DR. DULÁCSKA ENDRE—DR. KOLLÁR LAJOS, a műszaki tudományok doktora

KONOIDHÉJKONZOL SZÁMÍTÁSA

A dolgozat a konzolszerűen kialakított konoidhéj erőjátékát tárgyalja a lapos héjak elméletének felhasználásával. Az alkalmazott közelítő feltevések segítségével a héj metszeterőit zárt összefüggésekkel fejezi ki.

A metszeterőknek a méretezéshez szükséges maximális értékeit egyszerű képletekkel adja meg.

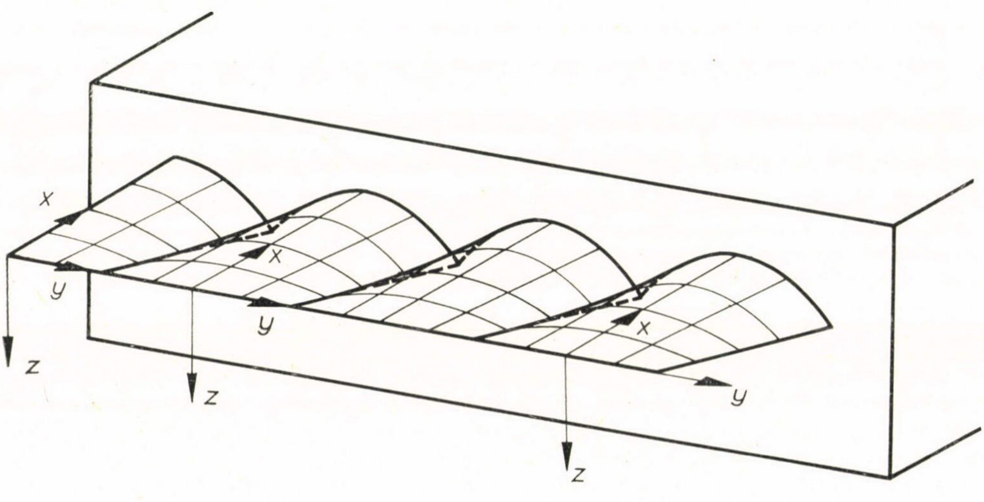
Bevezetés

A mérnöki gyakorlat a konoid alakú héjat általában boltozatszerűen működő szerkezetként alkalmazza [1]. A konoidhéj alakja igen alkalmas befogott konzolként való működésre, mert szerkezeti magassága a befogási keresztmetszet felé növekszik. A konoidhéjnak ilyen konzolos alkalmazására még nincs a gyakorlatban használható számítási módszer [1].

A következőkben egy olyan eljárást mutatunk be, mely a parabolavezérgörbéjű konoidhéj-konzolt a lapos héjak elmélete alapján vizsgálja.

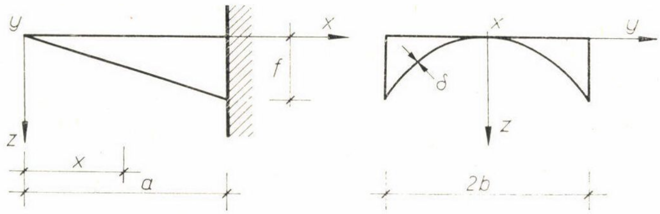
Alapfeltevések

1. Feltesszük, hogy a héj elég lapos ahhoz, hogy alkalmazható rá a lapos héjak elmélete [1], [3].



1. ábra.

2. Az előző pont miatt a héj saját súlya és hóterhe egyenletesen megoszló p_0 teherként vehető figyelembe, és a tényleges metszeterők közel megegyeznek a vetületi metszeterőkkel.



2. ábra.

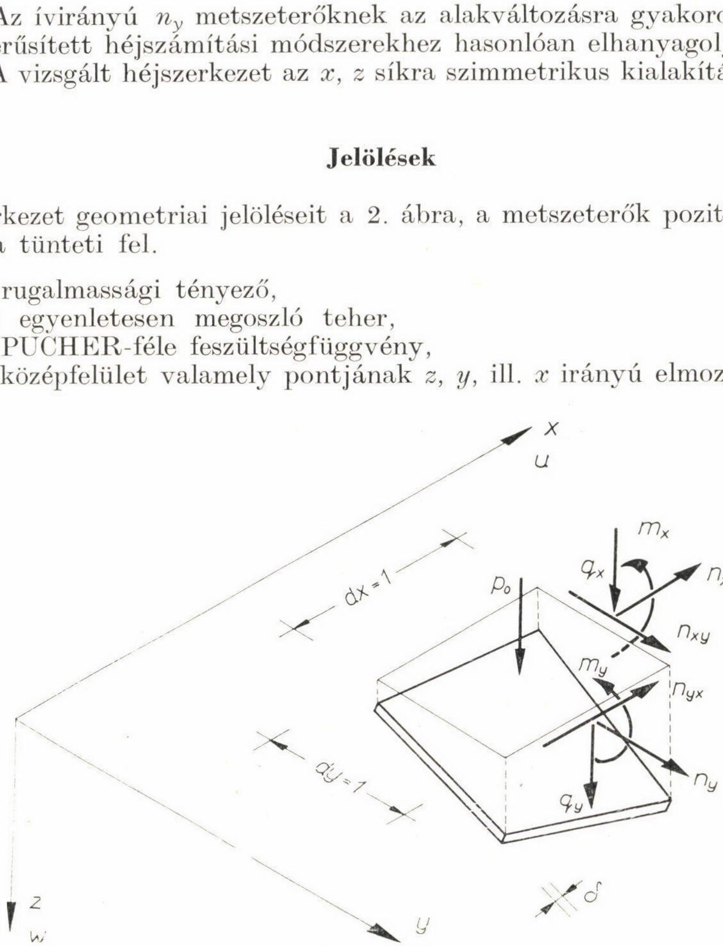
3. Az ívirányú n_y metszeterőknek az alakváltozásra gyakorolt hatását az egyszerűsített héjszámítási módszerekhez hasonlóan elhanyagoljuk.

4. A vizsgált héjszerkezet az x, z síkra szimmetrikus kialakítású.

Jelölések

A héjszerkezet geometriai jelöléseit a 2. ábra, a metszeterők pozitív értékeit a 3. ábra tünteti fel.

E a rugalmassági tényező,
p_0 az egyenletesen megoszló teher,
F a PUCHER-féle feszültségfüggvény,
w, v, u a középfelület valamely pontjának z, y, ill. x irányú elmozdulása,



3. ábra.

$^{\mathrm{I}}$ az x szerinti differenciálás jele,

$\cdot$ a y szerinti differenciálás jele, így pl. $\frac{\partial^8 w}{\partial x^4\, \partial y^4} \equiv w^{\mathrm{IV}::}$.

$$K = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}; \quad D = E\delta ,$$

ahol ν a harántkontrakciós együttható,

$z = f \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{y^2}{b^2}$ a héj középfelületének egyenlete.

A feladat egyenletei

Az alkalmazott feltevésekkel és a megadott jelölésekkel a feladat egyensúlyi és kompatibilitási egyenlete [1], ill [3] alapján a következő:

$$K(w^{\mathrm{IV}} + 2w^{\mathrm{II}\cdot\cdot} + w^{::}) - (F^{\mathrm{II}} \cdot z^{\cdot\cdot} - 2F^{\mathrm{I}\cdot} \cdot z^{\mathrm{I}\cdot}) = p_0 , \tag{1}$$

$$2F^{\mathrm{II}\cdot\cdot} + F^{::} + D(w^{\mathrm{II}} \cdot z^{\cdot\cdot} - 2w^{\mathrm{I}\cdot} \cdot z^{\mathrm{I}\cdot}) = 0 . \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekben

$$z^{\cdot\cdot} = \frac{2f}{b^2} \cdot \frac{x}{a}, \quad z^{\mathrm{I}\cdot} = \frac{2f}{b^2} \cdot \frac{y}{a} \tag{3}$$

a héjfelület másodrendű deriváltjai,

$$\text{és } F^{\mathrm{II}} = n_y , \quad F^{\mathrm{I}\cdot} = -n_{xy}, \quad F^{\cdot\cdot} = n_x , \tag{4}$$

a metszeterőknek az F feszültségfüggvénnyel kifejezett értékei.
A hajlítónyomatékok az

$$m_y = -Kw^{\cdot\cdot}; \quad m_x = -Kw^{\mathrm{II}} \tag{5}$$

ismert összefüggésekből határozhatók meg.

A feladat feszültségfüggvénye

Az (1) és (2) egyenleteket kielégítő, és a későbbiekben részletezett kerületi feltételeknek megfelelő partikuláris megoldás a következő:

$$F = \frac{15p_0a^2}{8f} \cdot \frac{x}{a} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4b^2} \right) + B(x \cdot \ln x - x) , \tag{6}$$

$$w = w_{(x)} + w_{(y)} . \tag{7}$$

A (7) összefüggést behelyettesítve (2) be,

$$w^{\mathrm{II}} = \frac{45p_0a^2}{8f^2D}, \quad w^{\mathrm{IV}} = 0 . \tag{8}$$

Az $x = a$ helyen a $w^{\mathrm{I}}_{(x)} = w_{(x)} = 0$ kerületi feltételt figyelembe véve

$$w_{(x)} = \frac{45p_0a^2}{16f^2D}(a - x)^2. \tag{9}$$

Így F deriváltjait behelyettesítve, az (1) egyenlet alakja:

$$w_{(y)}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{p_0}{K}\left[\left(1 + \frac{2fB}{ab^2p_0}\right) - \frac{15}{2}\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y^4}{b^4}\right)\right]. \tag{10}$$

A (10) egyenletet négyszer integrálva, és a szimmetria miatt az $y = 0$ helyen a $w^{\cdot\cdot\cdot} = w^{\cdot} = 0$ feltételeket figyelembe véve

$$w_{(y)} = \frac{p_0}{K}\left[\left(1 + \frac{2fB}{ab^2p_0}\right)\frac{y^4}{b^4} - \frac{y^6}{2b^6} + \frac{5y^8}{28b^8} + \frac{12C_2 \cdot y^2}{b^6}\right]. \tag{11}$$

A (9) és (10) összefüggéseket (7)-be behelyettesítve megkapjuk w függvényét. A B és C_2 állandókat az $y = \pm b$ perem menti statikai, ill. alakváltozási peremfeltételekből kell meghatározni.

Mivel a befogás helyén ($x = a$ nál) csak a $w^{\mathrm{I}} = 0$ feltételt teljesítettük, a $w = 0$ feltételből azonban csak $w_{(x)} = 0$ - t, ezért $w_{(y)}$ itt nem lesz zérus. Ez azt jelenti, hogy a héj keresztirányú alakváltozása a befogás keresztmetszetében is kialakul, tehát megoldásunk pontosan véve olyan ,,félmerev'' diafragma esetére vonatkozik, amely az yz síkban lehetővé teszi a héj mozgásait, de az xz-síkban nem.

Ha nem tudjuk lehetővé tenni a befogási yz síkban a konoidhéj szabad deformálódását (azaz mereven befogjuk), akkor a $w_{(y)}$ alakváltozás meggátlásából olyan peremzavarok keletkeznek, mint amilyenek egyéb héjakon is létrejönnek a héj és a peremív alakváltozás-különbségéből, s amelyeket a gyakorlatban a körhengertartály képleteivel becsülhetünk meg.

A w függvény továbbiakban szükséges y szerinti deriváltjai a következők:

$$w^{\cdot} = \frac{p_0}{K}\left[\left(1 + \frac{2fB}{ab^2p_0}\right)\frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{8b^2} + \frac{y^7}{28b^4} + \frac{C_2 \cdot y}{b^2}\right], \tag{12}$$

$$w^{\cdot\cdot} = \frac{p_0}{K}\left[\left(1 + \frac{2fB}{ab^2p_0}\right)\frac{y^2}{2} - \frac{5}{8}\frac{y^4}{b^2} + \frac{y^6}{4b^4} + \frac{C_2}{b^2}\right]. \tag{13}$$

Egyedülálló héj

Ha a héj a 2. ábra szerint van kialakítva, akkor a kerületi feltételek az $y = \pm b$ peremeken:

$$w^{\cdot\cdot} = 0, \; F^{\mathrm{II}} = 0\,.$$

Ezek figyelembevételével az állandók:

$$B = 0\,, \; C_2 = -\frac{b^4}{8}\,.$$

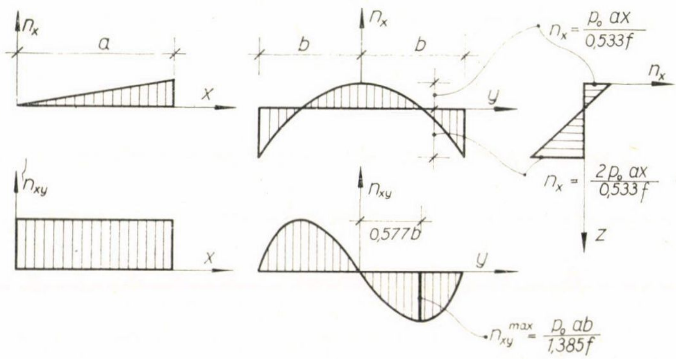
Az állandókat a (4) és (5) összefüggésekbe helyettesítve a metszeterők képletei:

$$n_x = F^{\cdot\cdot} = \frac{15a^2p_0}{8f} \cdot \frac{x}{a}\left(1 - 3\frac{y^2}{b^2}\right), \tag{14}$$

$$n_{xy} = -F^{\mathrm{I}\cdot} = \frac{15ap_0}{8f}\left(\frac{y}{b} - \frac{y^3}{b^3}\right), \tag{15}$$

$$n_y = F^{\mathrm{II}} = 0,$$

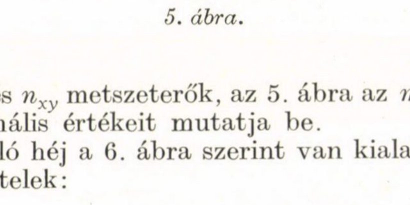
$$m_y = \frac{p_0b^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{b^2} + \frac{5y^4}{b^4} - 2\frac{y^6}{b^6}\right). \tag{16}$$



4. ábra.

Az m_x hajlító nyomaték (5) és (8) figyelembevételével:

$$m_x = -\frac{15p_0a^2\delta^2}{32f^2}. \tag{17}$$



5. ábra.

A 4. ábra az n_x és n_{xy} metszeterők, az 5. ábra az m_y hajlító nyomatékok megoszlását és maximális értékeit mutatja be.

Ha az egyedülálló héj a 6. ábra szerint van kialakítva, akkor az $y = 0$ él menti kerületi feltételek:

$$w^{\cdot\cdot} = 0, \qquad F^{\mathrm{II}} = 0.$$

Így az állandók:

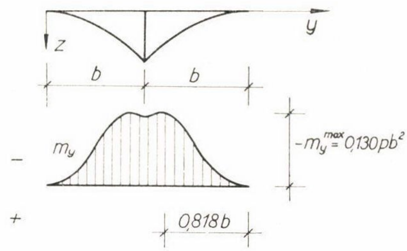
$$B = 0, \qquad C_2 = 0.$$

Az állandók értékeit figyelembe véve n_x és n_{xy} a (14) és (15), az m_x nyomaték a (17) képletekből számíthatók.

Az m_y hajlítónyomaték:

$$m_y = \frac{p_0 b^2}{8}\left(-\frac{4y^2}{b^2} + \frac{5y^4}{b^4} - \frac{2y^6}{b^6}\right). \tag{18}$$

Az m_y hajlítónyomaték megoszlását és maximális értékeit a 6. ábra tünteti fel.



6. ábra.

Az ismertetett megoldás esetén a héjnak az x, z síkkal párhuzamos síkokon fekvő peremvonalai teljesen szabadok lehetnek, az $x = 0$ peremen pedig peremtartót kell alkalmazni az n_{xy} nyíróerők és az m_x hajlító nyomaték felvételére. A peremtartó célszerűen a héj szegélyéből kialakított ,,rejtett'' peremtartó lehet.

A peremtartóra jutó T erőt az n_{yx} nyíróerők 0-tól b-ig való integrálásával kapjuk meg.

A T erő értéke a 7. ábra szerint kialakított héj esetén:

$$T = -\frac{16ab^2p_0}{5f}\left(1 - \frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^4}{b^4}\right), \tag{19}$$

a 8. ábra szerint kialakított héj esetén pedig a

$$T = \frac{16ab^2p_0}{5f}\left(\frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^4}{b^4}\right) \tag{20}$$

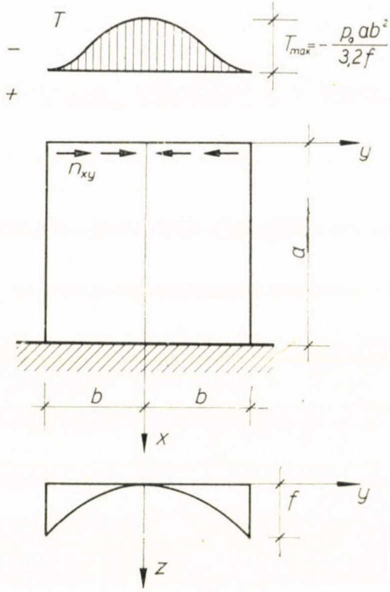
összefüggésekből számítható.

A T erők megoszlását a maximális értékeit a 7. és 8. ábrák szemléltetik.

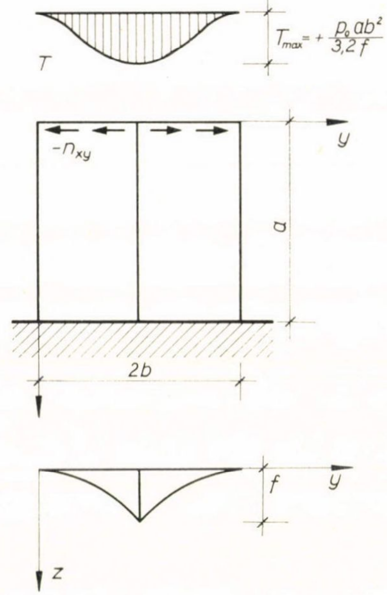
A ,,rejtett'' peremtartó

Ha az $x = 0$ peremen nem alkalmazunk merev peremtartót, akkor a peremen az n_{xy} nyírások és m_x hajlító nyomatékok nem tudnak fellépni, és a héj szegélyében ,,rejtett'' peremtartó alakul ki. Így az $x = 0$ helyen a külső terhet csak az m_x nyomaték változásából származó $\frac{\partial m_x}{\partial x} = q_x$ lemeznyíróerők segítségével egyensúlyozhatjuk.

Az n_{xy} nyíróerő és az m_x nyomaték megváltozását egy olyan feltevés alapján számítjuk, mely a (2) kompatibilitási egyenletet csak közelítően elégíti ki. Ez megengedhető, mert az $x = 0$ helyi peremzavar rövid szakaszon elenyészik, és így e közelítés a héj teljes egészének erőjátékát nem befolyásolja. Feltesszük, hogy a külső hajlító nyomatékon a héj íves keresztmetszete és a lemezkeresztmetszet hajlítási merevsége arányában osztozik.



7. ábra.



8. ábra.

Ez a feltevés azért jogos, mert a teljes konoidhéjnak és a konoidhéj-lemeznek — természetesen — azonos a lehajlása x minden értékénél, így görbületük is azonos. Minthogy pedig a konoidhéjban a (14) képlet szerint a magassággal lineárisan oszlanak meg az n_x metszeterők, a héjlemezben szintén, így a közös görbületből mind a konoidhéjban, mind a héjlemezben a saját inercianyomatékukkal arányos hajlítónyomaték ébred.

Az íves keresztmetszet inercianyomatéka:

$$J_{iv} = 0{,}1778 \frac{\delta b f^2}{a^2} x^2. \tag{21/a}$$

A héjlemez inercianyomatéka:

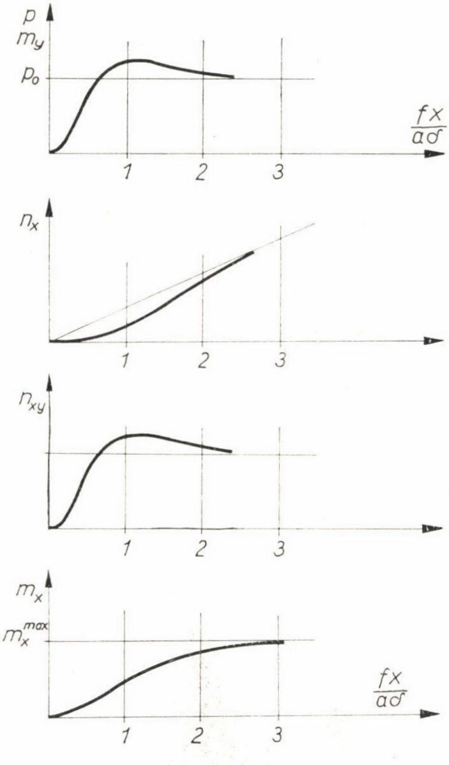
$$J_{lemez} = \frac{2b\delta^3}{12} = 0{,}1667 b\delta^3. \tag{21/b}$$

Így a héjlemezre jutó x irányú nyomaték az

$$A = \frac{\delta^2 a^2}{1{,}066 f^2 x^2} \tag{22}$$

jelölés bevezetésével:

$$m_x = \frac{-p_0 \cdot x^2}{2} \cdot \frac{I_{\text{lemez}}}{I_{\text{lemez}} + I_{\text{ív}}} = \frac{-15 p_0 a^2 \delta^2}{32 f^2} \cdot \frac{1}{1+A}. \tag{23}$$



9. ábra.

Ha x elég nagy, akkor (23) nevezőjében a második tag mellett az egység elhanyagolható, és így megkapjuk a már korábban meghatározott

$$m_x^{\max} = \frac{-15 p_0 a^2 \delta^2}{32 f^2} \tag{17}$$

értéket, amelyhez m_x tart. Ezt a határértéket x növekedésével m_x rohamosan megközelíti. Ahol az ívmagasság eléri a lemezvastagság háromszorosát $\left(\frac{fx}{\delta a} = 3\right)$, ott már $m_x \approx 0{,}9\, m_x^{\max}$.

Az $x = 0$ peremen a metszeterők megoszlása a 9. ábrán vázolt módon megváltozik.

Az $x = 0$ perem mentén a héj $x \approx \frac{\delta a}{2f}$ szélességű szakaszán alakul ki „rejtett" peremtartó.

A héjra jutó p terhet a

$p_{\text{héj}} = m_{\text{héj}}^{\text{II}} = \left[\frac{I_{\text{fv}}}{I_{\text{fv}} + I_{\text{lemez}}} \cdot \frac{px^2}{2} \right]^{\text{II}}$ kifejezésből számíthatjuk.

Így

$$p_{\text{héj}} = p_0 \left[\frac{6}{1 + A} - \frac{9}{(1 + A)^2} + \frac{4}{(1 + A)^3} \right]. \tag{24}$$

Az n_{xy} nyíróerők és m_y nyomatékok x szerinti változása az (1) egyenlet figyelembevételével (24)-hez hasonló.

Héjsorok

A konoidkonzolhéjat előnyösen lehet sorozatban alkalmazni előtetők részére. (Lásd. 1. ábra.)

Több konoid összeépítése esetén az $y = \pm b$ peremek nem tudnak szabadon elfordulni és elmozdulni, a csatlakozó élek csak függőleges, z irányú elmozdulást végezhetnek. Így a csatlakozó vonalakon vízszintes erők ($n_{y(b)}$) és y irányú hajlító nyomatékok ($m_{y(b)}$) ébrednek, és ezek módosítják a héjak m_y ábráját.

A kerületi feltételek az $y = \pm b$ peremen a következők:

$$w^{\cdot} = 0, \; v = 0.$$

v értéke [2] szerint a

$$v^{\cdot} = - z^{\cdot} \cdot w^{\cdot} \tag{25}$$

kifejezés integrálásával állítható elő.

Behelyettesítve $z^{\cdot}$ és $w^{\cdot}$ értékeit, és az integrálást elvégezve

$$v = \int v^{\cdot} dy = - \frac{p_0}{K} \cdot \frac{2fx}{ab} \left[\left(1 + \frac{2fB}{ab^2 p_0} \right) \frac{y^5}{30} - \frac{15y^7}{840b^2} + \frac{15y^9}{3780b^4} + \frac{C_2 \cdot y^3}{3b^2} \right]. \tag{26}$$

Majd (26) és (12)-t behelyettesítve, és az $y = \pm b$ perem menti kerületi feltételeket kielégítve az állandók értékei:

$$B = - \frac{0{,}142857 \, p_0 a b^2}{f}, \tag{27}$$

$$C_2 = - 0{,}029762 b^4. \tag{28}$$

Ezek után a metszeterők képletei az állandók behelyettesítésével:

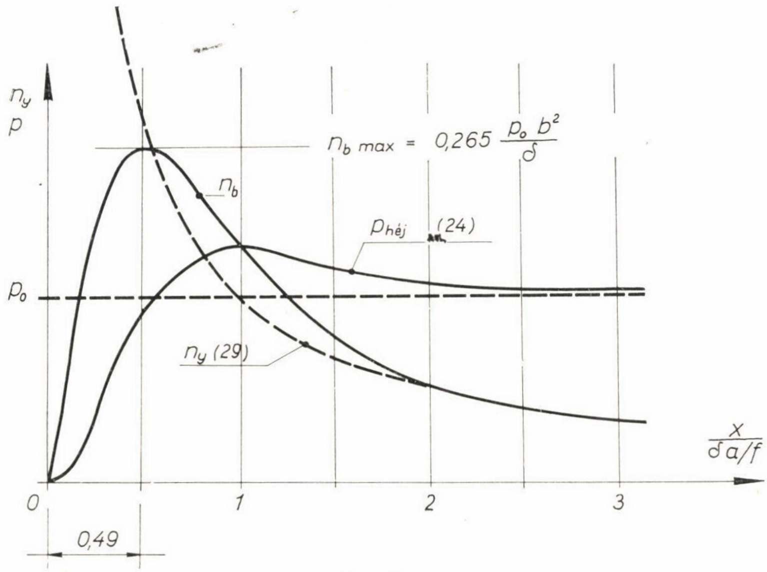
$$n_x = F^{\cdot\cdot} = \frac{15a^2 p_0}{8f} \cdot \frac{x}{a} \left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2} \right); \tag{14}$$

$$n_{xy} = -F^{I\cdot} = \frac{15ap_0}{8f}\left(\frac{y}{b} - \frac{y^3}{b^3}\right); \tag{15}$$

$$n_y = F^{II} = -0{,}142857 p_0 b^2 \frac{a}{f \cdot x}; \tag{29}$$

$$m_y = -p_0 b^2 \left(\frac{5y^2}{14b^2} - \frac{5y^4}{8b^4} + \frac{y^6}{8b^6} - 0{,}029762\right). \tag{30}$$

Az m_y hajlítónyomaték megoszlását és maximális értékeit a 10., 11. ábrák közbenső héjelemein láthatjuk.



10. ábra.

A p tehernek a rejtett peremtartó okozta, a 9. ábrán vázolt megváltozása a B állandóra és így az n_y értékére is visszahat.

Ha n_y (29) szerinti képletébe az állandó p_0 helyett a (24) szerinti p terhet helyettesítjük, megkapjuk n_b-t, a megváltozott n_y közelítő összefüggését. Az n_b metszeterő x szerinti változását, maximális értékét és a maximum helyét a 10. ábra mutatja be.

A rejtett peremtartót természetesen méretezni kell az n_{xy} nyíróerőkből származó T_{max} húzóerőre (8. ábra). Ha pedig T nyomást okoz (7. ábra), akkor kihajlásra kell ellenőrizni a héj szélét.

A p tehernek az $x = 0$ perem menti változása miatt m_y x szerinti megoszlása a p teherhez hasonlóan változik.

A héjsor szélső elemeinek erőjátéka

A szélső héjelemeknek fel kell venniük a közbensőkről az $y = b$ peremen átadódó n_b vízszintes erőt és $m_{y(b)}$ nyomatékot. Tekintve, hogy a héjelemek merevsége vízszintes síkban igen nagy, így mint vízszintes konzolok támasztják meg a héjsort.

Az n_b metszeterők N eredője igen közel esik az $x = 0$ peremhez. A számítás egyszerűsítése céljából N-t a biztonság javára az $x = 0$ peremen hatónak tekintjük. A szélső héjelemben N hatására közelítően a következő többletmetszeterők keletkeznek:

a) Teljes szélső konoid esetén (1. ábra jobboldala)

$$\Delta n_x = \frac{3N}{2b^3} xy, \tag{31}$$

$$\Delta n_{xy} = \frac{3N}{4b}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right). \tag{32}$$

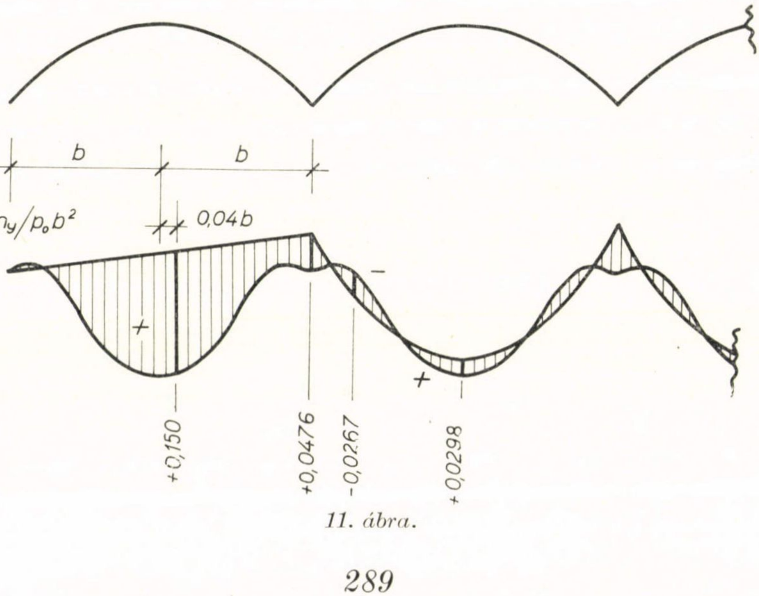
b) Szélső félkonoid esetén (1. ábra baloldala) a vízszintes erőt az első teljes konoid veszi fel, ebben keletkeznek a (31) (32) többletmetszeterők, és a szélső félkonoid nem kap n_y erőt.

Az N erő értéke n_b integrálásával

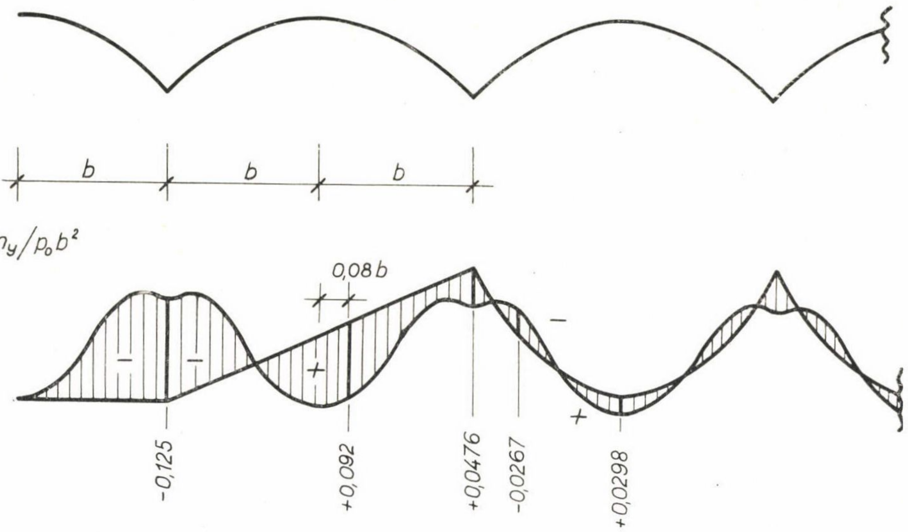
$$N = \int_0^a n_b d_x \approx 0{,}325 \frac{p_0 b^2 a}{f} \cdot \log_{10} \frac{\delta}{3f}.$$

A szélső héjelemet befogó szerkezetet természetesen méretezni kell a leírt $M = N.a$ vízszintes hajlítónyomatékra.

A keresztirányú m_y hajlítónyomatékok a következőképp alakulnak:



11. ábra.



12. ábra.

Félkonoidszél (b. eset) alkalmazásakor a félkonoid nyomatékai a szabad konoidnak felelnek meg, a félkonoid melletti teljes konoidon átmenetet képeznek a következő, belső héjelem felé.

Teljes szélső konoidnál (a. eset) a nyomatékok már a szélső mezőben átmenetet képeznek.

Az átmenetet mindkét esetben úgy vehetjük figyelembe, hogy a nyomatékábráknak az átmeneti mezőben levő, a pontosabb számítások szerint lapos görbe záróvonalát a biztonság javára történő közelítéssel egyenessel helyettesítjük. Így a 11. és 12. ábrán feltüntetett nyomatékábrákat kapjuk.

Megjegyezzük, hogy az 1. ábra jobboldalának megfelelően kialakított megoldás merevítő perem nélkül csak kisebb héjaknál alkalmazható, mert a nyomott szabad szél kihajlásra veszélyes.

Az 1. ábra baloldalának megfelelő kialakítás esetén a héj széle x irányban húzott, ezért kihajlási veszély a peremen nem áll fenn.

Számpélda: Vizsgáljunk egy, a 6. ábra szerint kialakított egyedülálló konoidkonzolhéjat, melynek adatai a következők: $b = 2{,}0$ m, $a = 4{,}0$ m, $f = 1{,}0$ m $\delta = 0{,}06$ m. $p_0 = 300$ kp/m^2.

A maximális metszeterők:

(14) képlet: $x = a$, $y = o$ (4. ábra)

$$n_{x\,\text{húzás}}^{\max} = \frac{15 \cdot 0{,}3 \cdot 4{,}0^2}{8 \cdot 1{,}0} = 9{,}0 \text{ Mp/m.}$$

(14): $x = a$, $y = b$ (4. ábra)

$$n_{x\,\text{nyomás}}^{\max} = \frac{15 \cdot 0{,}3 \cdot 4{,}0^2}{8 \cdot 1{,}0}(1-3) = -18{,}0 \text{ Mp/m}$$

$$\sigma_b^{\max} = \frac{18000}{6 \cdot 100} = 30 \text{ kp/cm}^2.$$

(15): $x = a$, $y = 0{,}577\ b$ (4. ábra)

$$n_{xy}^{\max} = \frac{0{,}3 \cdot 4{,}0 \cdot 2{,}0}{1{,}385 \cdot 1{,}0} = 1{,}73\ \mathrm{Mp/m}$$

$$\tau = \frac{1730}{6 \cdot 100} = 2{,}9\ \mathrm{kp/cm^2}$$

(20): $x = 0$, $y = b$ (8. ábra)

$$T_{\max} = \frac{0{,}3 \cdot 4{,}0 \cdot 2{,}0^2}{3{,}20 \cdot 1{,}0} = 1{,}5\ \mathrm{Mp}$$

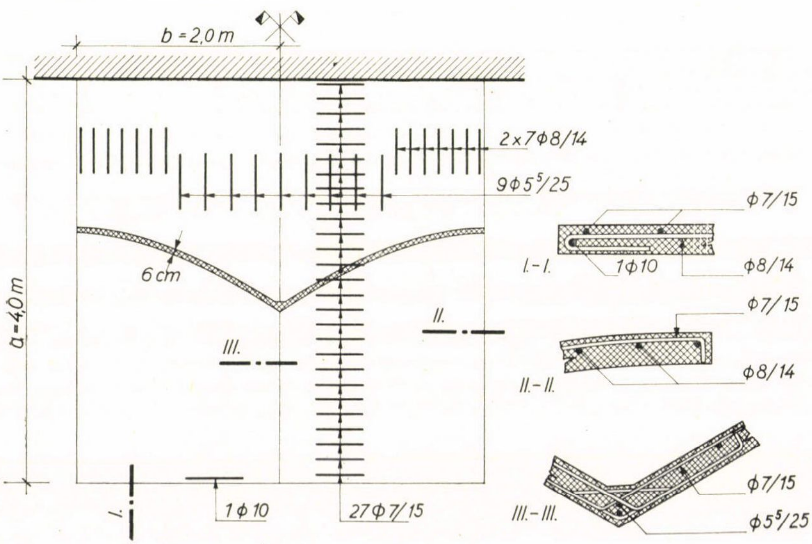
(17):

$$m_y^{\max} = \frac{-15 \cdot 0{,}3 \cdot 4{,}0^2 \cdot 0{,}06^2}{32 \cdot 1{,}0^2} = -8{,}1\ \mathrm{mkp/m}$$

(18): $y = 0{,}182\ b$ (6. ábra)

$$m_y^{\max} = -0{,}13 \cdot 0{,}3 \cdot 2{,}0^2 = 156\ \mathrm{mkp/m}$$

A vasalás elrendezését a 13. ábra mutatja be. Az adott esetben a szükséges vasalás erőssége az előírt minimális vasmennyiség követelményét éppen kielégíti. Nagyobb méretű héjaknál a vasalás az n_x, n_{xy} és m_y ábrák csökkenésének megfelelően ritkítható.



13. ábra.

Érkezett: 1965 szeptember hóban

IRODALOM

1. *Flügge, W.:* Statik und Dynamik der Schalen. Springer-Verlag. Berlin 1962.
2. *Bölcskei E.:* Deformation des voiles minces. Acta Techn. Acad. Sci. Hung. Tom. V. (1962). pp. 489.
3. *Bölcskei. E.:* Allgemeine Theorie der gekrümmten Schalen. Acta Techn. Acad. Sci. Hung. Tom. XXXI. (1960) pp. 391.
4. *Wlassow. W. S.*: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Berlin. 1958.