DR. DULÁCSKA ENDRE

HÉJSZERKEZETEK KRITIKUS TERHÉNEK KÍSÉRLETI MEGHATÁROZÁSA

A dolgozat a lapos héjak elméletének segítségével felírja a lapos héjszerkezetek általános lengési és stabilitási differenciálegyenletét. E differenciálegyenletből olyan összefüggést vezet le, mellyel két különböző teher alatti rezgésszámból a kritikus teher meghatározható.

1. Bevezetés

A héjszerkezetek kritikus terhének meghatározása elég körülményes, ezért az elméletet csak körhenger és gömb esetére dolgozták ki. A kritikus teher közvetlen kísérleti meghatározása pedig a szerkezet tönkremenetelével jár. Szükséges lenne olyan eljárás, mely a héj tönkretétele nélkül szolgáltatja a kritikus terhet. A következőkben egy olyan módszert mutatunk be, melynek segítségével a különböző terhek alatti rezgésszámokból az elsőrendű elmélet szerinti felső kritikus teher meghatározható. A véges mértékű alakváltozásokat figyelembe vevő valóságos „Kármán"-féle alsó kritikus teher a felső kritikus teher értékének a már megoldott eseteknek megfelelő csökkentésével jól megbecsülhető.

2. Feltevések

Legyen a vizsgált tetszőleges héj középfelülete az x, y, z derékszögű koordináta rendszerben megadva. Az x, y koordináták a főgörbületek síkjában fekszenek, tehát a főgörbületi vonalak x, y síkra vett vetülete egyenes.

Tekintve, hogy a héj kihajlási vagy lengési hullámfelületének egy hullámára a lapos héjak feltételei teljesülnek, a vizsgált héj lengési-kihajlási differenciálegyenletét a lapos héjak elmélete alapján írjuk fel. [1, 2, 3]

Feltesszük, hogy a héj egy kihajlási, ill. lengési hullámdombjának határain belül a felület másodrendű differenciálhányadosai, és az n_x és n_y metszeterők állandónak tekinthetők.

3. Jelölések

w	a héj középfelületének z irányú elmozdulása,
$^{\mathrm{I}}$	az x szerinti differenciálás jele, így pl. $\dfrac{\partial^8 w}{\partial x^4\,\partial y^4} = w^{\mathrm{IV}::}$.
$\cdot$	az y szerinti differenciálás jele.
$\nabla^2 = f^{\mathrm{II}} + f^{\cdot\cdot}$,	azaz a LAPLACE operátor,

n_x, n_y a kihajlás, ill. lengés során a héjban x és y főgörbületi irányban működő fajlagos normálerő,

t az idő

$\alpha = z^{II}$, $\beta = z^{\cdot\cdot}$, a felület állandónak tekintett másodrendű deriváltjai.

$K = \dfrac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$, $D = E\delta$, ahol E a rugalmassági tényező, δ a héjvastagság és ν a harántkontrakciós együttható.

Φ a kihajlás, ill. a lengés során fellépő membránerők PUCHER-féle feszültségfüggvénye,

ω a saját körfrekvencia,
n az önlengésszám,
μ a héj felületegységének tömege,
q a héj felületegységének terhe.

4. A lapos héjak lengési és kihajlási differenciálegyenlete

A lapos héjak [1, 2, 3] egyenleteibe vezessük be a lengési gyorsulás és a felülettömeg szorzataként képzett lengési tehertagot. A feszültségfüggvényt írjuk fel a lassan felhordott q teher, valamint a lengés-kihajlás során létrejövő erők F és Φ feszültségfüggvényeinek összegeként. Ugyanígy az alakváltozást is a lassan felhordott teher, valamint a lengés-kihajlás alakváltozásainak összegeként írjuk fel. Ha ezeket bevezetjük a lengési tehertaggal kibővített laposhéj egyenletekbe, leválasztjuk a lassú tehernek megfelelő egyenleteket, és egyszerűsítünk a másodrendűen kis mennyiségekkel, akkor a lengésre és kihajlásra a következő egyenleteket nyerjük:

$$K\nabla^2\nabla^2 w - n_x w^{II} - n_y w^{\cdot\cdot} + \mu\frac{\partial w^2}{\partial t^2} = \alpha\Phi^{\cdot\cdot} + \beta\Phi^{II}, \tag{1}$$

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = -D\,(\alpha w^{\cdot\cdot} + \beta w^{II}). \tag{2}$$

A következőkben az (1) egyenlet baloldalát $A = A_{(w)}$, a (2) egyenlet jobboldalát $-B = -B_{(w)}$-vel jelöljük. Ezekkel a jelölésekkel felírva a két egyenletet:

$$A = \alpha\Phi^{\cdot\cdot} + \beta\Phi^{II}, \tag{1/a}$$

$$-B = \nabla^2\nabla^2\Phi\,. \tag{2/a}$$

Az (1/a) egyenletből $\Phi^{\cdot\cdot}$ értékét kifejezve a továbbiakban szükséges deriváltak:

$$\Phi^{\cdot\cdot} = \frac{A}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\Phi^{II}, \tag{3/a}$$

$$\Phi^{IV\cdot\cdot} = \frac{A^{IV}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\Phi^{VI}, \tag{3/b}$$

$$\Phi^{II::} = \frac{A^{II\cdot\cdot}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\Phi^{II\cdot\cdot}, \tag{3/c}$$

$$\Phi^{:::} = \frac{A^{::}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\Phi^{\mathrm{II}::}, \tag{3/d}$$

$$-B^{\cdot\cdot} = \Phi^{\mathrm{IV}\cdot\cdot} + 2\Phi^{\mathrm{II}::} + \Phi^{:::}, \tag{3/e}$$

$$-B^{\mathrm{II}} = \Phi^{\mathrm{VI}} + 2\Phi^{\mathrm{IV}\cdot\cdot} + \Phi^{\mathrm{II}::}. \tag{3/f}$$

A (3/e) egyenletbe behelyettesítve (3/b, 3/c, 3/d) értékeit, rendezve és betéve (3/f) kifejezését, kapjuk
hogy

$$\nabla^2\nabla^2 A = -\alpha B^{\cdot\cdot} - \beta B^{\mathrm{II}}. \tag{4}$$

A (4) egyenletbe visszahelyettesítve A és B függvényeit, a lapos héjak általános lengési és kihajlási differenciálegyenletét nyerjük.

$$K\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 w - n_x(\nabla^2\nabla^2 w)^{\mathrm{II}} - n_y(\nabla^2\nabla^2 w)^{\cdot\cdot} + \mu\left(\nabla^2\nabla^2\frac{\partial^2_w}{\partial t^2}\right) +$$
$$+ D(\alpha^2 w^{::} + 2\alpha\beta w^{\mathrm{II}\cdot\cdot} + \beta^2 w^{\mathrm{IV}}) = 0. \tag{5}$$

Tekintettel arra, hogy (5)-ben csak páros számú deriváltak fordulnak elő, az egyenletet kielégíti a következő megoldás:

$$w = w_0 \cdot \sin ax \cdot \sin by \cdot \sin \omega t. \tag{6}$$

Itt $a = \dfrac{\pi}{l_x}$ és $b = \dfrac{\pi}{l_y}$, ha l_x és l_y az x és y irányú kihajlási, ill. lengési hullámhossz.

A (6) megoldást behelyettesítve az (5) egyenletbe, a karakterisztikus egyenlet a következő:

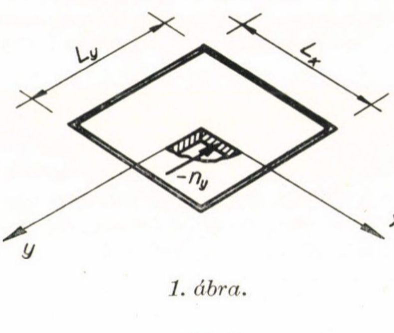
$$K(a^2 + b^2)^2 + n_x a^2 + n_y b^2 - \mu\omega^2 + D\left(\frac{\alpha b^2 + \beta a^2}{a^2 + b^2}\right)^2 = 0. \tag{7}$$

5. Példák a kihajlásra

A példáknál legyen $\nu = 0$.

a) Négyzetes síklemez kihajlása (l. 1. ábra)

Ekkor $\alpha = \beta = 0$, és $a = b = \pi/l$.

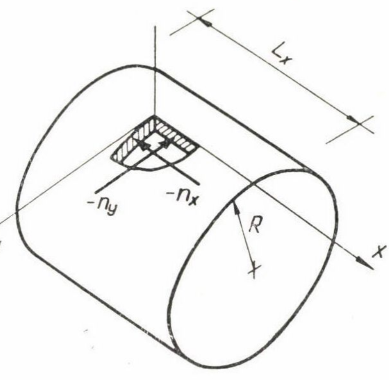


1. ábra.

Legyen $n_x = 0$, és így a (7) egyenlet $K\dfrac{4\pi^4}{l^4} + n_y\dfrac{\pi^2}{l^2} = 0$, ahonnan a kritikus erőre az $n_{y\,\mathrm{krit}} = \dfrac{4\pi^2 EJ}{l^2}$ ismert megoldást nyerjük.

b) Körhengerhéj kihajlása (l. 2. ábra)

Ekkor $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{1}{R}$.



2. ábra.

Legyen $n_y = 0$, és ehhez a kihajlási elmélet [2] szerint $b = 0$. A (7) egyenlet alakja $Ka^4 + n_x a^2 + \dfrac{D}{R^2} = 0$, ahonnan $-n_x = Ka^2 + \dfrac{D}{R^2 a^2}$.

Ebből a kritikus $n_{x\,\mathrm{krit}}$ értékét szélsőértékszámítással nyerhetjük.

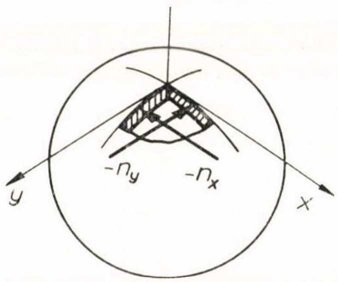
Így a $\partial n_x/\partial(a^2) = 0$ feltételből $a^2 = \dfrac{\sqrt{12}}{R\delta}$ és ennek felhasználásával a $-n_{x\,\mathrm{krit}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{E\delta^2}{R^2}$ ismert eredmény adódik. [2]

c) Gömbhéj kihajlása (l. 3. ábra)

Ekkor $\alpha = \beta = \dfrac{1}{R}$, $a = b$, és egyenletes külső nyomás esetén $n_x = n_y = -\dfrac{pR}{2}$.

A (7) karakterisztikus egyenletbe helyettesítve $K4a^4 - pRa^2 + \dfrac{D}{R^2} = 0$. Innen $p = \dfrac{4Ka^2}{R} + \dfrac{D}{R^3 a^2}$, majd szélsőértékszámítással a $\dfrac{\partial p}{\partial(a^2)} = \dfrac{4K}{R} - \dfrac{D}{R^3(a^2)^2} = 0$ feltételből $a^2 = \dfrac{1}{2R}\sqrt{\dfrac{D}{K}}$.

Ennek felhasználásával a kritikus nyomás értékére a $p_{\text{krit}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{E\delta^2}{R^2}$ ZOELLY-féle képletet nyerjük. [2]

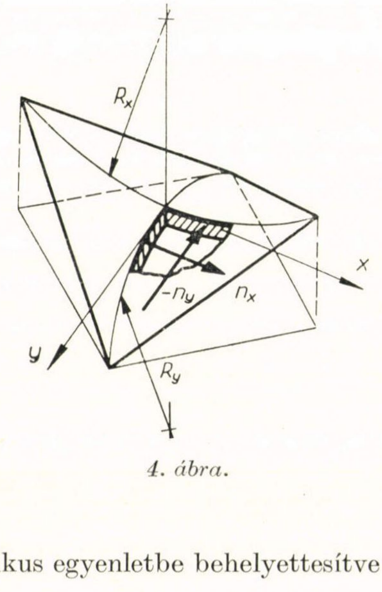


3. *ábra.*

d) Hiperbolikus paraboloidhéj kihajlása. (l. 4. ábra)

Ekkor $R_y = -R_x = R$, $\alpha = -\frac{1}{R}$, $\beta = \frac{1}{R}$, és egyenletesen megoszló p teher esetén

$$n_x = -n_y = \frac{pR}{2}.$$



4. *ábra.*

A (7) karakterisztikus egyenletbe behelyettesítve az adatokat

$$K(a^2+b^2)^2 + \frac{pR}{2}(a^2-b^2) + \frac{D}{R^2}\left(\frac{-b^2+a^2}{a^2+b^2}\right)^2 = 0.$$

Innen $p = \frac{2K}{R} \cdot \frac{(a^2 + b^2)^2}{(b^2 - a^2)} + \frac{2D}{R^3} \cdot \frac{(b^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)^2}$.

A minimum feltételeként szélsőérték számítással az $\frac{(a^2 + b^2)^2}{b^2 - a^2} = \sqrt{\frac{12}{R^2\,\delta^2}}$ feltétel adódik.

Ezt behelyettesítve p kifejezésébe, a kritikus teher: $p_{\text{krit}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{E\delta^2}{R^2}$.

A kritikus teher értéke az irodalomból [4] ismert értékkel egyezik.

6. Példák a lengésre

a) Négyzetes síklemez lengése.

Ekkor $\alpha = \beta = 0$, $a = b = \frac{\pi}{l}$, és legyen $n_x = n_y = 0$. Így a (7) egyenlet $Ka^4 - \mu\omega^2 = 0$, melyből az $\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{E\delta^3}{3\mu}}$ ismert eredményt kapjuk.

b) Dongahéj lengése.

Ekkor $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{R}$, $n_x = n_y = 0$, és az 5/b esetnek megfelelően $b = 0$, $a^2 = \sqrt{12}/R\delta$. Behelyettesítve (7)-be, $Ka^4 + D/R^2 = \mu\omega^2$, ahonnan

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2E\delta}{\mu}}. \tag{8}$$

Flügge [2] szerint a dongahéj sajátfrekcvenciája a dongahéj elhanyagolás nélküli szigorú elméletével felírva

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{12} \cdot \delta/R} \cdot \frac{E\delta}{\mu}}. \tag{9}$$

A lapos héjak elmélete alapján meghatározott (8) értéknek a pontos (9) értéktől való eltérése $R/\delta = 100$ és 50 gyakorlati határok esetén 1% és 2%.

7. A kritikus teher meghatározása lengésméréssel

A továbbiakban csak olyan héjszerkezetekkel foglalkozunk, melyeknél a kihajlási és lengési hullámok külön-külön azonosak, azaz a lengési és kihajlási a és b értékek megegyeznek.

A (7) egyenletbe vezessük be a következő szimbolikus jelöléseket:

$$K(a^2 + b^2)^2 = M\,,$$

$$n_x \cdot a^2 + n_y \cdot b^2 = N\,,$$

$$-\mu \cdot \omega^2 = Q\,,$$

$$D\left(\frac{\alpha b^2 + \beta a^2}{a^2 + b^2}\right) = P.$$

E jelölésekkel a (7) egyenlet

$$M + N - Q + P = O.$$

Ha $Q = 0$, akkor $N = N$ kritikus, azaz

$$-N_{\text{krit}} = (M + P). \qquad (10)$$

Ha $N = 0$, akkor $\omega = \omega_0$, azaz alaplengés, tehát

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{(M + P)}.$$

A legkisebb alaplengést, valamint a legkisebb kritikus terhet akkor kapjuk, ha

$$(M + P) = min!$$

Tehát a legkisebb kritikus teher és a legkisebb alaplengés ugyanazon feltételek mellett következik be.
Ha ezektuán $N \neq 0$ esetén kifejezzük ω-t, akkor

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{(M + P) + N}.$$

A gyökjel alatt szorozva $-N_k/-N_k$-val, a gyökjelen belül egyszerűsítve és $-N_k$-t a számlálóból kiemelve, és a kiemelt N_k értékbe az előzőleg meghatározott N_{krit} és ω_0 értékeket helyettesítve kapjuk a normálerőkkel terhelt héj sajátfrekvenciáját.

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - N/N_{\text{krit}}}. \qquad (12)$$

Tekintve, hogy a héjszerkezet n_x és n_y belső erőit a felületi teher egyértelműen meghatározza, és adott esetben a és b egyértelműen meghatározható állandók, és hogy a sajátfrekvencia a sajátlengésszámmal arányos, a (12) képlet a következő formában is írható:

$$n = n_0\sqrt{1 - q/q_{\text{krit}}}. \qquad (13)$$

A (13) képlet módot nyújt arra, hogy valamely héjszerkezet kritikus terhét pórbateherrel meghatározzuk. Ez a következőképpen történhet. Megmérjük a héj n_1 lengésszámát q_1, és n_2 lengésszámát q_2 teher esetén. Mindkét esetre felírva a (13) egyenletet, a q_{krit} kritikus teher meghatározható. A q_1 célszerűen a saját súly, q_2 pedig a próbateher és a saját súly összege.

Az n_0 lengésszámban a nevezőben négyzetgyök alatt szerepel a μ felületi egységtömeg. Ezért különbséget kell tennünk, hogy a próbaterhelés olyan teherrel történik-e, melynek tömege a héjszerkezettel együtt leng, vagy olyan teherrel, melynek tömege nem leng a héjjal együtt (pl. légnyomás). E két esetre az előzőek szerint kiszámított kritikus teher értékei a következők:

a) A próbateher tömege a héjjal együtt leng.

$$q_{\text{krit}} = q_2 \frac{(n_1/n_2)^2 - 1}{(n_1/n_2)^2 - q_2/q_1}. \tag{14}$$

b) A próbateher tömege nem leng együtt a héjjal.

$$q_{\text{krit}} = q_2 \frac{(n_1/n_2)^2 - q_1/q_2.}{(n_1/n_2)^2 - 1}. \tag{15}$$

A (14) és (15) képletekben q_{krit} a héjszerkezetnek az elsőrendű kihajláselmélet szerinti kritikus felületi terhe, q_1 a héj saját súlya, q_2 a héj saját súlyának és a próbatehernek együttes súlya, n_1 a q_1, és n_2 a q_2 esetén mért legkisebb sajátlengésszám.

A héj ilyen módon meghatározott kritikus terhe alapul szolgálhat a pontosabb, másodrendű kihajláselmélettel meghatározandó kritikus tehernek.

Érkezett 1965 szeptember hóban.

IRODALOM

1. *Wlassow. W. S.*: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Aufl. Akademieverlag, Berlin 1958.
2. *Flügge. W.*: Statik und Dynamik der Schalen. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1962.
3. *Wolmir. A. S.*: Biegsame Platten und Schalen. Aufl. Veb Verlag für Bauwesen, Berlin 1962.
4. *Ralston. A.*: On the Problem of Buckling of a Hyperbolic Paraboloidal Shell Loaded by its own Weight. Journal of Mathematics and Phisics. 1956. (53)