Görbék és felületek a geometriai modellezésben

A számítógéppel segített geometriai tervezés (Computer Aided Geometric Design – CAGD) elsősorban görbék és felületek modellezésével foglalkozik, amibe beletartozik ezen objektumok leírása, tulajdonságainak vizsgálata és alakjuk módosítása is. A projekt megvalósítása során mindhárom területen értünk el eredményeket. A beszámolót ezen területeknek megfelelően tagoltuk.

A CAGD-ban a görbéket legtöbbször

$$\begin{array}{l} \mathbf{g}(u) = \sum_{j=0}^{n} F_j(u)\,\mathbf{d}_j \\ F_j : [a,b] \to \mathbb{R}, u \in [a,b] \subset \mathbb{R}, \mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^{\delta}, \delta \geq 2 \end{array} \tag{1}$$

alakban írjuk le, ahol a $\mathbf{d}_j$ pontokat kontrollpontnak, az őket összekötő töröttvonalat kontrollpoligonnak, az F_j függvényeket pedig bázisfüggvényeknek nevezzük. A felületeket az (1) görbék felhasználásával

$$\begin{array}{l} \mathbf{s}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} F_i(u)\,G_j(v)\,\mathbf{d}_{ij} \\ F_i : [a,b] \to \mathbb{R}, u \in [a,b] \subset \mathbb{R}, \\ G_j : [c,d] \to \mathbb{R}, v \in [c,d] \subset \mathbb{R}, \mathbf{d}_{ij} \in \mathbb{R}^3 \end{array} \tag{2}$$

alakban írjuk le, ahol a $\mathbf{d}_{ij}$ pontokat kontrollpontnak, a belőlük képzett poligonhálót kontrollhálónak, az F_i és G_j függvényeket bázisfüggvényeknek nevezzük. (Az F_i és G_j függvények lehetnek különbözőek is, de a gyakorlatban szinte mindig megegyeznek.)

A fenti alakban előállított görbék (felületek) közül a Bernstein-polinomokkal előállított Bézier-görbék (felületek), valamint a normalizált B-spline alapfüggvényekkel előállított B-spline görbék (felületek) a legismertebbek.

Alakmódosítás

A normalizált B-spline alapfüggvény értelmezéséhez az értelmezési tartományt részintervallumokra kell bontani és az alapfüggvényeket ezeken értelmezzük. Az értelmezési tartományon felvett osztópontokat csomóértékeknek nevezzük. Ha az (1) görbe, illetve a (2) felület valamely meghatározó adatát megváltoztatjuk, akkor természetesen megváltozik a görbe alakja is. A görbe (felület) valamely meghatározó adatának folytonos változtatása során a görbe (felület) pontjai által leírt görbéket pályagörbéknek nevezzük. Egyetlen csomóérték változtatásakor fellépő alakmódosulással már korábban foglalkoztunk, a görbékre és felületekre vonatkozó alaperedményeket már publikáltuk.

A projekt megvalósítása során azokat a pályagörbéket is vizsgáltuk, amelyeket két csomóérték szimmetrikus változtatásakor írnak le a B-spline görbék pontjai [1], [2]. A B-spline felületek csomóértékeinek változtatásakor kapott pályagörbék kiterjesztéséről, valamint a felületek egy, illetve két csomóértékének változtatásakor kapott felületseregek burkolófelületeiről a [7] cikkünk jelent meg.

Az is célunk volt, hogy a csomóértékek változtatásakor fellépő alakmódosulásról szerzett ismereteink alapján olyan, a gyakorlatban is használható eljárásokat dolgozzunk ki, amelyek görbék, illetve felületek előírt (valamilyen geometriai kényszert kielégítő, pl. adott ponton áthaladó, adott egyenest érintő) alakmódosítását teszik lehetővé. A [3] konferencián harmadfokú B-spline görbék görbületét figyelembe vevő alakmódosításával kapcsolatos eredményeinkről tartottunk előadást. A B-spline görbék csomóértékének változtatásával kapcsolatos eredményeinket felületekre általánosítottuk, praktikus, a CAD rendszerek felhasználó által is használható alakmódosító eljárásokat dolgoztunk ki, amivel csak csomóértékek változtatásával a felület adott pontját, illetve adott paramétervonalát előre megadott helyzetbe tudjuk mozgatni (a természetes korlátok adta keretek között), lásd [9].

Görbék és felületek kontrollpontokkal való leírásakor használt bázisfüggvények többsége polinomiális vagy racionális függvény, azonban az utóbbi időben számos olyan bázist is publikáltak, amelyek a polinomok mellet a trigonometrikus és/vagy a hiperbolikus függvényeket is magukba foglalják. Ilyen a C-Bézier, C-B-spline $(\sin(u), \cos(u))$; a H-Bézier, H-B-spline $(\sinh(u), \cosh(u))$, valamint a mindkettőt magába foglaló bázisra épülő F-B-spline görbe és felület. A C-Bézier és C-B-spline görbék pályagörbéinek geometriai tulajdonságait vizsgáljuk a [8] cikkben, a [16] cikkben pedig az F-B-spline görbék alakjának módosítását vizsgáltuk, megadva a pályagörbéket és azok geometriai tulajdonságait. Mindegyik esetben kitértünk a geometriai kényszereket kielégítő alakmódosítások lehetőségére is.

A polinomiális bázisfüggvények egy más típusú általánosítása, amikor a bázisfüggvényekbe úgynevezett alakparamétereket építenek be abból a célból, hogy változatosabb alakú görbéket lehessen leírni az adott bázisfüggvényekkel. Ezek a paraméterek globálisan vagy lokálisan befolyásolják a görbe alakját anélkül, hogy egyéb definiáló adataikon változtatnánk. Az ezekkel foglalkozó publikációk többsége azonban nem tisztázza az alakparaméter geometriai hatását, illetve azt, hogy ezek segítségével elérhető-e kényszeres alakmódosítás. A geometriai hatásokat egyrészt konkrét polinomiális görbékre is vizsgáltuk, másrészt pedig olyan általános leírási módot („linear blending") sikerült találnunk ezekre a görbetípusokra, mely egységesen tudja kezelni az alakparaméterekkel rendelkező görbék széles osztályát [13], [14], [19]. Ezt a technikát alkalmaztuk alakparaméterrel rendelkező interpoláló görbékre is, lásd [18].

Görbeinterpoláció során abból indulunk ki, hogy adottak az interpolálandó pontok, valamint a hozzájuk rendelt egymástól különböző paraméterértékek (csomóértékek); és keressük azt az (1) alakban felírható görbét, amely az adott csomóértéknél a hozzárendelt ponton megy át. Itt is felmerül a kérdés, hogy hogyan változik a görbe alakja, mik lesznek a görbe pontjainak pályagörbéi, ha valamelyik csomóértéket változtatjuk. Ezen a területen a legtöbb eredményt harmadfokú polinomiális interpolációval kapcsolatban értünk el, ahol interaktív alakmódosító eljárást is sikerült kidolgozni a csomóérték változtatására építve. Ehhez kapcsolódó publikációink: [5], [10], [15].

Görbék és felületek tulajdonságai

Az (1) alakban előállított görbék szingularitásainak (inflexió, csúcspont, önmetszéspont) vizsgálatával is foglalkoztunk. Harmadrendű polinomiális és racionális görbékre már voltak ismert eljárások a szinguláris pontok megtalálására. Mi tetszőleges bázisfüggvények esetén geometriailag szépen interpretálható eredményekre jutottunk, mely segítségével a kontrollpontok helyzete alapján automatikusan detektálhatók (szükség esetén interaktívan biztosíthatók) a szingularitások. Ehhez kapcsolódó publikációk a [4] konferencia előadás és a [6] cikk. A vizsgálatokat kiterjesztettük az (1) görbék torziójának eltűnésére, mely eredményeit a [11] cikkben közöltük.

Műszaki alkalmazásaik miatt fontos szerepet játszanak a vonalfelületek. A kontrollpontok helyzetén alapuló szükséges és elégséges feltételt adtunk arra, hogy egy Bézier-felület paramétervonalai egyenesek legyenek [17]. Erre alapozva a Bézier-vonafelületek kifejthető részhalmazát is tanulmányoztuk [12].

Kontrollháló létrehozása

Az utóbbi néhány évben, elsősorban a háromdimenziós szkennerek megjelenésével, megnőtt a jelentősége a rendezetlen adatok modellezésének, amikor is felületet kell illesztenünk több ezer vagy tízezer pontból álló „pontfelhőre” úgy, hogy a pontok koordinátáin kívül más információnk nincs. A manapság használatos felületinterpolációs eljárások túlnyomó többsége négyszög topológiájú pontrácsra tud felületet illeszteni. Ezért a standardnak tekinthető eljárás az, hogy a pontfelhőre háromszöghálót illesztenek, majd a háromszöghálóból négyszöghálót állítanak elő, ami már alkalmas input az felületinterpolációhoz. Célunk az volt, hogy a közbülső lépés kihagyásával közvetlenül négyszöghálót illesszünk a pontfelhőre. Eredeti tervünk az volt, hogy öntanuló mesterséges neurális hálózatokkal oldjuk meg a feladatot, mások által publikált síkbeli algoritmusok továbbfejlesztésével. Hosszas implementálási kísérletek után kiderült, hogy ez nem járható út, így más megoldást kerestünk – ezért kellett kérnünk a pályázat 2008 évi lezárásának lehetőségét. Egy Monte Carlo módszert dolgoztunk ki a feladat megoldására. Azt feltételezzük, hogy a pontfelhőt és annak topológikus gráfját (skeleton) ismerjük (a skelton létrehozására számos ismert eljárás létezik). Az algoritmus fő lépései: topológikus gráf köré egy durva négyszöghálót építünk, a hálót finomítjuk, majd a finomított négyszöghálót fokozatosan kifeszítjük a pontfelhőre. Eljárásunkkal önmetszést nem tartalmazó, viszonylag komplex topológiájú (elágazásokat, hurkokat tartalmazó) pontfelhőhöz lehet négyszöghálót létrehozni. Eredményünkről a [20] konferencián számoltunk be.

Görbék és felületek leírása

A legfeljebb n-edfokú trigonometrikus polinomok terében új, úgynevezett ciklikus bázist adtunk meg, mely zárt görbék és felületek (1), illetve (2) alakban való leírását teszi lehetővé úgy, hogy bármely pontban tetszőlegesen sokszor folytonosan differenciálható. A ciklikus görbe (felület) a kontrollpontok ciklikus permutációjával szemben invariáns, a kontrollpontok affin transzformációjára nézve zárt, a görbe (felület) kontrollpontjainak konvex burkában van. Zárt formulát adtunk a fokszámnövelésre ($n \to n+r$, $r \geq 1$), valamint bebizonyítottuk a ciklikus görbe hullámzáscsökkentő (variation diminishing) tulajdonságát [21]. A ciklikus görbékkel (felületekkel) olyan ismert zárt görbéket (felületeket) lehet leírni, mint az ellipszis (kör), epi- és hipociklois, Lissajous-görbe, tóruszcsomó, fóliumok, illetve ciklikus görbék megforgatásával kapott zárt felületek (pl. gömb, tórusz), vagy az egyoldalú

Steiner-féle felület. A ciklikus bázis elméleti érdekessége az, hogy a görbék és felületek kontrollponttal való leírásához szükséges kedvező tulajdonságokkal rendelkezik, ugyanakkor a jelenleg legelterjedtebb bázisokkal szemben nem totálisan pozitív.

Összegzés

A projekt megvalósítása során 21 publikáció született, ebből 13 folyóiratcikk. A folyóiratcikkek közül 7 impakt faktoros folyóiratban - ebből három a szakterület egyik legrangosabb folyóiratában a Computer Aided Geometric Designban - jelent meg, ezek összesített impakt faktora $7,302$.

A projekt négy éve során új kutatói kapcsolatok is kialakultak, ezért több publikációban a szerzők között a projekt résztvevői mellett más társszerők (kínai, magyar, osztrák) is megjelentek. Ezek az együttműködések természetesen segítették a célok megvalósítását.

Eredményeinkről az alább felsorolt publikációkon kívül meghívott előadóként több egyetemen is beszámolhattunk: Ausztriában (Johannes Kepler Universität, Linz), Hollandiában (Delft University of Technology), Horvátországban (University of Split, Technical Univeristy of Zagreb) és Kínában (Zhejiang University, Dianzi University, Forestry University of Lin'an, Univeristy of Shaoxing, Zhejiang University of Technology, Jiaxing University).

Hivatkozások

[1] Hoffmann, M., Juhász I., Symmetric alteration of two knots of B-spline curves, *Journal for Geometry and Graphics*, Vol. 9. (2005), No. 1. pp. 43-49.

[2] Hoffmann, M., Juhász I., A limit theorem for one-parameter alteration of two knots of B-spline curves, *Annales Mathematicae et Informaticae* 32 (2005), pp. 53-60.

[3] Hoffmann, M.: Shape modification of cubic B-spline curves with curvature control, *Konstruktive Geometrie*, Balatonföldvár, 5-9. September 2005. (absztrakt)

[4] Juhász, I., On singularity of parametric curves, *Konstruktive Geometrie*, Balatonföldvár, 5-9. September 2005. (absztrakt)

[5] Juhász, I., Hoffmann, M.: Interpolation by low degree Bézier-curves with different parameter sets, in: Szirmay-Kalos, L., Renner, G. (eds.): *III. Magyar Számítógépes Grafika és Geometria Konferencia*, 163-164, 2005. (absztrakt)

[6] Juhász I., On the singularity of a class of parametric curves, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 23, (2006) No. 2., pp 146-156, (IF=1.208)

[7] Juhász, I., Hoffmann, M., On the family of B-spline surfaces obtained by knot modification, *Mathematical Communications*, Vol. 11 (2006), No. 1, pp. 9-16.

[8] Hoffmann. M, Li, Y., Wang, G., Paths of C-Bézier and C-B-spline curves, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 23, (2006) No. 5., pp 463-475, (IF=1.208)

[9] Hoffmann, M., Juhász, I. Constrained shape control of bicubic B-spline surfaces by knots, in Sarfraz, M., Banissi, E. (eds.) Geometric modelling and Imaging, New trends, Proceedings of *International Conference on Geometric Modelling and Imaging*, GMAI 2006, 5-7 July, 2006 London, UK, IEEE Computer Society, ISBN 13: 9780769526041, ISBN 10: 0769526047, pp. 41-46.

[10] Juhász, I., Hoffmann, M.: Geometric aspects of parametrization of interpolating Bézier curves, in *Algebraic Geometry and Geometric Modeling*, Barcelona, September 4-7, 2006. pp. 69-73.

[11] Juhász, I., Vanishing torsion of parametric curves, *Journal of Zhejiang University (JZUS) SCIENCE A*, Vol. 8 (2007), No. 4, pp.593-595. (IF=0.236)

[12] Juhász, I., Róth, Á., Ruled Bézier surfaces, Szirmay-Kalos, L., Renner, G. (edt), *IV. Magyar Számítógépes Grafika és Geometria Konferencia* kiadványa, ISBN 9789634209317, pp. 53-59., Budapest, 2007. nov. 13-14.

[13] Papp, I., Hoffmann, M., C^2 and G^2 continuous spline curves with shape parameters, *Journal for Geometry and Graphics*, Vol. 11 (2007), pp. 179-185.

[14] Li, Y., Hoffmann, M., Wang, G., On the shape parameter and constrained modification of GB-spline curves, *Annales Mathematicae et Informaticae*, Vol. 34 (2007), pp. 51-59.

[15] Juhász, I., Hoffmann, M., On parametrization of interpolating curves, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 216 (2008), No. 2 pp. 413-424, doi:10.1016/j.cam.2007.05.019, (IF=0.943)

[16] Hoffmann, M., Juhász, I., Modifying the shape of FB-spline curves, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, Vol. 27 (2008), No. 1-2, pp. 257-269, doi:10.1007/s12190-008-0049-0

[17] Juhász, I., Róth, Á., Bézier surfaces with linear isoparametric lines, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 25 (2008), No. 6, pp. 385-396, doi: 10.1016/j.cagd.2007.09.003, (IF=1.382)

[18] Hoffmann, M., Juhász, I., On interpolation by spline curves with shape parameters, in F. Chen, B. Jüttler (Eds.) Advances in Geometric Modeling and Processing, 5th International Conference,GMP 2008, Hangzhou, China, April 23-25, 2008, Proceedings, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 4975., (2008) pp. 205-214., Springer-Verlag, Berlin, ISBN 10 540 79245 7

[19] Juhász, I., Hoffmann, M., On the quartic curve of Han, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 223 (2009) No. 1, pp. 124-132. doi: 10.1016/j.cam.2007.12.026 (IF=0.943)

[20] Róth, Á., Juhász, I., Quadrilateral mesh generation from point clouds by a Monte Carlo method, in Proceedings of International Conferences in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision WSCG'2009, February 2-5, 2009. University of West Bohemia, Plzen, Czech Republic (accepted)

[21] Róth, Á., Juhász, I., Schicho, J., Hoffmann, M., A cyclic basis for closed curve and surface modeling. *Computer Aided Geometric Design*, (accepted) doi:10.1016/j.cagd.2009.02.002. (IF=1.382)