

TARTÓRÁCSOK SZÁMÍTÁSA

1. Bevezetés

A tartórácsok félévszázados irodalma többféle többé-kevésbé pontos, különféle formában közelítő modellek alapján készített számítási eljárást ajánl a gyakorló mérnök részére. Az e tárgykörben készült első magyar nyelvű összefoglaló mű [1] e módszerek közül a jelentősebbek jó részét bemutatja. Megjelenése óta több mint tíz év telt el és néhány tényező indokoltá teszi, hogy a további kutatás témáiról és az elektronikus digitális számoló automaták használata révén időszerűvé vált újabb számítási módszerekről szóljunk.

Fontosnak tartjuk annak kihangsúlyozását, hogy *egyidejűleg* kell foglalkozni a *legegyszerűbb* közelítéseken alapuló, kézi számolásra alkalmas eljárásoknak a kérdésével, és a lehető *legnagyobb pontosságot* nyújtó, de csak gép alkalmazása esetén használható módszerek kifejlesztésével.

A kézi számoláshoz használható közelítő módszerek között pl. hídtartórácsok vizsgálatánál Leonhardt [2] módszere, vagy a Guyon—Massonnet [3], [4] módszer változatlan jelentőséggel bír.

A gépi számolás lehetőségeit szem előtt tartva a pontos módszerek fejlesztése terén hazai viszonylatban [5] jelentett döntő fordulatot a fejlődésben. A javasolt eljárás először csak a merev peremen egyszerűen alátámasztott csavarásmentes tartórács számításával foglalkozott, de szerzője később a módszert csavarásmentes hídtartórácsokra [6], majd a gerendák csavaró ellenállását és végkeresztmetszetük mozgásait is figyelembevevő tartórács modellekre [7] is kidolgozta.

Jelen tanulmányban szerző a [7]-ben ismertetett eljárás speciális feladatokra történő kiterjesztése kérdésével foglalkozik. A vizsgált problémák a tartórácsok számítására szolgáló elektronikus számológépi programok ÉTI-ben folyó kutatómunkája mellett merültek fel. E tanulmány azonban célját és tartalmát tekintve eltér az ÉTI Számítástechnikai Közlemények keretében készülő beszámolótól, amely a peremen egyszerűen alátámasztott, továbbá a négy sarkán megtámasztott négyzetes tartórácsok programjával foglalkozik, figyelembevéve a gerendák csavaró merevségét is.

A tanulmány a mátrixos tárgyalásmódot alkalmazza, mint ezt a témakört tárgyaló több újabb mű (lásd pl. [8] és [9]) is teszi — nem divatból. S bár egyes szerzők tárgyalásmódja [7]-tel erős formai hasonlóságot mutat, ez a hasonlóság nem vonatkozik a javasolt számolási algoritmusra. Ugyanis [7], [8] és [9] csomópontot terhelő erők és mozgások közötti összefüggéseket mátrixok segítségével, lényegében véve azonos módon írják fel. Lényeges különbség van azonban a megoldás tekintetében. A külföldi irodalom a mátrixokat csak az összefüggések felírására használja és a nyert egyenletrendszer konvencionális módszerrel oldja meg. Ezzel szemben [7]-ben (és előzményeiben) a

mátrixegyenleteknek olyan megoldási módszere játszik jelentős szerepet, amely a tárgyalta típusú mátrixegyenleteket egyismeretlenes egyenletek rendszerére bontja és ezáltal minden más eddig ismert módszernél előnyösebben alkalmazható. Az ismeretlenek nem egy oszlopvektorba, hanem a fizikai modellnek megfelelő téglalap mátrixba vannak összefoglalva. Ez két fontos előnyvel is jár. Először is, az említett megoldási módszer az együttható mátrixok sajátvektorainak és sajátértékeinek ismeretében kevesebb műveletet igényel, mint más módszerek (ha a mátrixok rendszáma nagyobb mint három). Másodszor pedig az adatok számológépi tárolása kevesebb rekeszt igényel, ami különösen nagyobb méretű tartórácsok számításánál jelentős tényező.

Meg kell jegyezni azonban, hogy ez a módszer elsősorban speciális — bár a gyakorlatban leggyakrabban előforduló — tartórácsok esetében alkalmazható előnyösen, még ekkor is többnyire iterációval egybeépítve. Ez a tény világosan rámutat arra, hogy a módszer főleg elektronikus számológépek használata mellett előnyös, amikor a program és az előkészítő munka csökkentése döntő jelentőségű.

A módszer alkalmazhatóságára vonatkozó legfontosabb kötöttséget az jelenti, hogy a számítandó tartórács hálózati rajza csak két párhuzamos egyenesseregből állhat. Megjegyzendő azonban, hogy még ezen túlmenő — azaz ezt a megkötést is bizonyos mértékig feloldó — általánosítás, illetve továbbfejlesztés is lehetséges, ennek célszerűsége azonban már vitatható. Konkrét programokkal kapcsolatos vizsgálataink ezideig ezen belül is csak az egy-egy irányban egyenlő osztásközű, derékszögű négyyszög alaprajzú (vagy azzá kiegészíthető) tartórácsokra szorítkoztak.

Jelenleg az a vélemény, hogy az egyenlő osztásközű és merőleges hálózati rajzú tartórácsok számítását a [7] alapján továbbfejlesztett, illetve konkretizált módszerek alapján célszerű elvégezni, míg az ennél általánosabb esetekben más, pl. az ELLIOTT 803 B elektronikus számológép tartórács számítására szolgáló programja használható.

2. A javasolt módszerek alapjának rövid ismertetése

A derékszögű, állandó merevségű gerendákból álló síkbeli tartórácsok egyenletét [7] a következő alakban adja meg¹

$$\mathbf{T}_p - \frac{12 EJ_x}{a^3} \hat{\mathbf{C}}_x \mathbf{W} - \frac{12 EJ_y}{b^3} \mathbf{W} \hat{\mathbf{C}}_y + \frac{6 EJ_x}{a^2} \hat{\mathbf{D}}_x^* \Phi + \frac{6 EJ_y}{b^2} \Psi \hat{\mathbf{D}}_y^* = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{T}_{Mx} + \frac{6 EJ_x}{a^2} \hat{\mathbf{D}}_x \mathbf{W} - \frac{2 EJ_x}{a} \hat{\mathbf{K}}_x \Phi - \frac{GJ_{cy}}{b} \Phi \mathbf{C}_y = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{T}_{My} + \frac{6 EJ_y}{b^2} \mathbf{W} \hat{\mathbf{D}}_y - \frac{2 EJ_y}{b} \Psi \hat{\mathbf{K}}_y - \frac{GJ_{cx}}{a} \mathbf{C}_x \Psi = 0, \quad (3)$$

ahol

- \mathbf{W} a csomópontok lehajlását,
- Φ a csomópontok y tengely körüli elfordulását,
- Ψ a csomópontok x tengely körüli elfordulását megadó mátrixok.

¹ [7] 4. fejezet (4.7) — (4.9) képletei.

E	rugalmassági modulus,
G	nyírási rugalmassági modulus,
J_x	az x tengellyel párhuzamos gerendák keresztmetszetének inercianyomatéka,
J_y	az y tengellyel párhuzamos gerendák keresztmetszetének inercianyomatéka,
J_{cx}	az x tengellyel párhuzamos gerendák keresztmetszetének csavaró inercianyomatéka,
J_{cy}	az y tengellyel párhuzamos gerendák keresztmetszetének csavaró inercianyomatéka,
a	az x tengellyel párhuzamos gerendák osztásköze,
b	az y tengellyel párhuzamos gerendák osztásköze,
C_x, D_x, K_x	konstans mátrixok, melyeknek rendszáma az y tengellyel párhuzamos gerendák számával egyenlő.
C_y, D_y, K_y	konstans mátrixok rendszáma pedig az x tengellyel párhuzamos gerendák számával egyenlő.

A C, D, K mátrixok bal felső és jobb alsó sarokelemei a tartórács megtámasztása szerint változnak (a \wedge jel erre utal).

Elméleti vizsgálat szempontjából a két alapeset (a pereme mentén egyszerűen alátámasztott, illetve a pereme mentén befogott) azonos értékű, számítástechnikai szempontból azonban a peremmenti megtámasztás előnyösebb. Ekkor ugyanis a javasolt megoldási módszer alapját jelentő mátrix sajátértékek és sajátvektorok egyszerűen, a számológép szabta legnagyobb pontossággal, adott trigonometrikus képletek alapján számíthatók. Ezért szerző tudatosan törekedett arra, hogy a különböző megtámasztású tartórácsok számítási modelljét a peremmenti megtámasztás modelljéből származtassa. Ezáltal sikerült a mátrixok sajátértékeinek és sajátvektorainak bonyolult számítását elkerülni.

T_p mátrix a terhelést és a perempontok esetleges mozgását foglalja magában.

T_{Mx} és T_{My} mátrixban szerepel a nem csomópontban működő teher hatása és a perempontok mozgásából a szomszédos csomópontokra ható nyomaték.

Pereme mentén egyszerűen alátámasztott tartórács egyenletrendszerét a következő alakban írhatjuk fel:

$$\frac{6 EJ_x}{a^3} \mathbf{A}_x \mathbf{W} + \frac{6 EJ_y}{b^3} \mathbf{W} \mathbf{A}_y = \mathbf{Q} \quad (4)$$

$$\Phi = \hat{\mathbf{K}}_x^{-1} \left\{ \frac{a}{2 EJ_x} \mathbf{T}_{Mx} + \frac{3}{a} \hat{\mathbf{D}}_x \mathbf{W} - \frac{a}{2b} \frac{GJ_{cy}}{EJ_x} \Phi \mathbf{C}_y \right\} \quad (5)$$

$$\Psi = \left\{ \frac{b}{2 EJ_y} \mathbf{T}_{My} + \frac{3}{b} \mathbf{W} \hat{\mathbf{D}}_y - \frac{b}{2a} \frac{GJ_{cx}}{EJ_y} \mathbf{C}_x \Psi \right\} \hat{\mathbf{K}}_y^{-1}, \quad (6)$$

ahol

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_p + \hat{\mathbf{D}}_x^* \hat{\mathbf{K}}_x^{-1} \left\{ \frac{3}{a} \mathbf{T}_{Mx} - \frac{3GJ_{cy}}{ab} \Phi \mathbf{C}_y \right\} + \left\{ \frac{3}{b} \mathbf{T}_{My} - \frac{3GJ_{cx}}{ab} \mathbf{C}_x \Psi \right\} \hat{\mathbf{K}}_y^{-1} \hat{\mathbf{D}}_y^* \quad (7)$$

A (4)–(7) egyenletrendszer csak kivételesen (pl. a pereme mentén egyszerűen alátámasztott, csavarásmentes tartórács esetén) oldható meg közvetlenül. Általában a következő iterációs eljárást javasoljuk. Legyen $\mathbf{W}^{(k)}, \Phi^{(k)}, \Psi^{(k)}, \mathbf{T}_{Mx}^{(k)}, \mathbf{T}_{My}^{(k)}, \mathbf{T}_p^{(k)}$ és $\mathbf{Q}^{(k)}$ a számítás során nyert k -edik közelítés, akkor a következő javított mátrixokat az alábbi módon számítjuk:

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \mathbf{W}^{(k+1)} &= \mathbf{U}_x \{ \mathbf{M} \wedge (\mathbf{V}_x \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{U}_y) \} \mathbf{V}_y^2 \\ \Phi^{(k+1)} &= \hat{\mathbf{K}}_x^{-1} \left\{ \frac{a}{2 EJ_x} \mathbf{T}_{Mx}^{(k)} + \frac{3}{a} \hat{\mathbf{D}}_x \mathbf{W}^{(k+1)} - \frac{aGJ_{cy}}{2 bEJ_x} \Phi^{(k)} \mathbf{C}_y \right\} \\ \Psi^{(k+1)} &= \left\{ \frac{b}{2 EJ_y} \mathbf{T}_{My}^{(k)} + \frac{3}{b} \mathbf{W}^{(k+1)} \hat{\mathbf{D}}_y - \frac{bGJ_{cx}}{2 aEJ_y} \mathbf{C}_x \Psi^{(k)} \right\} \hat{\mathbf{K}}_y^{-1} \\ \mathbf{T}_p^{(k+1)}, \mathbf{T}_{Mx}^{(k+1)} \text{ és } \mathbf{T}_{My}^{(k+1)} &\text{ számítása a feladat jellegétől és az alkalmazott modelltől függ.} \\ &\text{Ennek tárgyalására visszatérünk.} \\ \mathbf{Q}^{(k+1)} &= \mathbf{T}_p^{(k+1)} + \hat{\mathbf{D}}_x^* \hat{\mathbf{K}}_x^{-1} \left\{ \frac{3}{a} \mathbf{T}_{Mx}^{(k+1)} - \frac{3GJ_{cy}}{ab} \Phi^{(k+1)} \mathbf{C}_y \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{3}{b} \mathbf{T}_{My}^{(k+1)} - \frac{3GJ_{cx}}{ab} \mathbf{C}_x \Psi^{(k+1)} \right\} \hat{\mathbf{K}}_y^{-1} \hat{\mathbf{D}}_y^* \end{aligned} \right\} \text{I.}$$

Induláskor $\mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{P}$, $\Phi^{(0)} = 0$ és $\Psi^{(0)} = 0$

3. Pontonkénti alátámasztás

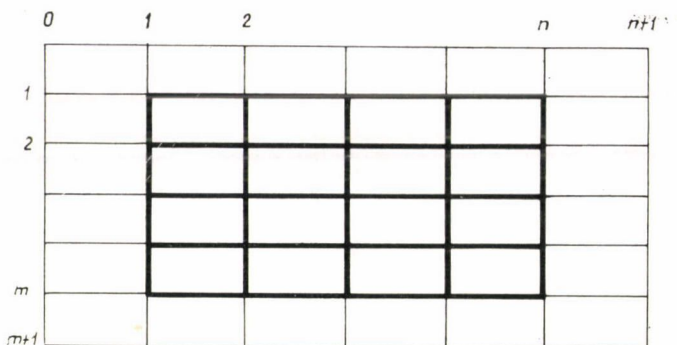
Pontonkénti megtámasztás tisztán is, de egy, esetleg több perem mentén történő alátámasztással vagy befogással együtt is előfordulhat. Az elv más típusok alapjaként is felhasználható.

Állandó merevségű gerendákból álló, derékszögű négyszög alaprajzú tartórács számítása esetén az adott merevségű és osztásköz hosszúságú szakaszokkal kiegészített és képzelt peremre egyszerűen támasztott modellt alkalmazhatjuk (1. ábra), amikor is a fiktív perem pontjainak magasságát úgy határozzuk meg, hogy a kiegészítésként felvett szakaszokban sem nyomaték, sem pedig nyíróerő ne keletkezzen. Már most megjegyezzük azonban, hogy a változó merevségű tartórácsként való kezelés ugyanígy vezet eredményre, sőt az utóbbi módon akkor is eljárhatunk, ha a gerendák nem adnak derékszögű négyszöget teljesen kitöltő hálózatot, de a rács képzelt rudakkal ilyenre kiegészíthető (2. ábra).

Nem egy egyenesbe eső három ponton történő megtámasztás esetén a reakciók ismertek.³ A képzelt rudakkal kiegészített, pereme mentén támasz-

² Lásd [7] 2. fejezetében.

³ Megfelelő szimmetria esetén négy vagy több reakcióerő is közvetlenül számítható.



1. ábra



2. ábra

tott tartórácsot a külső terhelésből és a reakciókból álló, egyensúlyban levő erőrendszer (\mathbf{P}) támadja. Peremmenti egyszerű alátámasztás esetén, ha a terhek a csomópontokon hatnak, akkor

$$\mathbf{T}_p = \mathbf{P} + \frac{3 EJ_y}{b^3} (\mathbf{W}_{x1} + \mathbf{W}_{xn}) + \frac{3 EJ_x}{a^3} (\mathbf{W}_{1y} + \mathbf{W}_{my}) \quad (8)$$

$$\mathbf{T}_{Mx} = - \frac{3 EJ_x}{a^2} (\mathbf{W}_{1y} - \mathbf{W}_{my}) \quad (9)$$

$$\mathbf{T}_{My} = - \frac{3 EJ_y}{b^2} (\mathbf{W}_{x1} - \mathbf{W}_{xn}), \quad (10)$$

ahol

\mathbf{W}_{x1} az y tengellyel párhuzamos, 0 indexszel jelölhető perempontok függőleges elmozdulásának a mátrixa.

\mathbf{W}_{xn} az y tengellyel párhuzamos, $n + 1$ indexszel jelölhető perempontok mozgását megadó mátrix.

Hasonlóan értelmezendő \mathbf{W}_{1y} és \mathbf{W}_{my} .

Indulásnál $\mathbf{W}_{x1} = \mathbf{W}_{xn} = 0$ és $\mathbf{W}_{1y} = \mathbf{W}_{my} = 0$. Azt a feltételt pedig, hogy a kiegészítésként felvett szakaszokban ne ébredjen nyomaték, az iterációba

beépített korrekciókkal lehet kielégíteni. Ennek megfelelően pl. $\mathbf{W}_{1y}^{(k)}$ mátrixot a következőképpen vesszük fel:

$$\mathbf{W}_{1y}^{(k)} = \mathbf{e}_1 (\mathbf{w}_1^{(k)} - a \varphi_1^{(k)})^* \quad (11)$$

ahol

$\mathbf{w}_1^{(k)}$ a $\mathbf{W}^{(k)}$, $\varphi_1^{(k)}$ pedig $\Phi^{(k)}$ mátrix első sora.

$\mathbf{W}_{x1}^{(k)}$, $\mathbf{W}_{xn}^{(k)}$, $\mathbf{W}_{1y}^{(k)}$ és $\mathbf{W}_{my}^{(k)}$ meghatározása után I-ben

$\mathbf{T}_p^{(k)}$, $\mathbf{T}_{Mx}^{(k)}$ és $\mathbf{T}_{My}^{(k)}$ mátrixokat (8)–(10) alapján számítjuk.

Miután \mathbf{W} , Φ és Ψ mátrixokat kellő pontossággal meghatároztuk, kiszámítjuk a nyomatékok és nyíróerők értékét.

A lehajlási értékek \mathbf{W} mátrixában a támasztási pontok lehajlása sem lesz zérus, ami az alkalmazott modell jellegéből következik. Annak érdekében, hogy a lehajlások értékét a támasztási pontokon átfektetett síktól mérhessük, megfelelő korrekciót hajtunk végre. Legyen a három támaszpont A , B , és C , ezek számított lehajlása w_A , w_B és w_C . Ez a három pont meghatároz egy síkot, melynek felírjuk az egyenletét $w = f(x, y)$ alakban. A valódi lehajlásokat most már úgy kapjuk, hogy a számított \mathbf{W} mátrix minden eleméből levonjuk a $w = f(x, y)$ függvény megfelelő értékét.

Ha a tartórács m ponton van támasztva ($m > 3$), akkor kiválasztunk három nem egy egyenesbe eső pontot és e három támasz megtartása mellett számítjuk a terhelés okozta lehajlásokat és nyomatékokat. Ezt követően keressük azt az $m-3$ támaszerőt, melynek hatására minden támaszpont lehajlása zérus lesz.

Az $m-3$ támasznak megfelelő csomópontok lehajlását foglaljuk a \mathbf{b} mátrixba, amikor is az az adott terhelés és a kiválasztott három támasz mellett jött létre. Ezt követően az 1, 2, . . . $m-3$ támasznak megfelelő csomópontokon külön működtessünk egységnyi nagyságú erőt. Az i -edik támasznak megfelelő egységerő hatására keletkező lehajlásokat ($m-3$ pont lehajlásáról van szó) foglaljuk az \mathbf{f}_i mátrixba, majd ezekből képezzük az \mathbf{F} mátrixot a következőképpen:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_{m-3}]$$

Az ismeretlen támaszerőket az $\mathbf{x} = [X_1 X_2 \dots X_{m-3}]$

mátrixba foglalva, azok a következő mátrix egyenletből számolhatók:

$$\mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{b} = 0$$

Ezek ismeretében a három kiválasztott támasz reakciója, a tartórács csomópontjainak a lehajlása, illetve az egyes gerendákban ébredő nyomatékok és nyíróerők könnyen számíthatók.

A számítás túlnyomó részét az \mathbf{F} és \mathbf{b} mátrixok meghatározása képezi. Ez a modellként felvett tartórácsnak $m-2$ -szeri — azonos program alapján történő — végigszámolását jelenti. Az egyetlen változás a teherben jelentkezik.

4. Változó merevségű gerendák

A tartórács hálózatára tett megkötések fenntartása mellett, a gerendák állandó merevségére vonatkozó kötöttség feloldható anélkül, hogy a rács számítására készített programon lényeges változtatást kellene eszközölni. A szá-

mítást változatlanul a (4)–(7) képletek, illetve az I. számítási séma alapján végezzük. Megadjuk azokat az EJ_x , EJ_y , GJ_{cx} és GJ_{cy} merevségeket, melyekkel a számolás során, mint állandó értékekkel dolgozunk és megadjuk az egyes rúdszakaszok ettől való eltérését. Az eltérések hatását a \mathbf{T}_p , \mathbf{T}_{Mx} , \mathbf{T}_{My} mátrixokban vesszük figyelembe.

A csomópontok egyensúlyi egyenleteiben a merevségi értékeket megnöveljük (vagy lecsökkentjük) az alapértékekre, hogy a (4)–(7) egyenletek változatlan alakúak maradjanak, majd az így bevitt változtatást ellenkező előjellel is vesszük, amit a különböző egyensúlyi egyenletekben T_p , T_{Mx} , illetve T_{My} értékeivel vonunk össze. A megoldásban tehát egyedül \mathbf{T}_p , \mathbf{T}_{Mx} , \mathbf{T}_{My} számítása változik.

A hatások azonban, melyeket korrekcióként a \mathbf{T}_p , \mathbf{T}_{My} és \mathbf{T}_{Mx} mátrixokba beviszünk, nemcsak a rudak merevségétől, hanem \mathbf{W} , Φ és Ψ mátrixoktól is függenek. Ezek helyett számított közelítő értékeiket vesszük.

Vizsgáljuk meg például az azonos merevségű gerendákból álló, négy sarokpontján támasztott négyzetes tartórácsot. Tétélezzük fel, hogy az erők egyenlő nagyok és a csomópontokon támadnak. Ilyen feltétel mellett a támaszerők ismertek és azokat mint aktív erőket vesszük számításba. Egészítsük ki ezt a tartórácsot a teljes kerületén az osztásközével egyenlő hosszúságú és zérus merevségű szakaszokkal, amelyek a terheletlen tartórács síkjában levő képzelt peremre támaszkodnak. Mivel ekkor $\Psi = \Phi^*$ a mátrix-egyenletek száma csökken és a szimmetria miatt elegendő, ha a tartórácsnak csak a negyedét vonjuk be a számításba, amikor $\nu = \left[\frac{n+1}{2} \right]$ -ed rendű ($[X]$ az x szám egész részét jelenti, n pedig a párhuzamos gerendák száma) kvadratikus mátrixokkal dolgozhatunk. Az iterációval megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}^* &= \frac{a^3}{6EJ} \mathbf{P} + \frac{1}{2} (\mathbf{E} - 3\mathbf{F}\mathbf{K}^{-1}) \mathbf{e}_1 (\mathbf{w}_1 - a\varphi_1)^* + \\ &+ \frac{1}{2} [(\mathbf{E} - 3\mathbf{F}\mathbf{K}^{-1}) \mathbf{e}_1 (\mathbf{w}_1 - a\varphi_1)^*]^* - \frac{aGJ_c}{2EJ} \left\{ \mathbf{F}\mathbf{K}^{-1} [\Phi\mathbf{G} - \varphi_1 \mathbf{e}_1^*] + \right. \\ &\left. + [\mathbf{F}\mathbf{K}^{-1} (\Phi\mathbf{G} - \varphi_1 \mathbf{e}_1^*)]^* \right\} \\ \Phi &= \frac{3}{a} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{D}\mathbf{W} - \frac{3}{2a} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{e}_1 (\mathbf{w}_1 - a\varphi_1)^* - \frac{GJ_c}{2EJ} \mathbf{K}^{-1} (\Phi\mathbf{G} - \varphi_1 \mathbf{e}_1^*), \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{A} = 2\mathbf{C} - 3\mathbf{F}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{D}$, a szereplő mátrixok pedig:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 - 0,75 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_{n-\nu}^*$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 - 0,5 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_{n-\nu}^*$$

$$\mathbf{F} = -\mathbf{D}_0 - 0,5 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_{n-\nu}^*$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}_0 - \mathbf{e}_{n-\nu} \mathbf{e}_\nu^*$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - 0,5 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_{n-\nu}^*$$

és

$$\mathbf{E} = [\delta_{j,k}]; \quad \mathbf{C}_0 = [-\delta_{j,k-1} + 2\delta_{j,k} - \delta_{j,k+1}];$$
$$\mathbf{D}_0 = [\delta_{j,k-1} - \delta_{j,k+1}]; \quad \mathbf{K}_0 = 6\mathbf{E} - \mathbf{C}_0.$$

Teljes egyezésben azzal az iterációs megoldásban szereplő egyenletrendszerrel, melyet akkor nyerünk, ha a tartórácsot a gerendákkal azonos merevségű szakaszokkal egészítjük ki és a gerendavégek magassági helyzetét változtatjuk (az előző fejezetben ismertetett módon) úgy, hogy a szélső (valóságban nem is létező) szakaszokban ne ébredjen nyomaték.

Az ismertetett két esetben, mint sok más tartórács típusnál is, iterációt alkalmazunk. A gépi iterációból történő kilépést célszerű a kontroll szerepét is játszó művelettel előírni.

Az I-ben összefoglalt számítások elvégzése után megnézzük, hogy az $\mathbf{AW} + \mathbf{WA}^* - \mathbf{Q} = \mathbf{R}$ mátrix elemei előírtan kicsinyek-e. Amennyiben ezek mindegyike eleget tesz az előírt feltételeknek, akkor a számítást befejezzük, ellenkező esetben az I-ben foglalt számításokat mindaddig ismételjük, míg csak az \mathbf{R} mátrixra előírt feltételek nem teljesülnek. Ez a vizsgálat az előírt pontosság biztosítása mellett a számítással kapcsolatos ellenőrzést is magában foglalja.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] *Palotás L.*: Tartórácsok számítása. (Közlekedési Kiadó Budapest, 1953.)
- [2] *Leonhardt F.*: Anleitung für die vereinfachte Trägerrostberechnung. (Verlag W. Ernst u. Sohn, Berlin, 1940.)
- [3] *Guyon M. Y.*: Calcul des ponts larges à poutres multiples solidarisées par des entretoises. (Annales des Ponts et Chaussées, S. 553, 1946.)
- [4] *Massonnet Ch.*: Contribution au calcul des ponts à poutres multiples. (Annales des Travaux Publics de Belgique, S. 378, 749, 927, 1950.)
- [5] *Szabó J.*: Tartórácsok számítása a mátrix-elmélet segítségével. (Mélyépítéstudományi Szemle, 6. 210. old. 1956.)
- [6] *Szabó J.*: Die Berechnung von Brückenträgerrosten. (Der Stahlbau, 27. S. 141, 1958.)
- [7] *Szabó J.*: A térbeli tartórács egyenlete. (Építéstudományi Intézet Tudományos Közlemények, 34. Budapest, 1964.)
- [8] *Hall A. S.—Woodhead R. W.*: Frame analysis. (John Wiley and Sons, Inc, New-York, and London, 1961.)
- [9] *Livesley R. K.*: Matrix Methods of Structural Analysis. (The Macmillan Company, New-York, 1964.)