározhatók. Szerkesztéssel való közvetlen meghatározásra itt nem gondolhatunk. Az ilyen feladat megoldása ugyanis valamilyen formában a karakterisztikus egyenlet gyökeinek meghatározását igényli. Márpedig — amint ismeretes — harmadfokú egyenletet geometriai szerkesztésekkel, tehát körző és vonalzó segítségével megoldani általában nem lehet.

6. A tenzor koordinátáinak transzformációja a koordináta-rendszer valamelyik tengelye körüli elfordításával

A másodfokú szimmetrikus tenzor bármelyik derékszögű koordináta-rendszerbeli koordinátaival egyértelműen adható meg. Az előbbieken egy feszültségi tenzort az x, y, z rendszerben adtunk meg. Képzletben fordítsuk el ezt a rendszert a z tengely körül tetszőleges szöggel. Például a 14b) ábrán az x, y tengelyeket fordítsuk a t, n helyzetbe. A feszültségi tenzor az így nyert rendszerben is megadható, vagyis:

$$T_f = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_t & \tau_{tn} & \tau_{tz} \\ \tau_{nt} & \sigma_n & \tau_{nz} \\ \tau_{zt} & \tau_{zn} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

A 14. ábra példáján az utóbbi mátrixban foglalt koordináták közül már meghatároztuk, illetőleg ismerjük a következőket: $\sigma_n, \sigma_z, \tau_{nt} = \tau_{tn}, \tau_{nz} = \tau_{zn}$. Semmi akadályja sincs azonban annak, hogy az n -re merőleges t -nek megfelelő σ_t értékét a 14a) ábrán és a $\tau_{tz} = \tau_{zt}$ értékét a 14b) ábrán látható módon meghatározzuk. Ezzel a kívánt transzformációt igen egyszerűen el is végeztük.

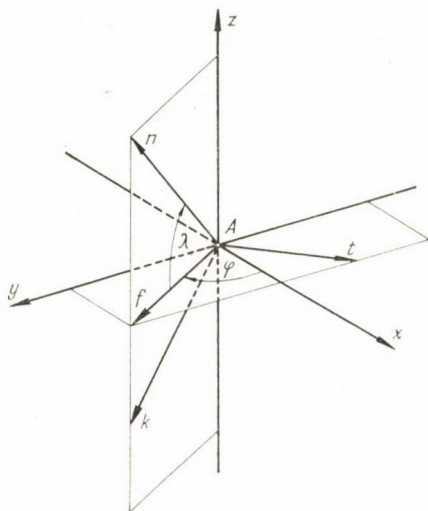
7. Tetszőleges koordináta-rendszerben adott normális feszültségi összetevőinek meghatározása

Legyen ismert a feszültségi tenzor a 15. ábrán vázolt x, y, z koordináta-rendszerben. Legyen adva továbbá az n normális, legegyszerűbben a φ hosszúsággal és a λ szélességgel. Határozzuk meg a \bar{p}_n feszültségvektor három derékszögű összetevőjét.

A megoldás első lépése az lehet, hogy koordináta-rendszerünket az előbbi pontban tárgyalt módon a z tengely körüli olyan elfordítással transzformáljuk, hogy rendszerünk az y helyett az x -hez képest φ irányszögű f tengelyből és x helyett az f -re merőleges t tengelyből álljon. Az eljárás teljesen megfelel a 14. ábrának, csak most az n szerepét az f normális veszi át.

Könnyű felismerni, hogy az n normális az előbbieken létrehozott f, z, t koordináta-rendszer f, z koordinátáskijában fekszik és az f tengelytől mért

irányszöge éppen λ . Ekkor pedig az 5. pontban kialakított módszer alkalmazható ismét a 14. ábrához hasonló első és második feszültségi kör felhasználásával, természetesen más betűjelekkel.



15. ábra

Mindezeket a szerkesztéseket egy számpélda keretében a 16. ábrán láthatjuk. A feszültségi tenzor adott koordinátái voltak:

$$\begin{array}{ll} \sigma_x = -700 \text{ kp/cm}^2 & \tau_{xy} = -400 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_y = +200 \text{ kp/cm}^2 & \tau_{yz} = -150 \text{ kp/cm}^2 \\ \sigma_z = +500 \text{ kp/cm}^2 & \tau_{zx} = +600 \text{ kp/cm}^2 \end{array}$$

Az n normális adatai: $\varphi = 30^\circ$, $\lambda = 60^\circ$.

Az ábrához újabb magyarázat nem szükséges. Megjegyezzük, hogy az x, y sík első feszültségi körének középpontja: K , a második feszültségi köré: M . Az fz síkban ugyanígy K' és M' jelentik a megfelelő középpontokat. A σ_t feszültséget nem határoztuk meg, mert erre a kitűzött célhoz nem volt szükségünk.

Az eredményeket vastagabb vonallal tüntettük fel. Számítással a következő eredményekre juthatunk:

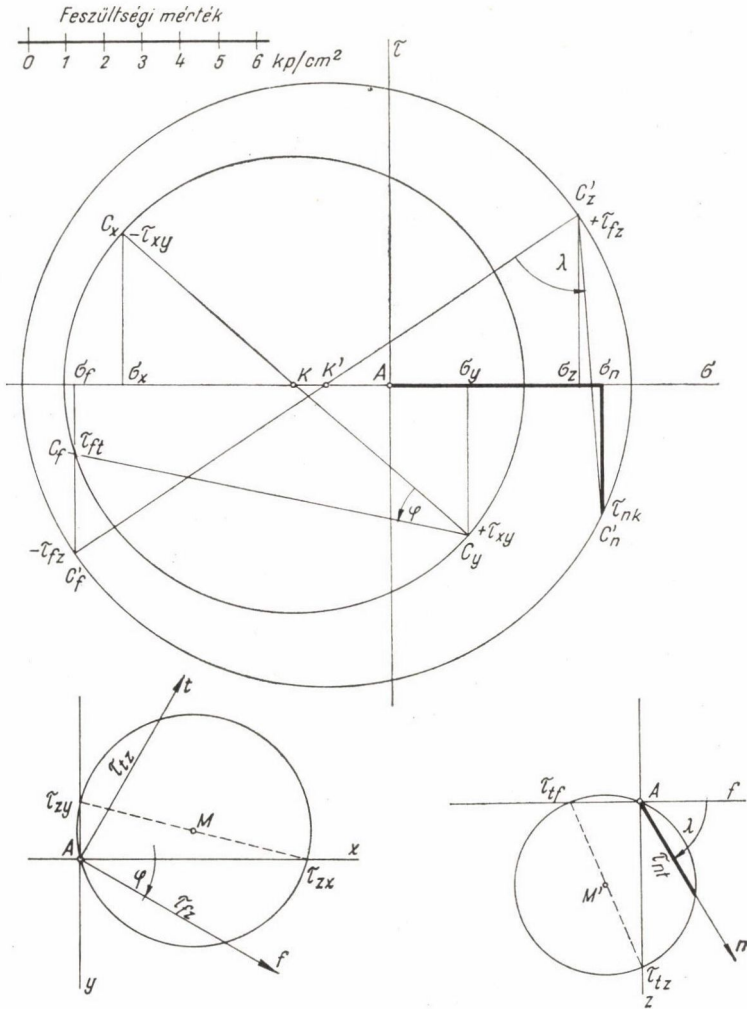
$$\sigma_n = +555 \text{ kp/cm}^2; \quad \tau_{nk} = -350 \text{ kp/cm}^2; \quad \tau_{nt} = +277 \text{ kp/cm}^2.$$

A szerkesztéssel nyert értékek e pontosabb eredményekkel igen jó megegyezésben vannak.

Visszatekintve a szerkesztésre, érdemes rámutatni arra, hogy az ismertetett eljárás viszonylag milyen kevés és egyszerű lépésben végezhető el. A tennivalók a következők:

- 3 síkbeli derékszögű koordináta-rendszer felrajzolása,
- 6 feszültségi összetevő előjelre helyes felmérése,

- 3 feszültségi összetevő átmérése,
- 4 esetben a φ vagy a λ szög felmérése,
- 4 esetben két pont összekötő egyenesének megrajzolása,
- 4 egyenes vonaldarab felezése,
- 4 adott középpontú kör rajzolása adott ponton át,
- 3 eredmény lemérése.



16. ábra

8. A tenzor koordinátáinak általános transzformációja

Ismeretes az a körülmény, hogy egy derékszögű térbeli koordináta-rendszer változatlan kezdőpont mellett bármely más helyzetbe hozható legfeljebb három olyan elfordítással, amelyeknek mindegyike valamelyik — esetleg új

helyzetben levő — koordináta-tengely körül történik. Elegendő e tekintetben a kinematikából jól ismert Euler-féle szögekre gondolni. Az előbbi 7. pontban kitűzött feladat megoldása után így már teljes mértékben adva van a lehetőség a legáltalánosabb transzformáció szerkesztéssel való elvégzésére.

Valóban már a 14. ábrán megmutattuk az egyik koordináta-tengely körüli elfordítással végzett transzformációt. A 16. ábra ugyanígy könnyen folytatható. A σ_t -t megkapjuk, ha a K középpontú körön megkeressük a C_t ábrázoló pontot úgy, hogy C_f , K és C_t egy átmérőn legyenek. Ugyanígy a K' középpontú körön a C'_k ábrázoló pont felkeresése megadja a σ_k feszültséget, végül az M' középpontú körben berajzolható k normálison a τ_{kt} értékét is lemérhetjük. Felismerhető a 15. ábra megszemlélésével, hogy ilyen módon már a t , k , n koordináta-rendszerre transzformáltunk. Könnyű elképzelni, hogy ezután az n tengely körül bármilyen elfordítással történő transzformáció már csak a t , k koordinátáinak megfelelő első és második feszültségi kör megrajzolását igényli és ezzel a legáltalánosabb feladatot is megoldottuk.

Amint látjuk, ez a legáltalánosabb transzformáció mindössze három első és három második feszültségi kör megrajzolásával elvégezhető.

IRODALOM

1. Mohr O.: Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre. Der Civilingenieur. 1882. pp. 113—156.
2. Cholnoky T.: Mechanika II. Szilárdságtan. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
3. Westergaard H. M.: Einfache Ableitung der von Mohr gegebenen graphischen Darstellung des dreiachsigen Spannungszustandes. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1924. pp. 520—521.
4. Zizicas G. A.: Representation of Three-Dimensional Stress Distributions by Mohr Circles. Journal of Applied Mechanics. Vol. 22. 1955. pp. 273—275.
5. Zizicas G. A.: Reduction of Three-Dimensional Stress Distributions to Two-Dimensional Analysis by Superposition. Journal of Applied Mechanics. Vol. 24. 1957. pp. 478—480.