DR. VÁGÁS ISTVÁN, a műszaki tudományok kandidátusa

ÖNTÖZŐ CSŐKUTAK GEOMETRIAI ELMÉLETE

Magyarországon az öntözéses gazdálkodásnak egyre kiemelkedőbbé válik a szerepe a mezőgazdasági termelésben. A felszíni vizek hasznosítása mellett vízföldtani, hidrológiai és vízminőségi szempontból e célra alkalmas területeken *a felszín alatti vizek hasznosítása*, elterjedt kifejezéssel: *a csőkutas öntözés* ígér kedvező megoldást.

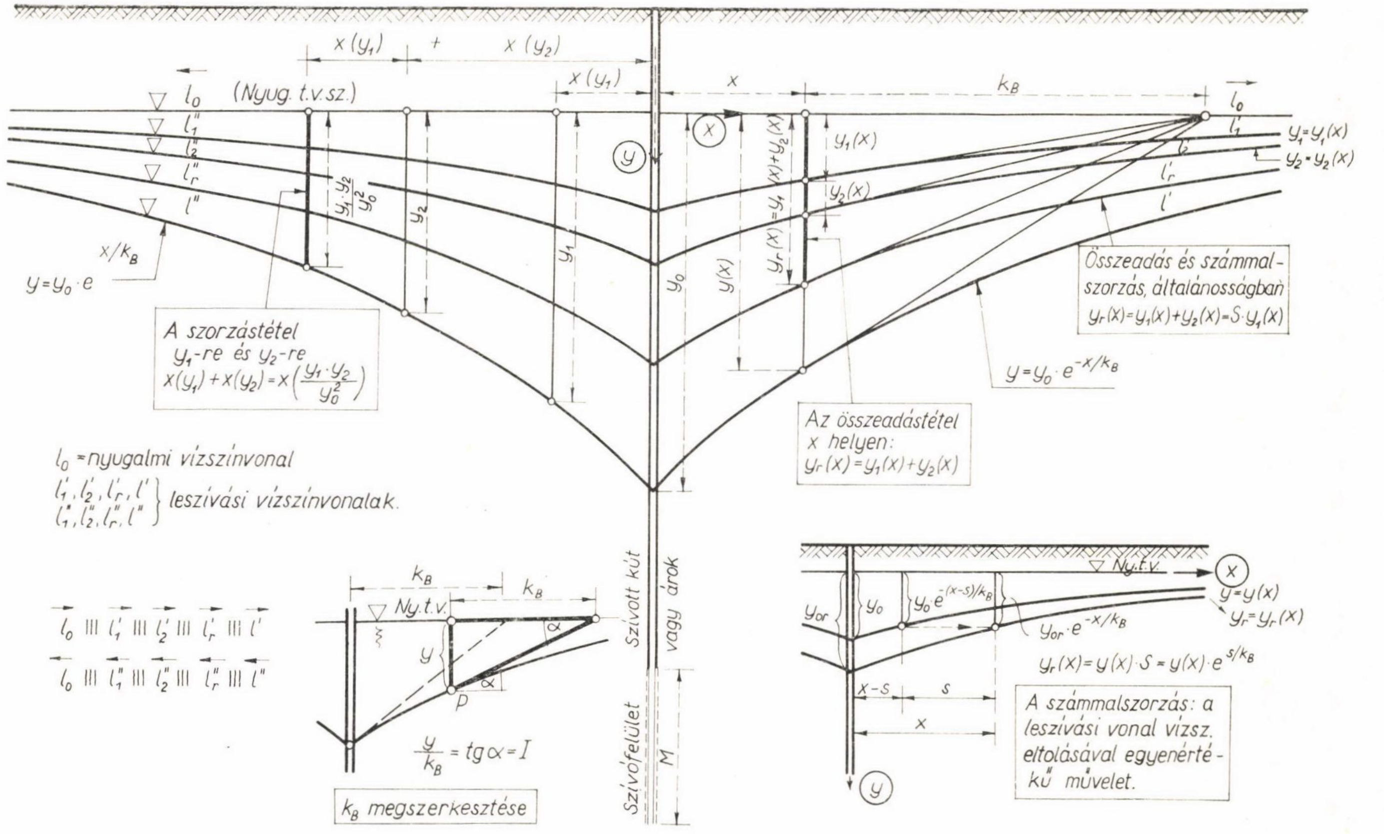
Az öntözés céljára történő csőkutas vízkivételek új elméleti és gyakorlati kérdéseket hoztak felszínre. Célszerűnek mutatkozott tehát a talajvízszinsüllyesztés elméleteinek olyan kiegészítése, amellyel az öntözéses vízhasználat által adott különleges feltételeket is figyelembe vehetjük.

A felszín alatti vizeket az öntözés céljára a legelterjedtebben *csőkutakból*, ritkábban falazott *aknakutakból*, illetőleg csövezetlen és szűrőzetlen *expresskutakból*, esetleg *nyílt árkokból*, az ún. *sírkutakból* szokták kitermelni. A felsorolt kútféleségeken belül is széles változatosságot találhatunk a kutak átmérője, anyaga, szűrőberendezése stb. tekintetében és a beépítés adottságai további eltérő vízszolgáltatási feltételeket teremtenek.

Az öntöző kutak telepítésénél a mezőgazdaság igényeinek kielégítése gyakran előbbre való a vízföldtani lehetőségek legokszerűbb kihasználásánál. Az öntöző kutaknál a talaj rétegeződése inhomogén,a réteghatárok gyakran nehezen különíthetők el, és a talajvíz szabad felszínű vagy nyomás alatti jellegét olykor nehéz megnyugtatóan megállapítani. A kutak rendszerint ,,belógó kutak", és csak ritkán ,,teljes kutak". Az alkalmazott szűrőszerkezet vagy szívó rész nem követi pontosan a víznyeréshez legalkalmasabb talajréteg határait, esetleg egyes rétegeket összekapcsol. Számos további, itt fel nem sorolt tényező hatásával együtt mindezek kétségessé teszik az ismert és használatos kútelméletek alkalmazásának feltétlen indokoltságát.

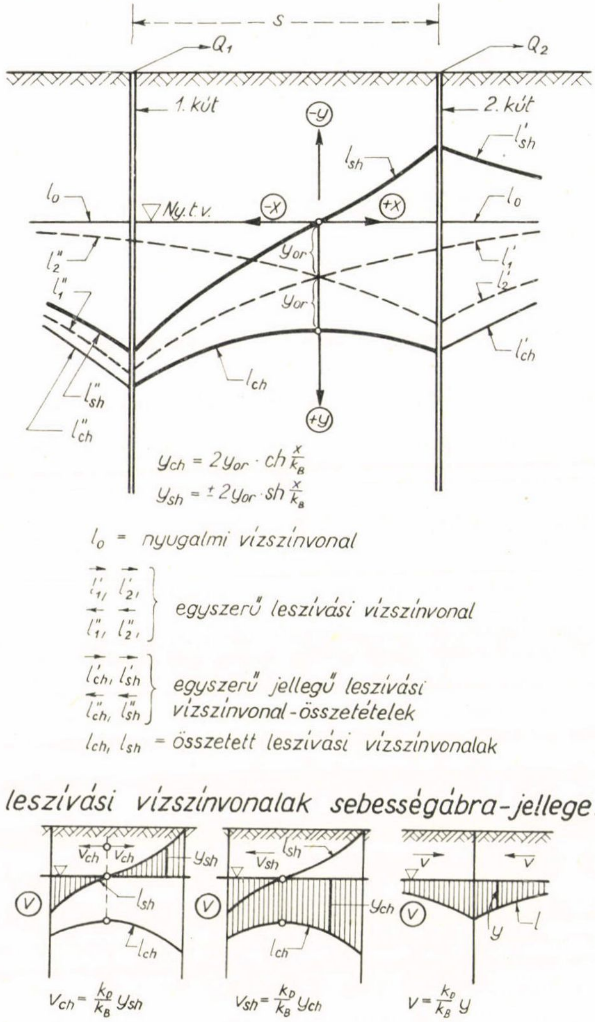
A különféle módokon, különböző feltételek között épített talajvízkutak működésének közös vonása a *nyugalmi talajvízszin süllyesztése*. A lesüllyesztett talajvíztükör alakváltozásainak vizsgálata elvonatkoztatható annak hidraulikai tartalmától és *tisztán geometriai kérdésként* kezelhető. A leszívási vízszínvonalak geometriája függetlenítheti magát a sokféle és egységes elméletben pontosan figyelembe nem vehető hatótényezőtől, illetőleg ezekre csak rendszerének kidolgozását követően kell, hogy számot tartson.

A talajvíz felszíne (piezometrikus szintje), végtelen kiterjedésű, homogén nehézségi erőtérben alkotott függőleges síkmetszetében szemlélve, nyugalmi állapotában *vízszintes egyenes*. Leszívás vagy feltöltés hatására ez a vízszintes egyenes *görbült leszívási (feltöltési) vonallá* alakul. *(1. ábra)* Egyetlen függőlegesben végzett szivattyúzás *egyszerű leszívási vízszínvonalat*, két vagy több függőlegesben egyidejűleg végrehajtott szivattyúzás az egymásrahatások kö-



1. ábra. Egyszerű leszívási vízszínvonalak és tulajdonságaik a lineáris leszívási rendszerben vetkeztében *összetett leszívási vízszínvonalat* eredményez. *(2. ábra)* A feltöltést (talajvízdúsítást) *negatív leszívásnak* tekintjük [9. 10].

A leszívási vízszínvonalak egyenletének meghatározása szempontjából megkülönböztetjük a *lineáris* és a *nem-lineáris* leszívási rendszereket. Geomet-



2. *ábra*. A leszívási vízszínvonalak összetétele a lineáris leszívási rendszerben

riai vizsgálatunk alapja az ún. lineáris rendszerek jellemzőinek megállapítása, amelyből átszámításokkal esetleg a nem-lineáris rendszerek vizsgálatára is következtethetünk [10].

Lineáris leszívási rendszerek

A leszívási rendszerek lineárisak, ha vízszínvonalaik között érvényben van az alábbiakban kifejtendő *összeadási* és *szorzási* tétel; ellenkező esetben nem lineárisak.

a) *A leszívások összeadása*

A lineáris rendszerbeli leszívások minden függőlegesben előjelhelyesen összegezhetők [10].

Ha tehát előállítunk egy $y_1 = y_1(x)$ egyenletű leszívási vonalat — ahol y-nal a függőleges irányú leszívást, x-szel pedig egy alapul választott függőlegestől mért vízszintes távolságot jelöltünk — majd ettől függetlenül létrehozunk egy másik, $y_2 = y_2(x)$ egyenletű leszívási vonalat, akkor a kétféle leszívást egyidejűleg előidézve az

$$y_r(x) = y_1(x) + y_2(x) \tag{1}$$

egyenletű eredő leszívási vonalat állítjuk elő *(1. ábra.)*

Ha az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ függvények egyaránt többszörösei egy $y = y\,(x)$függvénynek, az S szorzótényező bevezetésével

$$y_r(x) = S \cdot y(x) \tag{2}$$

alakban a leszívások *számmal szorzását* is értelmezhetjük.

b) *A leszívások szorzása*

Lineáris rendszerbeli egyszerű leszívási vízszínvonalnak abban a függőlegesében mérhető egyéb függőlegesekhez tartozó leszívási értékek szorzata, amelynek távolsága az egységnyi leszívás függőlegesétől ugyanannyi, mint a szorzásban szereplő leszívások függőlegeseinek ugyaninnen számított, előjelhelyesen összegezett távolsága. *(1. ábra.)* [10].

Ha tehát a leszívási vízszínvonal egyenletét az előző kifejezésekhez képest inverz, $x = x(y)$ alakban fejezzük ki és azon meghatározzuk az y_1 és y_2 leszívásokhoz tartozó, olyan $x = 0$ kezdőfüggőlegestől számított $x(y_1)$ és $x(y_2)$ vízszintes távolságokat, amely kezdőfüggőlegesben $y_1 = 1$, ezeknek összegezéséből kapott eredő függőlegesben az $y_r = y_1 \cdot y_2$ leszívást mérhetjük:

$$x(y_1) + x(y_2) = x(y_1 \cdot y_2). \tag{3}$$

Amennyiben az $x = 0$ helyen $y = y_0 \neq 1$, a (3) jobboldalán y_1 helyett $\dfrac{y_1}{y_0}$, y_2 helyett pedig $\dfrac{y_2}{y_0}$ irandó.

c) *Egyszerű leszívási vízszínvonalak egyenlete*

A lineáris rendszerbeli leszívások szorzástétele egyúttal az egyszerű leszívási vízszínvonal függvényegyenlete. Ennek az $x(y)$-ra vonatkozó megoldása bármely, $a > 1$ alapú *logaritmusfüggvény* lehet. Az alapszám feltüntetése helyett a természetes — $e = 2{,}718\ldots$ alapú — logaritmusrendszer használata mellett bevezetett, *a leszívási rendszert jellemző, hosszúságdimenziójú k_B tényező* is alkalmas a függvényegyenlet általános megoldásának kifejezésére. A $k_B = (\ln a)^{-1}$ értékmegválasztás az $a > 1$ esetekben ugyanis mindenkor lehetséges. Tekintve, hogy az egyszerű leszívási vízszínvonalakat a szivattyúzási függőlegestől mért x-távolság növekedésével csökkenő y-leszívás jellemzi, a (3) egyenlet megoldása:

$$x(y) = -k_B \cdot \ln \frac{y}{y_0} \tag{4}$$

Ezt y-ra kifejezve:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-x/k_B} \tag{5/a}$$

A szivattyúzás függőlegesének előzőekhez képest ellenkező oldalán:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{+x/k_B} \tag{5/b}$$

Az (5) egyenletpár fejezi ki az egyszerű leszívási vízszínvonalak egyenleteit. Egy szivattyúzási függőlegesen áthaladó egyszerű leszívási vízszínvonalak serege a nyugalmi vízszín vonalával egybeeső x-tengelyre vonatkozóan ortogonális affinitásban levő rendszert alkot. *(1. ábra.) [9, 10]*

d) *Összetett leszívási vízszínvonalak egyenlete*

Az egyszerű leszívási vízszínvonalak az (5) egyenletek értelmében olyan exponenciális görbék, amelyek csak együtthatójukban és kitevőjük előjelében különbözhetnek egymástól. Az x-tengely kezdőpontjának esetleges különbözősége ugyanis az együtthatóban is kifejezésre juttatható:

$$y_r = y_0 \cdot e^{-(x-s)/k_B} = y_0 \cdot e^{s/k_B} \cdot e^{-x/k_B} = y_0 \cdot S \cdot e^{-x/k_B} = y_{r0} \cdot e^{-x/k_B} \tag{6}$$

A koordinátarendszer $+s$ mértékű oldalirányú eltolása tehát az eredeti rendszerbeli leszívási értékek $S = e^{s/k_B}$-szorosukra növelésével egyenértékű, és az S szorzó beleolvasztható az egyenlet együtthatójába. *(1. ábra.)*

Minden, kitevőjében azonos előjelű egyszerű leszívási vonal egyenlete a közös x-tengelyre való redukálás után az együtthatók előjelhelyes összegezésével alakítható át az összetett leszívási vonal egyenletévé, tekintve, hogy ugyanannak a leszívási rendszernek vizsgálata esetén k_B, mint alapállandó, mindig ugyanakkora értékű. Ez a fajta összegezés a leszívási vonal egyszerű jellegét nem változtatja meg.

Más a helyzet, ha kitevőjükben ellenkező előjelű egyszerű leszívási vonalakat teszünk össze. Az azonos előjelű kitevők szerinti összegezést ilyenkor előzetesen elvégezhetjük, sőt módunkban áll olyan közös koordinátarendszert is választani, amelyben az együtthatók abszolút értéke mind a pozitív, mind pedig a negatív kitevők mellett egyenlő *(y_{0r})*. Most már csak két lehetőség marad:

1. az azonos előjelű együtthatók esete. (Vagy csak leszívások, vagy csak feltöltések összegezése):

$$\pm y_{ch} = y_{0r} \cdot e^{+x/k_B} + y_{0r} \cdot e^{-x/k_B} = 2y_{0r} \cdot ch \frac{x}{k_B} \tag{7a}$$

Ezt az összetételt *ch-típusú összetételnek* is nevezhetjük és ezt y indexében is kifejezésre juttathatjuk.

2. Ellentétes előjelű együtthatók esete. (Leszívások és feltöltések összegezése egymással):

$$\pm y_{sh} = y_{0r} \cdot e^{+x/k_B} - y_{0r} \cdot e^{-x/k_B} = 2y_{0r} \cdot sh\frac{x}{k_B} \qquad (7/b)$$

Ezt az összetételt viszont az y indexében is kifejezésre juttatható *sh-típusú összetételnek* nevezhetjük.

Lineáris leszívási rendszerekben az összetett leszívási vízszínvonalak egyenlete vagy az (5) egyenletekben kifejezett, az egyszerű leszívási vízszínvonalakat is jellemző *exponenciális típusú*, vagy a (7) egyenletekben leírt *ch-, illetőleg sh-típusú* alakban írható fel, hozzátéve, hogy a nyugalmi vízszín egyenese, illetve a szivattyúzási helyeken felvett függőleges egyenesek ezeknek különleges eseteiként szintén előfordulhatnak. *(2. ábra.)* [10].

e) *A lineáris leszívási rendszer hidraulikai jelentése*

Az összeadástétel azt fejezi ki, hogy a leszívási tevékenység ugyanolyan hatást gyakorol a természetes körülmények által kialakított nyugalmi vízszínvonalra, mint a műszaki beavatkozások által előzetesen már létrehozott, dinamikus egyensúlyban levő alapvízszínvonalra. Több szivattyúzási egység (kút, szívóárok stb.) együttesen kifejtett leszívási hatásán nem változtat a leszívások sorrendje és mértéke [1, 2].

A szorzástétel értelmében az egyszerű leszívási vízszínvonalak alakja független a szívattyúzás helyétől. Adott függőlegesben ugyanolyan mértékű leszívást és a leszívási vonal érintőjének ugyanolyan hajlását — tehát ugyanazt a vízszínesést — különböző helyeken végzett (azonban nyilvánvalóan különböző mértékű) leszívásokkal egyaránt előállíthatjuk. A (6) egyenlet értelmében a számmalszorzás és a leszívási vonalrendszer eltolása egyenértékű művelet, így bármely x-abszcisszájú függőlegesen átmenő egyszerű leszívási vonalak részei az s tetszőleges megválasztása melletti $(x - s)$ abszcisszájú függőlegesen átmenő leszívási vonalaknak is. *(1. ábra.)*

A leszívási vízszínvonalak geometriai rendszere a valóságban gyakran nem lineáris. A lineáris rendszer azonban határátmenetben, a kisebb mértékű leszívások felé haladva, mindenfajta nem-lineáris rendszert megközelíthet [10].

Nem-lineáris rendszereknél az összeadástétel módosul, s ennek a módosulásnak egyik kifejezési formája általánosságban az alábbi lehet:

$$y_r = \frac{y_1 + y_2}{1 - f(y_1, y_2)}. \qquad (8)$$

A jobboldali kifejezés nevezőjében szereplő, közelebbről meg nem adott f függvény a módosítás függvénye, amelynek negatív előjelét az a tapasztalati tény indokolja, hogy nagyobb leszívások mellett az azonos mértékű vízhozamnövekedéshez viszonylag nagyobb további leszívások szükségesek, mint a kisebbek mellett.

Fejtsük sorba a (8) kifejezés jobboldalát végtelen lánctört alakjában:

$$y_r = (y_1 + y_2) \cdot \{1 + f(y_1, y_2) + [f(y_1, y_2)]^2 + [f(y_1, y_2)]^3 + \ldots\} \qquad (9)$$

Kis leszívásoknál $f(y_1, y_2) \to 0$, így $y_r \to (y_1 + y_2)$, vagyis ebben az esetben a lineáris rendszer (1) szerinti összeadástételét kapjuk.

Nem-lineáris rendszereknél a szorzástételnek is van valamilyen módosult alakja, amelyből a leszívási görbék egyenletére következtethetünk. Legyen ez általánosságban a következő alakú:

$$y = f(x) = y_0 - I_0 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{dI_0}{dx} \cdot x^2 - + \ldots \qquad (10/a)$$

A sorbafejtésnél tekintetbe vettük, hogy az $x = 0$ helyen $y = y_0$, továbbá ugyanitt $f'(x) = -I_0$, ahol I_0 a vízszínesés értéke az $x = 0$ helyen.

A (10/a) egyenletben a lineáris rendszerekre vonatkozó egyszerű leszívási vízszínvonalon: $I_0 = -f'(0) = \frac{y_0}{k_B}$, így:

$$y = y_0 \cdot e^{-x/k_B} = y_0 - I_0 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{I_0}{k_B} \cdot x^2 - + \ldots \qquad (10/b)$$

Látható, hogy a (10 a és b) egyenletek jobboldalán az első két tag mindenkor megegyező, a további tagok közötti különbség annál inkább csökken, minél inkább $x \to 0$.

Mindezek azt igazolják, hogy a lineáris rendszer nem a valósággal ellentétes elvonatkoztatás, hanem a leszívásoknak a valóságot megközelítő különleges esete. Ezért indokolt az esetleges figyelembe veendő nem-lineáris rendszereknek a lineáris rendszerből történő kifejlesztése [10].

Hidraulikai tételek lineáris leszívási rendszerekben

a) *A vízszínesés meghatározása*

A vízszínesés a leszívási vonal adott pontbeli érintőjének iránytangense; az (5) egyenletekben értelmezett koordinátarendszerben a derivált függvény negatív előjellel vett megfelelő értéke. Egyszerű leszívási vonalakon:

$$I = -\frac{d}{dx}(y_0 \cdot e^{-x/k_B}) = \frac{y_0}{k_B} \cdot e^{-x/k_B} = \frac{y}{k_B}. \qquad (11/a)$$

Ch-típusú összetett leszívási vonalakon: (7/a-ból):

$$I_{ch} = -\frac{d}{dx}\left(2y_{or} \cdot \mathrm{ch}\frac{x}{k_B}\right) = \frac{2y_{or}}{k_B} \cdot \mathrm{sh}\frac{x}{k_B} = -\frac{y_{sh}}{k_B}. \qquad (11/b)$$

Sh-típusú összetett leszívási vonalakon: (7/b-ből)

$$I_{sh} = -\frac{d}{dx}\left(2y_{or} \cdot \mathrm{sh}\frac{x}{k_B}\right) = \frac{2y_{or}}{k_B} \cdot \mathrm{ch}\frac{x}{k_B} = -\frac{y_{ch}}{k_B}. \qquad (11/c)$$

A *ch-típusú* összetételnél a vízszínesés a megfelelő *sh-típusú* leszívással, az *sh-típusú* összetételnél viszont a megfelelő *ch-típusú* leszívással arányos. A (11) egyenletek a k_B értékek számítására is alkalmasak. Különösebb jelentőségű az egyszerű leszívási vízszínvonalakra érvényes (11/a) összefüggés, amelyből az igen fontos [9, 10]

$$y = k_B \cdot I \tag{12}$$

tétel is következik. Eszerint a lineáris rendszerekben a leszívás a rendszert jellemző állandó k_B melett a vízszínethetéssel arányos. *A k_B érték hidraulikai jelentése: a vízszínesés egységéhez tartozó leszívás.* Ez egyébként k_B megszerkesztésére is módot ad: a leszívási vízszínvonal tetszőleges pontjához tartozó függőlegest és érintőt a nyugalmi vízszín vonaláig meghosszabbítva, e két egyenes a nyugalmi vízszínvonalból az ábra léptékében k_B-vel arányos hosszat metsz ki. *(1. ábra.)*

A (12) összefüggés emlékeztet *Darcy-törvényére*. A következőkben a kétfajta összefüggést egyetlen egyenletben egyesítjük.

b) *A szűrési sebesség meghatározása*

A leszívási rendszerben szivárgó talajvíz mozgására tekintsük érvényesnek *Darcy törvényét*, amely szerint:

$$v = k_D \cdot I, \tag{13}$$

ahol v az áramlás ún. szűrési — tehát a talajszemcsék eltávolításával képzelt átáramlási felületre vonatkoztatott — sebessége, I a talajvízszín esése k_D-vel pedig az egyébként k-val jelölt, sebességdimenziójú *szivárgási együtthatót* jelöltük, hogy a már bevezetett k_B, hosszúságdimenziójú alapértéktől jól megkülönböztethessük. Ha a (11) egyenleteket, illetőleg a (12) egyenletet I kifejezésével összevonjuk a (13) egyenlettel, a következőket kapjuk:

Egyszerű leszívási vonalak esetén:

$$v = \frac{k_D}{k_B} \cdot y, \tag{14/a}$$

ch-típusú leszívásösszetételeknél:

$$v_{ch} = \frac{k_D}{k_B} \cdot y_{sh}, \tag{14/b}$$

sh-típusú leszívásösszetételeknél:

$$v_{sh} = \frac{k_D}{k_B} \cdot y_{ch}. \tag{14/c}$$

Az egyszerű leszívási vízszínvonalak tehát k_D/k_B arányosítással egyúttal *sebességábrák* is, amelyek a szűrési sebességet az x-változó, tehát a hely függvényében fejezik ki; az összetett leszívások vízszínvonalai pedig ugyanezzel az arányosítással az *ellentétes típusú párjuk sebességábrái.* *(2. ábra).* [9, 10].

c) *Kutak és szívóárkok vízhozamának számítása egyszerű leszívásoknál*

A kútpalást külső felületén meghatározható leszívást y_0-nak tekintve, a (14/a) egyenlet értelmében kiszámíthatjuk az ennek megfelelő, tehát a kútba áramláshoz tartozó v_0 szűrési sebességet. A kútpalást szívófelülete, $F = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot M$, ahol r a kút sugara, M pedig a szívófelület magassága. Szívóárkoknál — ha az ároknak a szivárgás síkjára merőleges hossza: l — $F = 2 \cdot M \cdot l$. A vízhozam eszerint kutak esetében:

$$Q = F \cdot v_0 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot M \cdot \frac{k_D}{k_B} \cdot y_0 . \tag{15/a}$$

Szívóárkok (galériák) esetében:

$$Q = F \cdot v_0 = 2 \cdot l \cdot M \cdot \frac{k_D}{k_B} \cdot y_0 . \tag{15/b}$$

M értéke lehet változó és lehet állandó, attól függően, hogy a leszívási vízszínvonal kívülről belemetsz-e, vagy nem metsz bele a kút szívófelületébe. Ha az M változását figyelembe kell vennünk, erre vonatkozóan külön összefüggéseket írhatunk fel. Ha M változatlannak tekinthető, vagy változásai az egyéb hatások miatt elhanyagolhatók, az y_0-on kívül minden további betűkifejezést összevonhatunk Q_f-ben. Q_f az egységnyi leszívásra eső vízhozamot, az ún. *fajlagos vízhozamot* jelenti. Hazánkban *Bélteky Lajos* vezette be használatát elsősorban a mélyfúrású kutak vízadóképességének jellemzésére, de használata a sekélyebb kutak esetében is meglehetősen elterjedt. [4].

Öntöző csőkutak esetében általában az $M = const.$ feltétel áll fenn, ezért nagyon gyakori az az eset, hogy a vízhozam és a leszívás a

$$Q = Q_f \cdot y_0 \tag{16}$$

képlet szerint — Q_f állandó lévén — lineárisan függenek össze. A *lineáris leszívási rendszer* elnevezésnek — matematikai okokon kívül — ez is egyik oka volt.

Geometriai vonatkozások a lineáris leszívási rendszerekben

a) *Az axiómák értelmezése a leszívási vízszínvonalakon*

1. tétel: A lineáris leszívási rendszer síkjának bármely két pontjára egy és csak egy leszívási vízszínvonal illeszkedik.

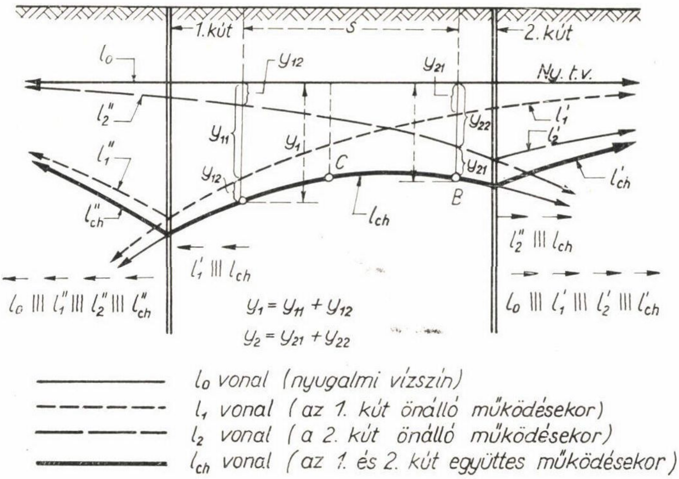
Bizonyítás: Válasszunk két tetszőleges (P_1 és P_2) pontot a leszívási rendszer síkjában *(3. ábra.)*. A pontokhoz tartozó leszívási függőlegesek távolsága s, a pontokkal megadott leszívások: y_1 és y_2. A lineáris rendszerben lehetséges összetételekhez két kútnál többnek működésére nincs szükség. Ennek megfelelően az y_1 leszívás az 1 jelű kút önálló működésével létrehozható y_{11}, és a 2 jelű kút önálló működésével létrehozható y_{12} leszívási értékekből tevődik össze, míg az y_2 leszívás a 2 jelű kút önálló működésével létrehozható y_{22} és az 1 jelű kút önálló működésével létrehozható y_{21} leszívások összege. Az 1 jelű kút önálló működése által kialakított egyszerű leszívási vízszínvonalon az (5) egyenletek értelmében fennáll az $y_{21} = y_{11} \cdot e^{-s/k_B}$ összefüggés, a 2 jelű kút önálló működése által kialakított egyszerű leszívási vízszínvonalon pedig az $y_{12} = y_{22} \cdot e^{-s/k_B}$ összefüggés.

Az együttműködő két kút által okozott leszívások P_1 és P_2 függőlegesében:

$$y_1 = y_{11} + y_{12} = y_{11} + y_{22} \cdot e^{-s/k_B}, \tag{17/a}$$

$$y_2 = y_{21} + y_{22} = y_{11} \cdot e^{-s/k_B} + y_{22} \,. \tag{17/b}$$

A (17) egyenletrendszerben szereplő mennyiségek közül y_1, y_2, s és k_B előre megadottak, y_{11} és y_{22} pedig ismeretlenek.



3. *ábra.* Két ponton keresztül a lineáris leszívási rendszerben csak egy leszívási vízszínvonal haladhat

Az ismeretlenekre vonatkozó megoldás:

$$y_{11} = \frac{y_1 - y_2 \cdot e^{-s/k_B}}{1 - e^{-2s/k_B}} \tag{18/a}$$

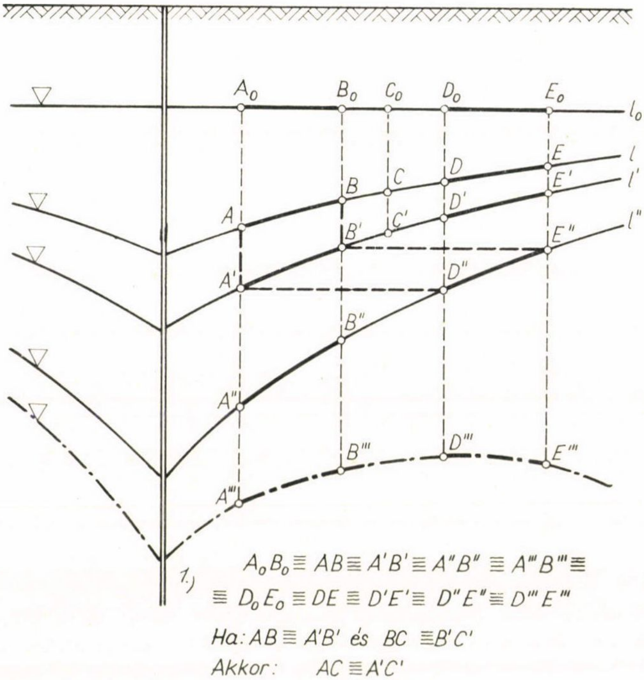
$$y_{22} = \frac{y_2 - y_1 \cdot e^{-s/k_B}}{1 - e^{-2s/k_B}} \tag{18/b}$$

Látható, hogy megoldás létezik, és minden ismeretlenre csak egyfajta, ha $s > 0$. Az *1. tételben* megadott illeszkedési feltételt tehát a két kútban létesíthető leszívási változatoknak egyike, de csak az egyike mindenképpen kielégíti. Az $s = 0$ esetben viszont a közös függőlegesen levő két pontot összekötő egyenes a (18) egyenletek további elemzése nélkül is magától értetődő megoldás. Mindezekkel tételünk bizonyított [10].

Amennyiben a szivattyúzással nem tartjuk magunkat a (18) egyenletekből számított értékekhez, a leszívási vonal az illeszkedés adott feltételeit nem elégíti ki. A két adott ponton kívül tehát mindenkor felvehetünk legalább egy olyan harmadikat, amely a két pont által meghatározott vízszínvonalra nem illeszkedik.

2. *tétel*: Ha a lineáris leszívási rendszer nyugalmi vízszínvonalán a rendezés (közbetartozás) alábbiakban kifejtendő axiómái értelmezhetők, akkor azok az adott lineáris rendszer bármelyik más leszívási víszínvonalára is értelmezhetők.

A rendezés tételben szereplő axiómáit *Hilbert* megfogalmazását követve az alábbiakban idézzük [5]:



4. ábra. Eredetazonos vonalszakaszok egyszerű és összetett leszívási vízszínvonalakon

1. Ha a B pont egy A és egy C pont között van, akkor A, B, C egy leszívási vízszínvonalnak három különböző pontja, és akkor a B pont a C és az A között is van.

2. Két ponthoz, A-hoz és C-hez az A és C által meghatározott leszívási vízszínvonalnak legalább egy olyan B pontja tartozik, hogy a C pont az A és B között van.

3. Egy leszívási vízszínvonalnak bármely három pontja közül egyik, de csak az egyik van a másik kettő között.

Bizonyítás: A leszívás lineáris rendszerében a nyugalmi vízszínvonalat vízszintes egyenessel ábrázoltan idealizáltuk. Ezt az egyenest szemléletünk alapján jellemezhetjük azokkal az axiómákkal, amelyeket rá nézve a geometria érvényesnek tekint vagy követel. A nyugalmi vízszín leszívásával vagy feltöltésével bármilyen vízszínvonalat is állítsunk elő, a leszívási függőlegesek kölcsönösen egyértelmű vonatkozást hoznak létre a nyugalmi vízszínvonal mindenegyes pontja és a leszívási vízszínvonal mindenegyes pontja között. Ezt kifejezik az (5) és a (7) egyenletek is, hiszen az exponenciális, a ch- illetőleg az sh-egyenlettípusú vonalak közös sajátsága az, hogy a független változó minden lehetséges értékére értelmezve vannak, de csak egyféleképpen. A nyugalmi vízszínvonal különböző pontjain átmenő leszívási függőlegesek a pontok közbetartozására vonatkozó törvényeket a maguk viszonylatában semmiképp sem változtathatják meg, tehát az általuk létesített kölcsönösen egyértelmű vonatkozás viszonylatában sem tehetnek ilyet. (*3. ábra)* [10].

3. tétel. Ha a lineáris leszívási rendszert jellemző műveletekkel (leszívási vonal hozzáadása, számmalszorzás, adott leszívási értékekkel való szorzás, illetőleg ezek ellentett műveletei) az egyik leszívási vízszínvonal A és B pontjai közötti szakasz átvihető egy másik leszívási vízszinvonal A' és B' pontjai közötti szakaszba, akkor ezt az említett két vonalszakaszt *eredetazonosnak* nevezzük, s eredetazonosságukat *végpontjaik függőlegesének egyező távolsága* jellemzi. Ha a nyugalmi vízszínvonal tetszőleges szakaszait hosszúságuk egyenlősége esetén egybevágóknak, vagy egyenlőknek nevezhetjük, úgy a nyugalmi vízszínvonal egybevágó vonalszakaszait a lineáris leszívási rendszert jellemző műveletekkel átalakítva feltétlenül eredetazonos leszívási vonalszakaszokhoz jutunk. *(4. ábra)*

Bizonyítás: A leszívási vonalak összeadása és számmalszorzása e műveletek meghatározása szerint a leszívási függőlegesek helyzetén nem változtathat, így a transzformált vonalszakaszok végpontjaihoz tartozó leszívási függőlegesek egymástól való távolságán sem. A leszívási értékkel történő szorzás ugyan a leszívási függőlegesek oldalirányú eltolódásával jár, de egy leszívási vízszínvonal adott szakaszának ugyanazzal a leszívási értékkel való szorzása az egész szakasznak azonos mértékű eltolásával jár. Ez viszont a leszívási függőlegesek egymáshoz viszonyított helyzetén megint csak nem változtathat. Az eredetazonosság fogalma tehát mindig visszavezethető a nyugalmi vízszínvonalon értelmezett egybevágóság fogalmára, [10].

Mindezek tudatában átírhatjuk Hilbert egybevágósági axiómáinak megfelelően a transzformációs eredetazonosságra vonatkozó axiómákat: *(4. ábra.)* [5].

1. Ha A és B egy l jelű leszívási vízszínvonalnak két pontja és ha továbbá A' egy l' leszívási vízszínvonalnak pontja, akkor egy, az A' által az l' vonalon létesített, mehatározott vonaloldalon mindig van egy B' pont, hogy az AB vonalszakasz az $A'B'$ vonalszakasszal eredetazonos. Ennek jelölése: $AB \equiv A'B'$

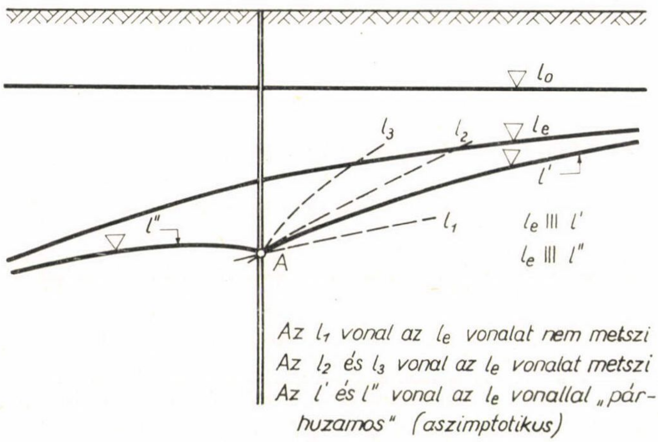
2. Ha egy $A'B'$ szakasz és egy $A''B''$ szakasz ugyanazzal az AB szakasszal eredetazonos, akkor egymással is eredetazonosak.

3. Legyen adva az l jelű leszívási vízszínvonalon két, közös pont nélküli szakasz, AB és BC, legyen továbbá adva ugyanazon, vagy egy másik, l' jelű leszívási vízszínvonalon két, közös pont nélküli szakasz, $A'B'$ és $B'C'$; akkor, ha $AB \equiv A'B'$, és $BC \equiv B'C'$, egyben $AC \equiv A'C'$.

A szögekre és a háromszögekre vonatkozó folytonossági és egybevágósági aximómák Hilbert-féle megfogalmazásának lineáris rendszerbeli leszívási vonalakra való átírásától itt eltekintünk, de megemlítjük, hogy ez minden elvi nehézség nélkül az előzőkhöz hasonlóan megtehető volna.

4. tétel: Ha a lineáris leszívási rendszerben l_c tetszőleges leszívási vízszínvonal és A egy rá nem illeszkedő pont, akkor mindig van két A ponton átmenő l' és l'' leszívási vízszínvonal, amelyek nem egészítik ki egymást egyetlen törésmentes leszívási vízszínvonallá, és amelyek nem metszik az l_e vonalat, viszont minden, az l' és l'' szögtartományba eső, A-n áthaladó leszívási vízszínvonal metszi az l_e vonalat. Ez esetben azt mondjuk, hogy l_e párhuzamos l'-vel és l''-vel és így jelöljük: $l_e \parallel\!| \, l'$ és $l_e \parallel\!| \, l''$. (*5. ábra.*) [5].

Bizonyítás: Képezzük az l' és l'' vonalakat úgy, hogy l_e-hez egy, az A függőlegesében levő kút által előidézhető egyszerű leszívási vízszínvonalpárt adunk hozzá. Az $y = y_0 \cdot e^{-x/k_B}$ vagy az $y = y_0 \cdot e^{+x/k_B}$ egyenletű vonalak hozzáadása egy másik, alapfeltevéseink szerint nyilvánvalóan hasonló egyenletű vonalakból összetettekhez: az összeadandó vízszínvonalhoz aszimptotikusan közeledő eredő vízszínvonalat eredményez. Ha ezek után az l_e vonalhoz összetett vízszínvonalat adunk hozzá, úgy azonban, hogy az eredő vízszínvonal A-n továbbra is átmenjen, az előbbi, egyszerű vízszínvonalpárhoz



5. ábra. A párhuzamosság Bolyai-féle értelmezése leszívási vízszínvonalakon

képest vagy mindenhol nagyobb leszíváshoz jutunk, s ekkor az eredő vízszínvonal nincs a megkívánt l'—l'' szögtartományban és l_e-t nem metszi, vagy jutunk kisebb mértékű leszívásokhoz is, és akkor az eredő vízszínvonal egyik része belekerül az l'—l'' szögtartományba. Minthogy abból l'-t vagy l''-t még egyszer nem metszhetvén — már ki nem kerülhet, és összetett voltánál (ch-illetve sh-típusú egyenletnél) fogva azokhoz aszimptotikusan sem közeledhet, az l_e vonalat metszenie kell [10] a lineáris leszívási rendszerben.

5. tétel: Ha az 1—4. tételekben a „*leszívási vízszínvonal*" kifejezést „*egyenes*" kifejezéssel, az „*eredetazonos*" kifejezést, „*egybevágó*" kifejezéssel, míg az „*aszimptotikus közeledés*" kifejezést „*párhuzamosság*" kifejezéssel helyettesítjük, a *Hilbert* által összeállított axiómarendszerhez jutunk, a párhuzamossági axióma *Bolyai-Lobacsevszkij*-féle megfogalmazása mellett. A leszívási vízszínvonalak lineáris rendszere tehát egyúttal olyan geometriai rendszerrel egyenértékű, amelyben az egyenesekre vonatkozó tételek a leszívási vízszínvonalakra érvényesek, úgy azonban, hogy az egybevágóság feltételeit az eredetazonosság feltételeivel helyettesítjük és a párhuzamossági axiómát Euklidesszel ellentétben, a Bolyai-geometria szellemében mondjuk ki [10].

A tétel az eddig ismertetett bizonyító anyagon kívül külön bizonyítást nem igényel.

6. tétel: A leszívási vízszínvonalak lineáris rendszereit leíró geometriai modell olyan közelítésben azonosítható a Bolyai-geometriával, amilyen közelítésben azonosítható az egybevágóságot definiáló meghatározás az eredetazonosságot definiáló meghatározással, [10].

Bizonyítás: A leszívási vonalak lineáris rendszere és a Bolyai-geometria rendszere között csak az egybevágósági axiómában áll fenn különbség. Ha ez az axióma esetleg ugyanazt jelentené, ezekben az esetekben a kétfajta geometriai modell is azonos lehetne egymással.

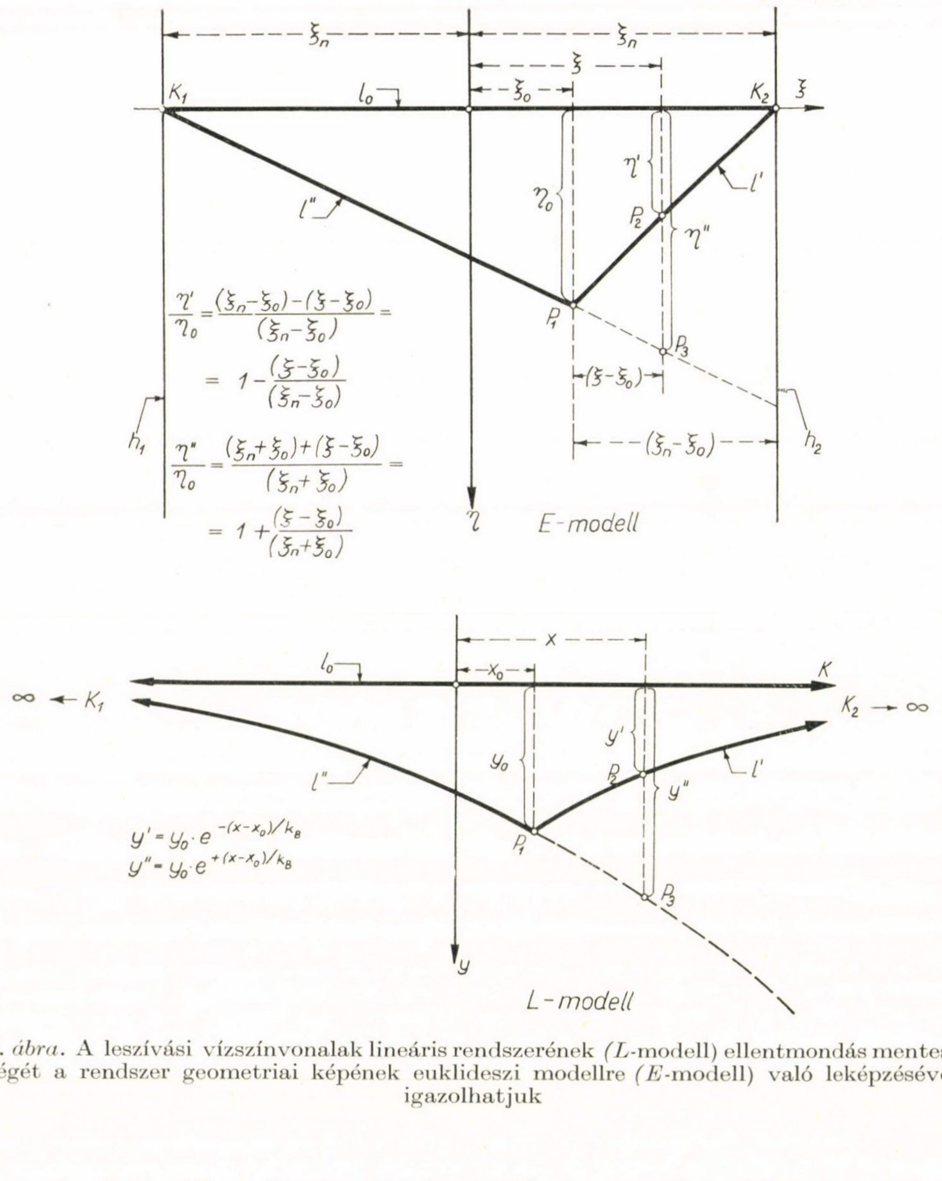
A hidraulika gyakorlatában előforduló talajvízszínsüllyesztések, valamint az öntöző kutak eseteinek döntő többségében a leszívási vízszínvonalak esése olyan kicsiny, hogy az egyébként tangens jelentésű esésérték akár a lejtésszöggel, akár pedig annak sinusával is mérhető, az adott vizsgálatoknál megengedett pontossági tűrés határain belül. Ebben a közelítésben azonban az egybevágósági feltétel és az eredetazonossági feltétel olyan pontossággal azonos egymással, amilyen pontossággal közeledik a leszívási vízszínvonal adott pontjában az érintő hajlásszögének cosinus függvénye az egységhez. Az ennek a feltételnek megfelelő lineáris leszívási rendszerekben a Bolyai-geometria által levezetett összefüggések is használhatók, figyelemmel azonban arra, hogy a $tg\alpha \approx \alpha \approx sin\alpha$ egyszerűsítéseket ezekben is érvényesíteni kell.

7. tétel: Ha a euklideszi geometria ellentmondásmentes, úgy a leszívási vízszínvonalak lineáris rendszerében az előzőkben értelmezett geometriai modell is ellentmondásmentesen írja le az általa tükrözött hidraulikai jelenségeket, [5, 10].

Bizonyítás: A *lineáris leszívási rendszernek* megfelelő geometriai modellt jelöljük L-lel. Az L-beli axiómák ,,*pont*''-ról, ,,*egyenes*''-ről és ezeknek ama vonatkozásairól szólnak, amelyeket az ,,*illeszkedik*'', ,,*közte van*'', ,,*egybevágó*'', illetve ,,*eredetazonos*'', és ,,*párhuzamos*'' szavakkal fejezünk ki. Tekintsük az E-vel jelölendő *euklideszi geometriai rendszer* bizonyos elemeit — nem feltétlenül a pontjait vagy más alapelemeit — s tekintsük azokat ,,*pontok*''-nak, bizonyos másfajta elemeit ,,*egyenesek*''-nek. Tekintsünk ezek között az euklideszi fogalmak között értelmezett bizonyosfajta vonatkozásokat — amelyek lehetnek az euklideszi alapvonatkozásból leszármaztatott összetett vonatkozások is — ,,*illeszkedés*''-nek, ,,*közte levés*''-nek, ,,*egybevágóság*''-nak (,,*eredetazonosság*''-nak), továbbá ,,*párhuzamosság*''-nak. Ilyen módon az E-rendszerben mintegy ,,*térképet*'' készíthetünk az L-beli axiómarendszer logikai szerkezetének ábrázolására, amelyen ezek az axiómák valamilyen euklideszi állítás formájában visszatükröződnek. Ha ezzel az átalakítással (,,letérképezéssel'') az L-rendszer minden axiómája az E-rendszer helyes tételébe megy át, akkor mondhatjuk, hogy az E-beli modell megvalósítja az L-beli modell axiómarendszerét, és akkor az L axiómarendszerét *ellentmondásmentesnek* tekintjük. [5, 10].

Alkossuk meg ennek megfelelően az L axiómarendszerének E-beli megfelelőit:

Feleljenek meg az L-ben ábrázolt leszívási vízszínvonalaknak E-ben egyenesek, (ezek között a nyugalmi vízszínvonal képe legyen a vízszintes egyenes), az L-beli pontoknak az E-ben is pontok. Az L-beli végtelen távoli pontok E-beli megfelelői helyezkedjenek el két függőleges, — h_1 és h_2 jelű — egyenesen. Két leszívási vízszínvonal *metsző* voltát a megfelelő euklideszi egyeneseknek a két függőleges közötti síkrészben való metsződése, *Bolyai-értelmezésű párhuzamosságát* a függőlegesek valamelyikére illeszkedő metsződése, *nem-*



6. ábra. A leszívási vízszínvonalak lineáris rendszerének (*L*-modell) ellentmondás mentességét a rendszer geometriai képének euklideszi modellre (*E*-modell) való leképzésével igazolhatjuk

metsző voltát pedig a függőlegesek közén kívüli metsződése tükrözi. Az illeszkedés és közben levés axiómái *L*-ben is, *E*-ben is egyformák, az egybevágóság és eredetazonosság pedig az alább közlendő transzformációs összefüggések segítségével értékelhető át *(6. ábra)*.

Hogy az egyszerű leszívási vízszínvonalak általánosabb, $y' = y_0 \cdot e^{-(x-x_0)/k_B}$ egyenletét, az E-rendszerben bevezetendő ξ és η koordinátarendszerben

$$\frac{\eta'}{\eta_0} = 1 - \frac{\xi - \xi_0}{\xi_n - \xi_0} \tag{19}$$

egyenletű egyenessé transzformálhassuk (amelyben ξ_0 a kút függőlegesének E-beli abszcisszáját, ξ_n a két határfüggőlegesnek a kezdőponttól mért vízszintes távolságát, η_0 pedig a $\xi = \xi_0$ függőlegesben mért ordinátát jelenti), szükséges:

$$(\xi - \xi_0) = (\xi_n - \xi_0) \cdot (1 - e^{-(x-x_0)/k_B}) \tag{20/a}$$

és:

$$\frac{\eta'}{\eta_0} = \frac{y'}{y_0}. \tag{20/b}$$

A leszívások összetételénél még szükségünk van a leszívási vízszínvonal emelkedő, $y'' = y_0 \cdot e^{+(x-x_0)/k_B}$ egyenletű szakaszának transzformációjára is. Tekintve, hogy a ξ-re vonatkozó (20/a) egyenletet már nem változtathatjuk meg, a másik változóra felírt egyenletet kell megváltoztatnunk, azzal a feltétellel, hogy a leszívási vízszínvonal emelkedő szakaszának L-rendszerbeli egyenletét E-ben

$$\frac{\eta''}{\eta_0} = 1 + \frac{\xi - \xi_0}{\xi_n - \xi_0} \tag{21}$$

egyenletű egyenessé transzformálhassuk. Ennek lehetőségét az

$$\frac{\eta''}{\eta_0} = 1 + \frac{\xi_n - \xi_0}{\xi_n + \xi_0} \cdot \left(1 - \frac{y_0}{y''}\right) \tag{22}$$

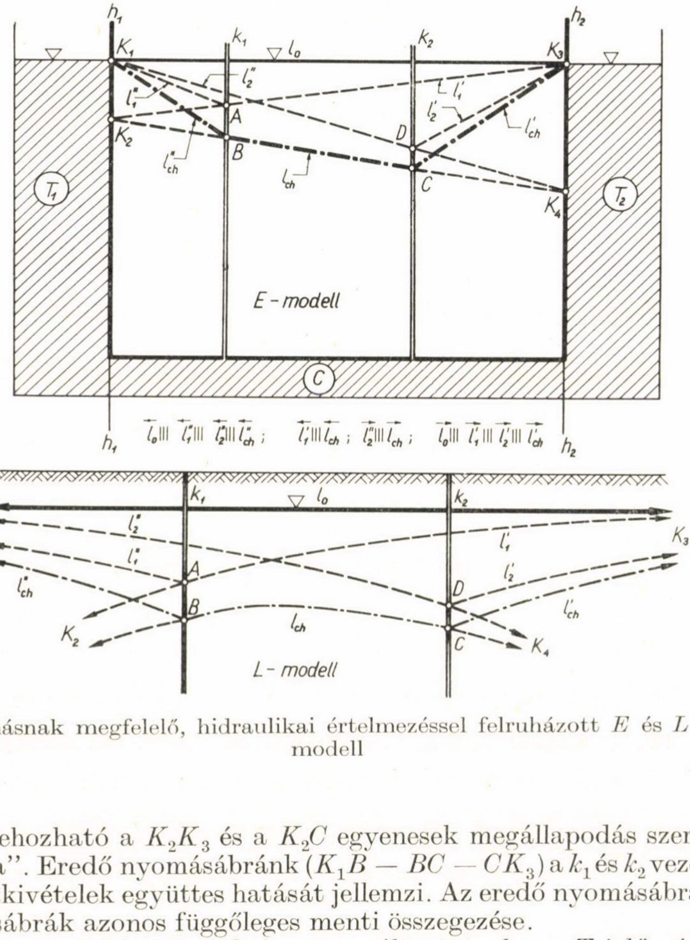
egyenlet teremti meg. A (22) egyenlet használatának feltétele: $\frac{y''}{y_0} > 1$; a (20/b) egyenleté pedig: $\frac{y'}{y_0} < 1$. Az $\frac{y}{y_0} = 1$ esetben a két egyenlet azonos eredményre vezet.

Az összetett leszívási vonalak transzformációja alkalmával az η változó leképzésének kétfajta módjára tekintettel kell lenni, s mindegyik változatot csak a maga helyén, érvényességi határán belül lehet alkalmazni.

Az L-rendszer és az E-rendszer egymásra való leképzési módjának megadása tulajdonképpen tételünk bizonyítása. Minthogy azonban hidraulikai jelenséget ábrázoló geometriai kép átalakításáról van szó, megkereshetjük ennek hidraulikai jelentését is.

Hozza létre az E-rendszerben a K_1K_3 egyenest — a nyugalmi vízszin transzformációt követően is változatlan helyzetű vonalát — a h_1 és h_2 jelű határoló függőlegesek vonalában elhelyezett, a c jelű csővel összekötött T_1 és T_2 jelű tartályokban biztosított állandó magasságú vízszin a közlekedőedények törvénye szerint hidrosztatikus nyomásvonalként *(7. ábra)*. A k_1 jelű felszálló vezetéken vegyünk ki vizet úgy, hogy a vízkivételi szint az A pontba kerüljön, s a T-tartályokban az utánpótlás megfelelő mértéke következtében a vízszint ne változzék. A nyomásveszteség csak a c jelű cső megfelelő hosszával legyen arányos, minden egyéb veszteség — beleértve a k_1, illetve a k_2-csőbeli veszteségeket is — elhanyagolható. Így az A pontbeli vízkivétel a K_1A és az AK nyomásvonalakat eredményezi. Ezek a nyomásvonalak egyenesek és a $K_1 K_3$ egyenessel megállapodásunk szerint „párhuzamos"-ak.

Vegyünk ki ezek után a k_2 jelű csövön is vizet, a vízkivételi szintet a C pontba süllyesztve. Az egyidejűleg szintén működő k_1 cső vonalában létezik olyan B pont, amelynek szintjére pótlólag leszállítva a k_1-beli vízkivétel



7. *ábra.* Egymásnak megfelelő, hidraulikai értelmezéssel felruházott E és L geometriai modell

szintjét, létrehozható a K_2K_3 és a K_2C egyenesek megállapodás szerinti „párhuzamossága". Eredő nyomásábránk (K_1B — BC — CK_3) a k_1 és k_2 vezetékekben eszközölt vízkivételek együttes hatását jellemzi. Az eredő nyomásábra az összetevő nyomásábrák azonos függőleges menti összegezése.

A hidraulikai folyamat elvén nem változtat, ha a T-jelű víztartályok mint az L-rendszerben is — a végtelenbe kerülnek, a c-jelű csővezetéket a vízáteresztő talaj helyettesíti, a k-jelű felszálló vezetékekből pedig szívott kút vagy árok lesz. A talajvíz mozgása és a csőben való vízmozgás ilyen módon transzformációs kapcsolatban áll egymással és a transzformációs egyenletek alkalmazásával számszerű következtetéseket is tehetünk kölcsönösen közöttük. Egyúttal igazoltuk a két *hidraulikai leírás* egymáshoz viszonyított ellentmondásmentességét is.

A lineáris leszívási rendszer mechanikai vonatkozásai

A mechanika fontos fejezetei közé számít az *erők geometriája* vagy *a mozgások geometriája* a különböző tartórendszerekre vonatkozó igénybevételek meghatározásánál. A talajvízszintsüllyesztés hidraulikai feladatait az előzőkben szintén geometriai eszközökkel igyekeztünk megoldani. Kézenfekvő, hogy ott, ahol a geometriai leírás módja azonos volt, a hidraulikai és a mechanikai jelenség analógiáira is rámutassunk és ezeket hasznosítsuk [3, 6].

a) *A leszívási vízszínvonal kötélgörbe-jellege*

A kötélgörbe: meghatározott, $q = q(x)$ függvény szerint változó megoszló erőrendszerrel terhelt, két pontján alátámasztott, súlytalan kötél vagy lánc egyensúlyi alakja. Az egyensúlyi alakot kifejező $y = y(x)$ függvény és a terhelési függvény kapcsolatát az alábbi differenciálegyenlet fejezi ki:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{H}, \tag{23}$$

ahol H az alátámasztási pontokon alkalmazott vízszintes húzóerő. Ha a (23) egyenletből H-t elhagyjuk, akkor y helyett M-et kell írnunk és M-et nyomaték jelentéssel kell felruháznunk. A kötélgörbe ugyanis egyúttal mindig H-val osztott nyomtékábra. [3, 6].

A leszívási vízszínvonalrendszer létrehozása és fenntartása kétségtelenül csak erőrendszerek működtetése árán lehetséges. A vízszínsüllyesztést abbahagyva ugyanis a víz felhajtó ereje azonnal érvényesül, és a vízszint a nyugalmi vízszín vonalába igyekszik visszaemelni. Ezt a felhajtó erőt kell tehát a szivattyúzásnak legyőznie és ezáltal, mint egyensúlyi tartóalakzatot, a leszívási vízszínvonalat létrehoznia. Ennek megfelelően a terhelést biztosító megoszló erőrendszer a leszívási értékekkel arányos: $q = y \cdot \gamma$. Az y változó egyszerű leszívási vízszínvonalakra az (5) egyenletekből, összetett leszívási vízszínvonalakra pedig a (7) egyenletekből fejezhető ki, mint x-nek a függvénye. Amennyiben ezeknek a függvényeknek az x-szerinti második differenciálhányadosa a (23)-nak megfelelően legfeljebb csak egy konstansban tér el az eredeti fügvvényalaktól — minthogy a terhelési függvény egyúttal a leszívási vonal egyenletét kifejező y függvénytől csak a γ vízfajsúly értékében tér el —, *a leszívási vízszínvonal a felhajtóerő terhelésre befüggő és a kútbeli leszívások pontjában megrögzített súlytalan kötél egyensúlyi alakja (8. ábra).*

A kívánt feltétel teljesül, ugyanis:

a) Az egyszerű, vagy az ilyen jellegű, exponenciális típusú leszívási vonalakra:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(y_0 \cdot e^{\pm x/k_B}\right) = \frac{1}{k_B^2} \cdot y_0 \cdot e^{\pm x/k_B} = \frac{y}{k_B^2} = \frac{q(x)}{\gamma \cdot k_B^2}. \tag{24/a}$$

b) A ch-típusú összetett leszívási vonalakra:

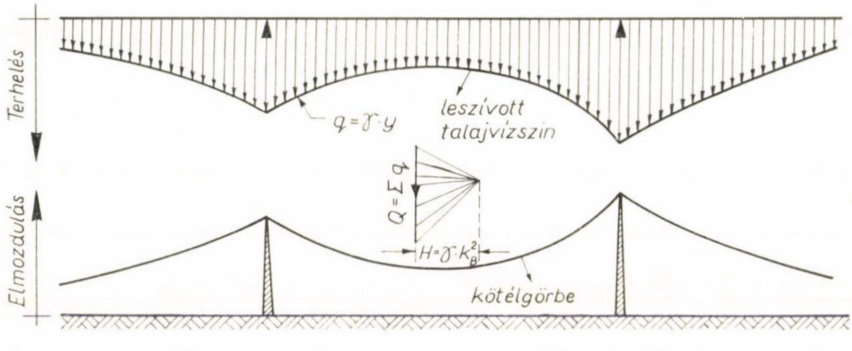
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(2y_0 \cdot \mathrm{ch}\,\frac{x}{k_B}\right) = \frac{1}{k_B^2} \cdot 2 \cdot y_0 \cdot \mathrm{ch}\,\frac{x}{k_B} = \frac{y}{k_B^2} = \frac{q(x)}{\gamma \cdot k_B^2}. \tag{24/b}$$

c) Az sh-típusú összetett leszívási vonalakra:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(2 \cdot y_0 \cdot \mathrm{sh}\frac{x}{k_B}\right) = \frac{1}{k_B^2} \cdot 2 \cdot y_0\, \mathrm{sh}\frac{x}{k_B} = \frac{y}{k_B^2} = \frac{q(x)}{\gamma \cdot k_B^2}. \qquad (24/c)$$

Ha tehát $H = \gamma \cdot k_B^2$, akkor a leszívási vízszínvonal tényleg a $q = y \cdot \gamma$ terhelésnek megfelelően belógó kötél egyensúlyi alakja. Az erőrendszerek egyébként mindig a leszívási síkra merőlegesen egységnyi vastagságban képzelt tartórendszerre vonatkoznak.

A leszívási vízszínvonal y-ordinátáinak a $H = \gamma \cdot k_B^2$ értékkel való megszorzása a leszívási vonalat a sajátmaga által kifejezett terhelési ábrára vonatkozó nyomatékábrába viszi át *(8. ábra)*.



8. ábra. A leszívási vízszínvonal kötélgörbe-jellege

A lineáris leszívási rendszerről az euklideszi síkon alkotott E-modellen a leszívási vízszínvonalak képe: koncentrált erőkkel terhelt, kéttámaszú tartó nyomatékábrája, illetőleg kötélpoligonja. Az E-modellben érdekesség, hogy végtelent jelképező határfüggőlegesben ébrednek a kútterheléseket jelképező erők reakciói. Az L-modellen ezek a reakciók zérus értékűek, s ott a kútterhelésekkel a felhajtóerők tartanak egyensúlyt *(7. ábra)*.

b) *Munka- és teljesítményegyenletek*

A mechanika fogalmai szerint a tartókra ható erők a tartó elmozdulása (elfordulása vagy eltolódása, azaz lehajlása) közben *munkát* végeznek, s ez a munka a *ható erőnek és a hatásvonalán történő elmozdulásnak a szorzatából* számítható. Hasonlóan: a nyomatékok is végezhetnek munkát, amely a nyomatéknak és az elfordulásnak a szorzata. (Ez utóbbi munkával azonban nem foglalkozunk a továbbiakban.) Attól függően, hogy az erő függőlegesében sajátmaga az ott működő erő vagy más, idegen függőlegesben ható erő okoz elmozdulást, *saját munkáról*, illetve *idegen munkáról*, az okozó erő külső vagy belső jellegének megfelelően pedig *külső* vagy *belső munkáról beszélünk* [6].

A leszívást előidéző szivattyúzás: *munkavégzés*. A T időn keresztül változatlanul fenntartott szivattyúzási folyamat alatt a Q vízhozamnak y magasságra való felszívásával végzett munka:

$$L = Q \cdot y \cdot \gamma \cdot T. \qquad (25)$$

A T idő az egész vizsgálatra nézve ugyanaz, a viszonyszámok képzésében tehát nincs jelentősége. Elhagyásával *teljesítmény* jellegű mennyiségek kerülnek egyenleteinkbe. Ugyancsak elhagyható az egységnyi vízfajsúly is. A teljesítmény *(E)*:

$$E = Q \cdot y. \tag{26}$$

Ez a kifejezés alakilag már hasonlít a tartók sztatikájában használatos „*munka*" kifejezéséhez. „*Saját*" *teljesítménynek* nevezzük adott vízhozamnak a vízkivételi helyen okozott leszívással előidézett hatását, „*idegen*" *teljesítménynek* pedig más vízkivételi hely által létesített leszívás hatását. A szivattyúzott kutak „*külső*" *teljesítményt* létesítenek, a talaj szivárgási viszonyai alapján pedig „*belső*" *teljesítmények* értelmezésére adnak lehetőséget. (Belső teljesítményekkel azonban itt nem foglalkozunk.) A két kút együttes szivattyúzásának tárgyalásánál bevezetett jelölések szerint az $E_{11} = Q_1 \cdot y_{11}$ és az $E_{22} = Q_2 \cdot y_{22}$ teljesítmények *saját teljesítmények*, az $E_{12} = Q_1 \cdot y_{12}$ és az $E_{21} = Q_2 \cdot y_{21}$ teljesítmények pedig *idegen teljesítmények*. Ha a két kútban a fajlagos vízhozam egyenlő. ($Q_{f1} = Q_{f2} = Q_f$), a $Q_1 = Q_f \cdot y_{11}$ és a $Q_2 = Q_f \cdot y_{22}$ összefüggés érvényes, és ugyancsak érvényes az (5) egyenletekből származó $y_{12} = y_{22} \cdot e^{-s/k_B}$ és az $y_{21} = y_{11} \cdot e^{-s/k_B}$ összefüggéspár is.

Ezekből:

$$E_{12} = Q_1 \cdot y_{12} = Q_f \cdot y_{11} \cdot y_{22} \cdot e^{-s/k_B}, \tag{27/a}$$

$$E_{21} = Q_2 \cdot y_{21} = Q_f \cdot y_{22} \cdot y_{11} \cdot e^{-s/k_B}, \tag{27/b}$$

vagyis:

$$E_{12} = E_{21}. \tag{28}$$

Ennek megfelelően:

$$Q_1 \cdot y_{12} = Q_2 \cdot y_{21}. \tag{29}$$

Ez a szilárdságtan *Maxwell-tételével* egyenértékű összefüggés, és kifejezi hogy két kútnak egymás hatására létrehozott idegen teljesítménye egymással egyenlő. Ha $Q_1 = Q_2$, akkor $y_{12} = y_{21}$, aminek jelentése: az egyik kút működése a másik kút helyén ugyanolyan leszívást létesít mint a másik kút működése az egyik kút helyén. Ez a körülmény — a mechanikához hasonlóan — annak belátására is vezet, hogy a leszívási vízszínvonal: egyúttal *leszívási hatásábra („eltolódási hatásábra")* is.

A lineáris leszívási rendszer gyakorlati megvalósulásának kérdései

Geometriai szemlélettel megalapozott, mechanikai vonatkozásainak feltárásával is alátámasztott lineáris leszívási rendszerünk alkalmazhatóságát — az elméleti meggondolásokon túlmenőleg — kísérleti úton feltétlenül igazolnunk kell. Nyilvánvaló ugyanis az a megállapítás, hogy a lineáris leszívási rendszer feltételezése mindenkor csak közelítésben lehetséges, és annak megállapítása az elsődleges, hogy ez a közelítés a gyakorlati esetekben kellő hűségű-e, és használhatóságának köre eléggé kiterjedt legyen.

A lineáris leszívási rendszer gyakorlatban való alkalmazhatóságának igazolására felhasználtuk azoknak a méréseknek az eredményeit, amelyek 1959 és 1964 között a Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Intézetben a csőkutas öntözések hazai lehetőségeinek feltárására folytak. A részletek ismertetésére itt nem térünk ki, csak a végeredményeket foglaljuk össze [10]:

1. Az öntözés céljait szolgáló talajvízszínsüllyesztések gyakorlatában a lineáris leszívási rendszer feltételezésével levezetett számítási módszerek kielégítő pontosságúak voltak, feltéve, hogy a kútpaláston és annak 1—2 m-es környezetében kialakuló különleges viszonyokat (vízszínelszakadás, a leszívási tölcsér kút körüli alakja stb.) e célra kidolgozott elméleti vagy tapasztalati módszerekkel pótlólag figyelembe vettük. A lineáris leszívási rendszer — kidolgozása során — eleve függetlenítette magát a kút körüli viszonyoktól, így ezek alakulása elvi zavarra nem vezethet ugyan, azonban a kiegészítő adatok ismeretét mindenkor megkívánja.

2. A gyakorlatban esetleg előforduló nem-lineáris leszívási rendszerek döntő többsége matematikai vagy geometriai módszerek alkalmas igénybevételével, (pl. léptékváltoztatással, görbéknek húrpoligonnal való közelítésével általában linearizálható. Ilyen módon a lineáris rendszertől való eltérések kérdése elvi problémák megoldása helyett együttható meghatározási kérdéssé egyszerűsbödhet.

3. Mérési adatokat tekintve a lineáris leszívási rendszer geometriai leírásában szereplő k_B görbületi hossz értékére a következő tapasztalati jellegű, közelítő képletet vezettük le [10]:

$$k_B = 24 + 6 \cdot \log D_{10}, \tag{30}$$

ahol k_B-t *méter*ben kapjuk, ha a vízadó talajréteg 10 súlyszázalékához tartozó szemcseátmérőt (D_{10}) *mm*-ben helyettesítjük a képletbe, 10-alapú logaritmus használata mellett. Az adott képlet tájékoztató, s arra mutat, hogy a k_B számértéke a talajminőségtől függően változik ugyan, de nem túlzottan. Finomabb szemű, iszapos talajoknál — ahol D_{10} értéke 10^{-2} *mm* is lehet — $k_B = 12$ *m*. Durvaszemű kavicstalajoknál, $D_{10} = 10$ *mm* esetén viszont $k_B = 30$ *m*. Általában mondhatjuk, hogy a k_B értéke a gyakorlati esetek többségében 10 *és* 30 *m* között ingadozik, átlagos értéke pedig kereken 20 *m*-re vehető.

Bár a lineáris leszívási rendszer elmélete kedvező távlatokat és több analóg alkalmazási lehetőséget mutat és gyakorlati felhasználása sem jár nagyobb pontatlanságokkal, mint bármely más járatos talajvízszínsüllyesztési elméleté [7, 8], mégsem mondhatjuk, hogy emellett egyéb elméleti kiindulás, szintén alkalmas közelítések igénybevétele mellett, ne lehetne egyenlően jogosult a vizsgált hidraulikai folyamat; a talajvízszínsüllyesztés leírására. A csőkutas öntözések műszakilag meglehetősen nehezen értékelhető, szerteágazó feltételei között azonban kétségtelenül célszerű olyan elméleti meggondolásokhoz folyamodnunk, amelyek viszonylag kevés határfeltételre érzékenyek. Elméletünk alkalmazását ennek tudatában ajánlhatjuk, és remélhetjük, hogy a csőkutas öntözések vizsgálatában és más hasonló feltételeknek megfelelő kérdések megoldásában előnyös vonatkozásait érvényesíthetjük.

Érkezett 1965 október hóban.

IRODALOM

1. *Almássy Bálint—Holnapy Dezső:* Számítási eljárás kutak egymásrahatásának vizsgálatára. *Hidraulikai Konferencia, Budapest, 1960. 4/1* tanulm.
2. *Altovszkij M. E.:* Metodicseszkoje rukovodsztvo po raszcsotu vzajmogyejsztvujuscsih artezianszkih i gruntovih vodozaborov. *(Moszkva, 1947.)*
3. *Dr. Barta József:* Mechanika. Műegyetemi előadások. *Kézirat. 1949.*
4. *Bélteky Lajos:* A kismélységből való víznyerés gazdaságossága és eredményei. *Hidrológiai Közlöny,* 1954. 1—2. sz.
5. *Bolyai János:* Appendix. *(Kárteszi Ferenc megjegyzéseivel, kiegészítéseivel, továbbá D. Hilbert:* „A Bolyai-Lobacsevszkij f. geometria újabb megalapozása" c. dolgozatával.) *Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.*
6. *Dr. Korányi Imre:* Tartók sztatikája. *Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.*
7. *Dr. Németh Endre:* Hidromechanika. *Tankönyvkiadó, Budapest, 1963.*
8. *Dr. Öllős Géza:* Alkalmazott hidraulika. *Mérnöki Továbbképző Int. kiadása, 1963.*
9. *Vágás István:* A Bolyai-geometria talajvízszínsüllyesztés-elméleti vonatkozásai. *Hidrológiai Közlöny, 1962. 5.* sz.
10. *Vágás István:* A talajvízből való öntözés egyes hidrológiai és hidraulikai feltételei Kandidátusi értekezés, *Budapest, 1965. Kézirat.*