KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXI. ÉVF., 2014. NOVEMBER (1245–1278. o.)

ZALAI ERNŐ

Neumann versus Leontief
Két modell – két gazdaságkép

A szerző a tisztán elméleti célokra kifejlesztett Neumann-modellt és a gyakorlati alkalmazások céljára kifejlesztett Leontief-modellt veti össze. A Neumann-modell és a Leontief-modell éves termelési periódust feltételező, zárt, stacionárius változatának hasonló matematikai struktúrája azt a feltételezést sugallja, hogy az utóbbi a Neumann-modell sajátos eseteként értelmezhető. Az egyes modellek közgazdasági tartalmát és feltevéseit részletesen kibontva és egymással összevetve a szerző megmutatja, hogy a fenti következtetés félrevezető, két merőben különböző modellről van szó, nem lehet az egyikből a másikat levezetni. Az ikertermelés és technológiai választék lehetősége a Neumann-modell elengedhetetlen feltevése, az éves termelési periódus feltevése pedig kizárja folyam jellegű kibocsátások explicit figyelembevételét. Mindezek feltevések ugyanakkor idegenek a Leontief-modelltől. A két modell valójában egy általánosabb állomány–folyam jellegű zárt, stacionárius modell sajátos esete, méghozzá azok folyamváltozókra redukált alakja.
Journal of Economic Literature (JEL) kód: B16, B23, B41, C67, O41.

E tanulmány témáját exponáló induló feladvány a következőképpen hangzik: „Neumann-modell Leontief-technológiával. Nos, mi az?" A matematikai közgazdászok mintegy 85 százaléka habozás nélkül rávágná: egyéves termelési periódust feltételező, zárt, stacionárius Leontief-modell. 10 százaléka, némi habozás után és kissé bizonytalanul, ugyanezt mondaná. A fennmaradó 5 százalék pedig minden röstelkedés nélkül megkérdezné: mondd csak, mi is az a Neumann-modell?

A jelen tanulmányban arról kívánjuk meggyőzni az olvasót, hogy a fenti talányos kérdésre adandó helyes válasz: Fából vaskarika! Sem nem Neumann-modell, sem nem Leontief-modell, egy közgazdasági modell torzója, eredeti közgazdasági tartalmától megfosztott matematikai struktúra, egy Neumann-jellegű (*kvázi* Neumann-) modell. Ezt a többek számára bizonyára sarkos választ fogjuk több oldalról megindokolni a következőkben. Meg fogjuk mutatni, hogy a tagadhatatlanul meglévő matematikai hasonlóságok ellenére a zárt, stacionárius Leontief-modellt nem lehet az eredeti Neumann-modell egyszerűbb változatának tekinteni. Különösen nem lehet az ágazati kapcsolatok mérlegének (ÁKM) elemzésére kidolgozott Leontief-modellnek tekinteni. Matematikai hasonlóságaik

---

Zalai Ernő akadémikus, a Budapesti Corvinus Egyetem emeritus professzora.

eltakarják Neumann és Leontief eredeti modelljét, azok genezisét csak felületesen ismerők szeme elől a közgazdasági hátterükben meghúzódó, egymással szembenálló jellemzőiket és feltevéseiket, a két modell között meglevő, nehezen áthidalható szakadékot.

Táblázatos formában előrebocsátjuk az erről tanúskodó legfontosabb közgazdasági és matematikai különbségek listáját, amelyeket részletesen ki fogunk bontani.

1. táblázat
A Neumann- és a Leontief-modell jellemzői

Jellemző	Neumann-modell	Leontief-modell
Indíttatás	absztrakt elmélet	empirikus alkalmazás
Szemlélet	*ex ante*	*ex post*
Megfigyelés szintje	mikroökonómiai	makroökonómiai
Ábrázolt javak	termékek	termékek és szolgáltatások
Ábrázolt mutatószámok	jellemzően készletek	jellemzően folyamok
Technológiai választék	van	nincs
Ikertermelés lehetősége	van	nincs
Helyettesítési lehetőségek	vannak	nincsenek
Munkaerő és fogyasztása	csak a fogyasztása implicite	önállóan megjelenik
Tőkejavak (állóeszközök)	egyedi termékek	kompozit javak
Beruházási tevékenységek	készletfelhalmozás	sajátos elszámolás
Amortizáció	endogén (értékcsökkenés)	exogén (pótlási igény)
Időszakokra bontás alapja	termelési periódus	beruházások beérése
Időbeli kapcsolatok	intertemporális	intratemporális
Termelési periódus	egységesen egy időszak	tetszőleges
Forgalmi periódus	pillanatnyi	tetszőleges
Tőkemegtérülési idő	egy időszak	tetszőleges
Matematikai forma	komplementaritási feladat	egyenletrendszer
A megoldás unicitása	csak egyes összetevői	jellemzően elvárt

Először a Neumann-modellt elevenítjük fel, rámutatva az *1. táblázatban* felsorolt jellemzőinek, illetve kritikus feltevéseinek szerepére, elhagyásuk következményeire és a modell folyamformákba *(flow form)* öltöztetett állományszemléletére *(stock form)*. Meg fogjuk mutatni, hogy a Leontief-technológia feltételezése olyan fontos és elengedhetetlen jellemzőitől fosztja meg a modellt, amely teljesen elidegeníti Neumann eredeti feltevéseitől, s ezért az így kapott modell már nem tekinthető Neumann-modellnek, legfeljebb csak egy hasonló matematikai formájú kvázi *Neumann-modellnek*. Ráadásul még az utóbbi és a zárt, stacionárius Leontief-modell matematikai alakja is csak akkor adnak azonos megoldást, ha megőrizzük Neumann eredeti modelljének még a gazdaság irreducibilitására vonatkozó feltevését is.

De vajon tekinthető-e a szóban forgó modelltorzó Leontief-modellnek, és milyen feltevések mellett? Ehhez először is egyfajta elmélettörténeti rekonstrukció révén felidézzük Leontief első – az amerikai gazdaság ágazati kibocsátások és felhasználások statisztikai táblázatának elemzésére kidolgozott – statikus, zárt input-output modelljét. Ennek segítségével górcső alá vesszük a gyakorlati alkalmazások céljaira kidolgozott input-output modellek legfontosabb jellemzőit. Leontief korai modelljeiben nincsenek intertemporális kapcsolatok, nincs benne semmi utalás a tőkelekötést megtestesítő forgó- vagy állóeszközök készleteire, azok beruházásokkal összefüggő időbeli változására. Modellje egy tisztán folyam jellegű *(flow)* mutatószámokra épülő statikus, bizonyos értelemben az időleges *(temporary)* egyensúly feltevésén nyugvó stacionárius modell. Megpróbáljuk a Neumann által követett módon dinamizálni Leontief modelljét, elfogadva mindenekelőtt az egy termelési periódus feltevését. Megmutatjuk, és részletesen elemezzük az okait, hogy ezen az úton elindulva sem igazolható a kiinduló hipotézis: a Neumann-modell sajátos esetének tekinthető input-output modellhez jutunk ily módon.

A negatív kísérletek ellenőrzéséhez a következőkben egy szokásos, tetszőleges hosszúságú termelési periódust megengedő – de helyette egy tőkebővítési periódust feltételező – dinamikus Leontief-modellből kiindulva vizsgáljuk meg újra a feltett kérdést. Megnézzük, hogy ennek az egy termelési periódusos határesete Neumann-modellhez vezethet-e, s ha igen, akkor milyen feltételek teljesülése esetén. Ezen az úton sem tudjuk igazolni, hogy a Neumann-modell Leontief-technológiára épülő matematikai esetét egy zárt, stacionárius Leontief-modellként lehetne értelmezni. Az alapvető akadályt a két modell folyam- és állományszemlélete közötti különbség, a tőkeszolgáltatások eltérő kezelése és a nem készletezhető kibocsátással rendelkező szolgáltatások okozzák. A Neumann-modell alapvetően a készletállományok, tőkejavak időbeli felhalmozását követi nyomon, a figyelembe vett termékek között nem szerepelhetnek szolgáltatások, amelyek termelése és felhasználása időben egybeesik. Ez a Neumann-modell egy olyan általánosításának igényére irányítja a figyelmet, amely lehetővé teszi a szolgáltatás jellegű kibocsátások figyelembevételét is.

A két modell között közvetlen kapcsolatot, egyenes ági rokonságot tehát semelyik úton sem lehet igazolni. Megmutatjuk azonban, hogy a közvetett kapcsolat megteremthető, ha átalakítjuk a dinamikus Leontief-modellt, ha kibocsátásként bevezetjük a modellbe a kompozit ágazati állóeszközöket, elválasztva egymástól az álló- és forgóeszközöket. A Leontief-modell összefüggéseinek ilyen átírásával egy vegyes, részben folyam-, részben állományszemléletű általánosított Neumann-modellhez jutunk, amelynek mind a Leontief-, mind a Neumann-féle stacionárius növekedési modell sajátos esete lesz. Ebben az általánosított, úgynevezett Leontief–Neumann-modellben a kibocsátási együtthatók mátrixa nettó szemléletű, az egyes tevékenységeknek a különböző javak időszak végi záró készleteihez, azaz a következő időszak nyitó készleteihez való való hozzájárulását mutatja, amely egyaránt lehet pozitív és negatív.

Neumann modelljének közgazdasági és matematikai jellemzői

Neumann [1937/1965] modellje egy kristálytiszta, absztrakt elméleti modell. Dolgozata nagyon keveset fed fel modellje közgazdaságtani háttere tekintetében (bővebben erről *Zalai* [1999]). Az viszont elég nyilvánvaló, hogy a matematikai inspirációt az adta számára, hogy egy nagyon hasonló modell és az egyensúly létezésének bizonyításában alkalmazott fixpont-tétel már korábban bevált nála a kétszemélyes nullaösszegű játékok elemzésében, s ehhez talált egy lehetséges közgazdasági interpretációt. Ezt tükrözi dolgozatának eredeti német címe is, amelyben a Brouwer-féle fixpont-tétel általánosítása is megjelenik. (Ne feledjük el, hogy a hilberti program szellemében, amelynek akkoriban Neumann még az egyik követője volt, a minél szélesebb körű interpretációs lehetőség csak növeli egy matematikai „metamodell” értékét!)

Neumann gondosan kerülte még a látszatát is annak, hogy modelljét olyannak tekintse, amely számszerűsíthető, és gyakorlati elemzésre alkalmas lenne. A tiszta árutermelő, árak által vezérelt gazdaság néhány kiemelt jelenségére összpontosította a figyelmet, jelesen az árutermelés körkörösségére (Sraffa frappáns fogalmazásával: „áruk termelése áruk révén”), illetve a technológiák közötti választás és az egyensúlyi árrendszer kiválasztása közötti „figyelemre méltó dualitás” jelenségére. Ezek a mozzanatok pedig, túl a modell absztrakt voltán, a modell *ex ante* jellegére hívják fel a figyelmet, amin azt értjük, hogy az ábrázolt folyamatok nem gyakorlati megfigyelésekből leszűrt adottságok, nem egy megvalósult egyensúly összetevői, hanem olyan elvi, *a priori* lehetőségek, amelyekből az alkalmazott tevékenységek és az árak kiválasztódnak.

Neumann [1937/1965] – „hogy további bonyodalmak elejét vegyük”, illetve „hogy teljesen szabadon tárgyalhassuk, idealizálni fogjuk a helyzet többi elemét” (160–162. o.) – felteszi a következőket.

a) A termelés természeti tényezői – köztük a munkaerő – a felhalmozott tőkéhez, azaz a termelt erőforrásokhoz képest korlátlan mértékben bővíthetők, modelljében ezért csak a „művi”, azaz a termelt erőforrások jelennek meg. A természeti erőforrásoknak mint termelési tényezőknek, a munkaerőt kivéve, nincs is költségvonzatuk.

b) A termelést (a termelési eljárásokat) állandó volumenhozadék jellemzi; véges számú (m), additív, konstans kibocsátási és ráfordítási együtthatókkal adott eljárás közül lehet választani, amelyek száma jellemzően meghaladja a termékek számát (n), vagyis $m > n$.

c) Ugyanaz a termék több eljárással is előállítható *(technikai választék)*, és vannak eljárások, amelyek egyidejűleg több terméket állítanak elő *(ikertermelés).* Valójában, mint látni fogjuk, minden állóeszközt felhasználó folyamat ikertermelő lesz.

d) A ráfordítások nemcsak a termelőfogyasztást tartalmazzák, hanem a felhasznált munkaerő (munkások, alkalmazottak) *szükséges fogyasztását* is.

e) A szükséges fogyasztáson felül minden jövedelmet megtakarítanak, és visszaforgatnak a termelésbe.

f) Minden eljárás időtartama egy időszak *(egy termelési periódus),* és a kibocsátások az időszakforduló pillanatában cserélnek gazdát *(időszakonként egyetlen piac, nullaidejű forgalmi periódus).*

g) A ráfordításokat tehát a teljes időszakra meg kell előlegezni *(egyperiódusú tőkemegtérülés).*

Bármennyire is elvont elméleti modellről van szó, nem árt továbbgondolni a fenti feltevések következményeit. Figyeljünk fel például arra, hogy a termelési folyamatok egyperiódusú hosszának feltevése valójában helyettesíthető lenne az időszakonként egyetlen cserealkalom (piac) feltevésével! Neumann pedig maga is jelzi, hogy az egyperiódusú termelési folyamatok feltevése azzal jár, hogy azokat az eljárásokat, amelyek ennél hosszabb időt igényelnek, megfelelő *félkész termékek* és azokra épülő eljárások bevezetésével időszakokra kell bontani.

Különösen figyelemre méltó, ahogyan Neumann a több időszakon keresztül használható, fokozatosan elavuló *állóeszközöket* kezeli. Az elavulás mértéke (kora) szerint megkülönbözteti mind az állóeszközfajtákat, mind az adott állóeszköz eltérő korú változatait igénylő eljárásokat. Ezáltal modelljében az állóeszközök ugyanúgy viselkednek, mint a forgóeszközök: egy időszak alatt mindegyikük teljesen „elhasználódik". Az ilyen ábrázolási mód, szemben a szokásos amortizációs rátákon alapuló megközelítéssel, lehetővé teszi, hogy megkülönböztessük egymástól az állóeszközök fizikai és gazdasági élettartamát, és ami még fontosabb, elméletileg kielégítő módon elemezzük az állóeszközök *fizikai* és *erkölcsi* (gazdasági) *elavulását* és az utóbbit visszatükröző *értékcsökkenést*.

Amiről Neumann-nál ugyan nincs szó, de a fenti feltevések miatt *csak készletezhető javak* szerepelhetnek a termékek között. Egy adott időszak kibocsátásai ugyanis csak a következő időszakban használhatók fel. A kibocsátások tehát a következő időszakban felhasználható javak készletei formájában jelennek meg. *Szolgáltató tevékenységek*, amelyek kibocsátásai nem tárolhatók (termelésük és felhasználásuk egybeesik), emiatt nem szerepelhetnek explicit módon a modellben. Mindez egyrészt *állományszemléletet* kölcsönöz a modellnek, másrészt azt jelenti, hogy a szolgáltatások csak ráfordításaikon keresztül jeleníthetők meg a modellben (erre mutat példát Neumann a munkaerő-szolgáltatás esetében, amelyet csak az újratermelését biztosító fogyasztás képvisel modelljében). Végezetül nyilvánvaló, hogy Neumann modelljének szemlélete jellegét tekintve *mikroökonómiai*, ugyanis makroökonómiai aggregátumok helyett olyan (homogén) termékeket feltételez, amelyek mennyisége természetes mértékegységben adott.

A fenti feltevések alapján Neumann egy olyan gazdaságot vizsgált, amelyben nincs műszaki haladás, nem változnak a fogyasztási szokások, és mindezek következtében az egyszer kialakult *egyensúlyi termelési szerkezet és árarányok* időben változatlannak feltételezhetők. Vagyis feltehető, hogy egyensúly esetén a termékek kibocsátása és felhasználása az egyik időszakról a másikra azonos ($\alpha > 0$) arányban változik: egyenletesen nő, stagnál vagy csökken, attól függően, hogy α nagyobb, egyenlő vagy kisebb egynél. Az utóbbi kettő inkább csak elvi lehetőség. Modellje értelmezése során ugyanis Neumann implicite mindig növekedést feltételez. Ezért α-t egyensúlyi *növekedési tényezőnek* szokás nevezni, az $\alpha - 1$ növekedési *ütemet* pedig ρ-val fogjuk jelölni, ahol tehát $\alpha = 1 + \rho$.

Az *egyensúlyi árak* változásának sincs oka a fenti feltevések esetén, feltehetjük tehát, hogy – a mindenkori jelen időre vonatkozó – *névleges értékeik* ($\mathbf{p}$)

ugyanakkorák. Az egyensúlyi árrendszer részét képezi az *egyensúlyi kamattényező* ($\beta > 0$) is, amellyel a különböző időszakok árait közös *jelenértékre* (azonos időszaki értékre) lehet *diszkontálni*. Így például az i-edik termék $(t + 1)$-edik időszaki p_i értéke a t-edik időszakra visszaszámítva βp_i lesz. Az egyensúlyi kamatrátát π-vel fogjuk jelölni, ahol tehát $\beta = 1 + \pi$.

Neumann modelljének ráfordítási együtthatóit $\mathbf{\hat{A}} = (\hat{a}_{ij})$ nemnegatív mátrixszal jelöljük. A tetős ékezettel, amit Neumann nem használt, azt hangsúlyozzuk, hogy az egyes eljárásokban alkalmazott munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztást is tartalmazó, úgynevezett *teljes körű* ráfordítási együtthatókról van szó. A kibocsátási együtthatókat $\mathbf{K} = (k_{ij})$ mátrixszal fogjuk jelölni, amelyek Neumann feltevése szerint ugyancsak nemnegatívak. Neumann – és Neumann nyomán az idevágó irodalom – **B**-vel jelöli a kibocsátási együtthatók mátrixát, amit a Leontief-féle dinamikus input-output modellekben a beruházási együtthatók mátrixának jelölésére szokás használni. Az utóbbinak előnyt adva, használunk **B** helyett **K** szimbólumot a Neumann-modell esetében.

Az egymással két időszakot összekötő, *intertemporális termékmérlegek* írják le az egyensúly naturális *feltételeit* (nem lehet felhasználni többet az előző időszak kibocsátásánál), amelyek az (1) alakot öltik:

$$k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + \ldots + k_{im}x_m \geqq \alpha(\hat{a}_{i1}x_1 + \hat{a}_{i2}x_2 + \ldots + \hat{a}_{im}x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

mátrixalgebrai jelölésekkel:

$$\mathbf{Kx} \geqq \alpha\mathbf{\hat{A}x}, \tag{1a}$$

ahol a legalább félig pozitív $\mathbf{x}$ ($\geq \mathbf{0}$) vektor elemei az egyes eljárások alkalmazási szintjét jelölik az adott, mondjuk t-edik időszakban, $\alpha\mathbf{x}$ elemei pedig ugyanezt mutatják a következő, $(t + 1)$-edik időszakban.

Az *egyensúlyi árrendszer* feltételeit pedig (2) alakban adhatjuk meg:

$$p_1k_{1j} + p_2k_{2j} + \ldots + p_nk_{nj} \leqq \beta(p_1\hat{a}_{1j} + p_2\hat{a}_{2j} + \ldots + p_n\hat{a}_{nj}), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

mátrixalgebrai jelölésekkel:

$$\mathbf{pK} \leqq \beta\mathbf{p\hat{A}}, \tag{2a}$$

ahol a szintén legalább félig pozitív $\mathbf{p}$ ($\geq \mathbf{0}$) vektor elemei az egyes termékek egy adott, mondjuk t-edik időszakbeli árait jelölik, $\beta\mathbf{p}$ elemei pedig a következő, $(t + 1)$-edik időszak ugyanakkora árainak a t-edik időszakra diszkontált értékeit. Az egyes eljárások egyensúlyi árakon vett bevétele tehát nem haladhatja meg ezen árakon számolt, de kamatot is felszámító költségeit. Ez tökéletesen megfelel az egyensúlyi árak szokásos *nonprofit* feltételének, mint azt rövidesen látni fogjuk.

A feltételekből adódóan az egyensúlyi megoldásban teljesülni fognak az egyenlőtlenségek alábbi láncolatában jelzett gyenge egyenlőtlenségek:

$$\alpha\mathbf{p\hat{A}x} \leqq \mathbf{pKx} \leqq \beta\mathbf{p\hat{A}x}.$$

Neumann a fenti feltételeket kiegészítette a manapság már megszokott módon az úgynevezett komplementaritási követelményekkel.[1] Nevezetesen, ha egyensúlyban az (1) egyenlőtlenség valamely i esetén határozott egyenlőtlenség ($>$) formájában teljesül, akkor $p_i = 0$ szükségképpen. Olyan melléktermékről van szó ugyanis, amelyből fölös mennyiség keletkezik, s ezért szabad jószág lesz. Továbbá, ha a (2) egyenlőtlenség valamely j esetén határozott egyenlőtlenség ($<$) formájában teljesül, akkor $x_j = 0$, ugyanis veszteséges eljárásról van szó, s ilyet egyensúlyban nem alkalmaznak. A kettőt összevontan, mátrixalgebrai jelölésekkel, a (3) komplementaritási lánc formájában írhatjuk fel:

$$\alpha \mathbf{p}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{p}\mathbf{K}\mathbf{x} = \beta \mathbf{p}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}. \tag{3}$$

A komplementaritási követelményből a *díjmentes lomtalanítás (free disposal)* feltevése következik. A feltételekből ugyanis látható, hogy a kínálati felesleggel rendelkező termékek elfekvő készletei, amelyek az időszakfordulókon, feltevés szerint, pillanatok alatt lezajlott csere során nem találnak gazdára, nyomtalanul eltűnnek. Ezért van az, hogy minden időszak elején csak az előző időszak kibocsátásai jelennek meg induló készletekként. Ez a feltevés teszi lehetővé nem mellékesen azt is, hogy kikössük: az egyensúlyi árak nem lehetnek negatívak.

Neumann számára, különböző, elsősorban matematikai okoknál fogva, fontos volt, hogy a gazdaság *ne legyen szétéső*, más szavakkal: *reducibilis* (vagy dekomponálható). Irreducibilis gazdaság esetén $\mathbf{pKx}$ (a kibocsátások összértéke) és $\mathbf{p}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}$ (a ráfordítások összértéke) pozitív lesz egyensúly esetén, azaz a modell minden lehetséges megoldásában. Emiatt viszont, mint a (3) egyenlőtlenségánc fennállásából levezethető, $\alpha = \beta$, és közös értékük nem más, mint egyik oldalról a (2) feltételt kielégítő megoldások mellett elérhető legnagyobb bővülési tényező, másik oldalról pedig a (3) feltételt kielégítő megoldások esetén elérhető legkisebb kamatráta („garantált profitráta" – *Morishima* [1974]). Az egyensúlyi megoldás ily módon az $F(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{pKx}/\mathbf{p}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}$ alakban definiált, Neumann által *profitfüggvénynek* nevezett leképezés *nyeregpontja* lesz.

Az egyensúly feltételei, mint látható, csak a $\mathbf{x}$ és a $\mathbf{p}$ vektorok arányait határozzák meg, a szintjüket nem. Ezeket Neumann a $\mathbf{1x} = \mathbf{p1} = 1$ megkötésekkel rögzítette. Mindezen feltevéseket figyelembe véve, Neumann modelljének matematikai feltételei az (N0) egyszerű formát öltik:

$$\mathbf{x}, \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}, \quad \alpha > 0, \quad \mathbf{1x} = \mathbf{p1} = 1, \tag{N0}$$

$$\mathbf{Kx} \geqq \alpha \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \tag{N1}$$

$$\mathbf{pK} \leqq \alpha \mathbf{p}\hat{\mathbf{A}}. \tag{N2}$$

Neumann a szükségesnél jóval erősebb és közgazdaságilag indokolhatatlan feltevéssel zárta ki a gazdaság szétéső voltát, nevezetesen feltette, hogy $\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{K} > \mathbf{0}$, azaz

[1] A komplementaritási feltevések először *Zeuthen* [1928] dán nyelvű művében, illetve német nyelven *Zeuthen* [1933]-ban jelentek meg. De ugyancsak fellelhető *Schlesinger* [1933/1934] dolgozatában is. Nem kizárt, hogy Neumann tőlük függetlenül, a matematikai szükségesség alapján vezette be a feltételt.

minden termék részt vesz ráfordításként és/vagy kibocsátásként minden eljárásban. *Kemeny–Morgenstern–Thompson* [1956] később általánosította Neumann feltevéseit, és az $\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{K} > \mathbf{0}$ feltevés helyébe a gazdaság széteső voltát, reducibilitását is megengedő $\mathbf{1}\hat{\mathbf{A}} > \mathbf{0}$ (minden eljáráshoz közvetlenül szükség van legalább egy termékre) és $\mathbf{K1} > \mathbf{0}$ (minden jószág termelhető) feltevésekkel helyettesítették. (Az utóbbi triviálisan adódik abból a feltevésből, hogy az elsődleges erőforrásokat Neumann eleve kizárta a modelljéből, ezért ez a feltevés nála nem is jelent meg külön.) Egyidejűleg pótlólag előírták a $\mathbf{pKx} > 0$ (pozitív értéktermék) teljesülését. A továbbiakban ezekre Kemeny–Morgenstern–Thompson-feltételekként fogunk utalni.[2]

Neumann értelmezésében, mint látjuk, a nyereség kamaton felül jelentkező bevételtöbbletet jelent. A modell lehetséges interpretációi megengedik, hogy a *kamatláb*[3] helyett a klasszikus értelemben vett *általános profitrátáról* beszéljünk. A tiszta tőkés piacgazdaság elméleti modelljében ugyanis a munkaerő újratermelésének, azaz a létszükségleti fogyasztásnak a költsége munkabérként értelmezhető, és ekkor a kamatláb egyértelműen megfeleltethető az „időtlen" klasszikus elemzésekben megjelenő egyensúlyi profitrátának. Egy minden többletet felhalmozó (luxusfogyasztást nem megengedő), pénzügyi bonyodalmaktól (arbitrázstól) mentes gazdaság esetén természetes feltenni, hogy stacionárius egyensúlyban a kamatláb megegyezik az általános (az elérhető legnagyobb) profitrátával.

Neumann-modell Leontief-technológiával – fából vaskarika

Mint azt a bevezetőben már jeleztük, bizonyos matematikai hasonlóságok folytán a zárt, stacionárius Leontief-modellt, amely esetén az egyensúly feltételeit az

$$\mathbf{x}, \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}, \alpha > 0, \mathbf{1x} = \mathbf{p1} = 1, \tag{L0}$$

$$\mathbf{x} = \alpha\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \tag{L1}$$

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}\hat{\mathbf{A}} \tag{L2}$$

[2] Kevesen figyeltek fel arra, hogy a nevezett szerzők ezekkel a látszólag ártalmatlan és matematikai szempontból teljesen kézenfekvőnek tűnő feltevésekkel valójában meg is másították Neumann modelljének közgazdasági tartalmát. A reducibilis Neumann-féle modell látszólag érdekes új utakat nyitott meg az elemzések számára. Reducibilis gazdaságokban ugyanis alternatív növekedési ütemű egyensúlyi pályák létezhetnek. Ám ezeknek az eredményeknek nincs különösebb közgazdasági hasznuk, mivel megmutatható, hogy közgazdasági szempontból csak a legnagyobb növekedési ütemű megoldás tarthat számot érdeklődére (lásd *Bromek* [1974], *Zalai* [2011], [2012]). Más megoldásokban a munkaerő újratermelésének költsége, a munkaerő ára ugyanis nulla lesz.

[3] Smith óta ismert és sokak által kutatott közgazdaságtani téma, hogy a különböző időpontokban megjelenő költségek (és hasznok) közötti átváltási lehetőségek erőteljesen kihatnak az intertemporális döntésekre. *Samuelson* [1937] diszkontált hasznosság modelljének megjelenése óta pedig széles körben elterjedt az a nézet, hogy az intertemporális döntéseket befolyásoló összes, elsősorban pszichológiai motívum kifejezhető egy diszkontrátával. Pénzügyi elemzésekben, mint ismert, jellemzően a kamatlábat alkalmazzák diszkonttényezőként. Valószínű ilyesmi megfontolások indították Neumannt arra, hogy kamatról és ne profitról értekezzen.

alakban írhatjuk fel, szokták a Neumann-modell sajátos, Leontief-technológia esetén kapott, egyszerűbb változatának tekinteni. Olyan Neumann-modellnek tehát, amely esetén $\mathbf{K} = \mathbf{E}$, ahol $\mathbf{E}$ az n-ed rendű egységmátrix, és $\hat{\mathbf{A}}$ az input-output ráfordítási együtthatók egy szintén négyzetes mátrixa (nincs sem technikai választék, sem ikertermelés).

Az (L1) és az (L2) feltételek egyenlőségek formájában való felírása magyarázatra szorul, a Neumann-modellben ugyanis ezek gyenge egyenlőtlenségek formáját öltik. Ha azonban Neumann eredeti modelljének megfelelően feltesszük, hogy a gazdaság, azaz a jelen esetben az $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix irreducibilis, akkor a fenti L-modell és az azonos paraméterekkel, de gyenge egyenlőtlenségek formájában felírt Neumann-modell megoldása valóban megegyezik egymással. A megoldásban ugyanis α mindkét modell esetén az $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix domináns sajátértékének reciproka, $\mathbf{x}$ és $\mathbf{p}$ pedig az ehhez tartozó, minden elemében pozitív jobb és bal oldali sajátvektora lesz. Az $\mathbf{x}$ és a $\mathbf{p}$ határozott pozitivitása miatt pedig a gyenge egyenlőtlenségek mind egyenlőségek formájában teljesülnek.

Egyáltalán nem lényegtelen azonban, matematikai szempontból sem, az *irreducibilitás* feltevése, amely kulcsszerepet játszik abban, hogy a két modell megoldása egybeesik. Csak emiatt mosódnak el a komplementaritási feladatok és az egyenletrendszerek megoldásai között fennálló, esetenként matematikai szempontból is jelentős különbségek. Neumann maga feltette ugyan, hogy modellje nem széteső, de az irodalomban manapság Neumann-modellnek tekintett, az eredeti modell Kemeny–Morgenstern–Thompson-feltételekkel adott változata, ezt a feltevést megszüntette. Könnyen megmutatható, hogy reducibilis esetben a Neumann-modellnek több megoldása is lehet, s ilyenkor nem lesz köztük szigorúan pozitív $\mathbf{x}$ és $\mathbf{p}$ vektorral rendelkező megoldás, ami egy *ex post* szemléletű Leontief-modell esetében elvárt (bővebben erről lásd *Zalai* [2011]). Már emiatt is félrevezető lehet tehát a fenti állítás. Közgazdasági szempontból azonban ennél jóval fontosabb és áthidalhatatlan különbségek vannak Neumann és Leontief modellje között, amelyeket rövidesen közelebbről kifejtünk.

Előbb azonban azt a kérdést tesszük fel, hogy tekinthető-e még egyáltalán Neumann-modellnek egy ilyen, Leontief-technológiát feltételező változat. A választ megelőlegezzük: nem, mert egy input-output modellel adott technológia feltételezése olyan fontos és elengedhetetlen jellemzőitől fosztja meg a Neumann-modellt, amely teljesen elidegeníti Neumann eredeti feltevéseitől. Nézzük meg sorjában közelebbről ezeket!

Itt van mindjárt a technológiai választék lehetősége, ami elengedhetetlen kelléke Neumann eredeti modelljének, hiszen éppen a köztük való választás és az egyensúlyi árrendszer kiválasztása közötti kölcsönös összefüggést elemzi modelljében. Ám ez nem csak ezért volt fontos a számára. Ez, az ikertermelés lehetőségének feltevésével együtt, teszi lehetővé az állóeszközök technikai és erkölcsi elavulásának, gazdasági értékcsökkenésének endogén meghatározását, aminek ilyen módon való ábrázolását Neumann szintén hangsúlyozta. Ezért nem kellett neki bajlódnia a fizikai élettartam problémájával, ugyanis joggal feltehető, hogy romló termelékenységük következtében az állóeszközök előbb tönkremennek gazdasági, mint fizikai értelemben.

Hasonló okból elengedhetetlen Neumann modelljében, hogy fennálljon az ikertermelés lehetősége. Egy állóeszköz ugyanis több időszakon át használható, és a használt állóeszköz ugyanúgy az őt felhasználó tevékenység kibocsátása lesz – mint a termelés célját képző fő termék, annak mintegy mellék-, azaz ikerterméke lesz. Ami legalább ilyen fontos: csak az ikertermelés lehetősége legitimálja az egyöntetű egy időszakos termelési és tőkemegtérülési periódus feltevését. Ez teszi ugyanis lehetővé, hogy az egy időszaknál hosszabb termelési folyamatokat, különböző készültségi fokú félkész termékek (köztük befejezetlen beruházások!) bevezetése révén, egyperiódusú részfolyamatokra bontsa. S akkor még nem beszéltünk arról, hogy a modell mikroökonómiai szemlélete miatt sem lett volna helyes az együttes termelés jellegzetes eseteit kizárnia a modelljéből.

Ennyi is elég ahhoz, hogy bárki belássa, egy Leontief technológiát feltételező, formai, matematikai szempontból azzal megegyező Neumann-modell nem tekinthető valódi, Neumann eredeti feltevéseit és értelmezéseit kielégítő Neumann-modellnek. Ezért a továbbiakban ezt a változatot egyszerűen csak *Neumann-jellegű, kvázi modellnek* fogjuk nevezni. Persze, felvethetné valaki, hogy felejtsük el Neumann feltevéseit és értelmezéseit, csak a modell matematikai formáját és az irreducibilitás feltevését fogadjuk el, s tekintsük ezekkel adottnak a Neumann-modell definícióját. Nem az első eset lenne a közgazdaságtan történetében, hogy befolyásos utódok eredeti közegéből kiragadva és értelmezésétől megfosztva megmásítják és lecsupaszítják neves elődeik fogalmait és elemzéseit. Mi azonban ragaszkodunk Neumann eredeti modelljéhez, és ezért joggal mondhatjuk, hogy egy Neumann-modell Leontief-technológiával fából vaskarika.

De vajon tekinthető-e az L-modell valódi Leontief-modellnek, és milyen feltevések mellett? Ennek a kérdésnek a megválaszolásához át kell tekintenünk a Leontief-féle input-output modellek kialakulásának történetét, és azon belül is mindenekelőtt a zárt input-output modellek genezisét. Neumann és Leontief felfogásában és modelljeik indíttatásában levő különbségeket csak akkor fogjuk világosan megérteni, ha „keletkezésüktől kezdve szemléljük a dolgokat” (Arisztotelész: Politika).

Leontief két korai, zárt input-output modellje

Mindenekelőtt arra hívjuk fel a figyelmet, hogy Leontief egész munkásságában kiemelt fontosságot kapott az empíria, a gyakorlati alkalmazás lehetősége. Már csak ennek alapján is joggal feltehetnénk, hogy az input-output modell kidolgozása során is ezek a célok inspirálták. Ezt erősíti meg az az ismert tény is, hogy – különösen 1925-ig, amikor elhagyta a Szovjetuniót – Leontief szoros figyelemmel kísérte az orosz statisztikusok munkáit, amelyek eredményeképpen megszületett az első *nemzetgazdasági mérleg.* Ezekről a munkálatokról számolt be a Planovoje Hozjajsztvóban megjelent cikkében (*Leontyev* [1925]). Németországi doktori tanulmányai során megszerezte az ehhez a szükséges elméleti alapokat is. Az 1928-ban megvédett értekezésének címe – A gazdaság mint vérkeringés – nyilvánvaló utalás Quesnay Tableau Economique-jára, amelyre, a marxi újratermelési sémák mellett, a szovjet nemzetgazdasági mérlegek atyja, Popov is utal történelmi előzményként (*Popov* [1926]). Az 1936-ban és 1937-ben közreadott úttörő cikkeiben Leontief, Quesnay mellett, már az általános egyensúlyelmélet empirikus alkalmazásaként mutatja be az input-output modelljén nyugvó komparatív statikai elemzését (*Leontief* [1936] és [1937]).

Leontief első input-output modellje az Egyesült Államok gazdaságának *zárt, ágazatok közötti (interindustrial) mérlegén* alapult, amelyek – az orosz/szovjet táblázatokra emlékeztető módon – a különböző ágazatok *(industries)* adott időszaki kibocsátását és azok elosztását ábrázolják. Emiatt az ágazatok beszerzései jellemzően nem egyeznek meg a ráfordításokkal, azaz az adott időszaki felhasználásaikkal. (Ebből adódóan az egyik fogas kérdés, amit Leontiefnek meg kellett oldania, a ráfordítási együtthatók becslése volt!) A mérlegek elemzése ugyanakkor, szemben a szovjet gyakorlattal, nála már elméletileg megalapozott, *változatlan ráfordítási együtthatók* feltételezésén nyugvó input-output volumen- és ármodelleken nyugodott. Gondolatkeretének Marxhoz és a klasszikus közgazdászokhoz visszanyúló gyökereire utal, hogy a *produktív* – ahogy ő nevezi: *„üzleti”* – ágazatok (1-től n-ig) mellett önálló, ($n + 1$)-edik ágazatként megjelenik a *háztartások* ágazata is, amit ugyanolyan módon kezelt, mint bármely más ágazatot.

A háztartások ágazata különböző munka-, tőke- és vállalkozói *szolgáltatásokat állít elő*, és ezek költsége adja meg az üzleti ágazatok termelési értékének *hozzáadottérték*-összetevőjét. A háztartási ágazat kiadását pedig az üzleti ágazatok kibocsátásának fogyasztási célú beszerzése jelenti. Leontief nem tért ki arra, hogy van-e, lehet-e a háztartási ágazatnak felhasználása a saját kibocsátásából, azaz keletkezhet-e ott is hozzáadott érték. A saját felhasználást ugyanis minden ágazatban figyelmen kívül hagyta, és csak az ágazati nettó kibocsátásokat ábrázolta mind az ágazatok közötti mérlegekben, mind a rájuk épülő modellekben. Megjegyzéseiből azonban kiderül, hogy az összes hozzáadott értéket tekintette a nemzeti jövedelemnek, ez arra utal, hogy a háztartási tevékenységeket, a klasszikus felfogásnak megfelelően, *improduktívnak.*

Még egy fontos megjegyzés. Az általános egyensúlyelmélet szokásos felfogásában nemcsak a fogyasztás, de a felhalmozás is a háztartási döntések körébe tartozik. Leontief itt felemás és következetlen megoldást alkalmazott. A háztartások ágazata – mint jeleztük – munkaerő-, tőke- és egyéb vállalkozói szolgáltatásokat nyújt az üzleti ágazatoknak. Ezek bevételéből azonban csak a saját fogyasztását, a munkaerő szolgáltatásának költségét finanszírozza. A tőkeszolgáltatásokat létrehozó beruházások ráfordításai a produktív ágazatok beszerzései között jelennek meg. Modelljében emiatt – makrogazdasági szinten – a megtakarítás igazodik a beruházáshoz.

Leontief [1936] és [1937] cikkeiben két, komparatív statikai elemzésre alkalmas általános egyensúlyi modellt mutatott be. Egy pusztán elméleti jellegűt (egyszerű újratermelést feltételező) és egy gyakorlati alkalmazásra alkalmas modellt, aminek elemzése második cikkében meg is jelent. Mint már említettük, az elemzés alapjául szolgáló nemzetgazdasági mérleg a különböző ágazatok adott időszaki kibocsátását és azok elosztását ábrázolta zárt formában, és maguk a modellek is zárt input-output modellek voltak. A kiinduló statisztikai mérleg sémáját a *2. táblázatban* láthatjuk.

2. táblázat
Leontief korai zárt input-output modelljének statisztikai hátterét képező ágazati kibocsátások és felhasználások táblázata

Kibocsátók	Felhasználók							Összes kibocsátás (bevétel)
	1. ágazat	2. ágazat	…	*j*. ágazat	…	*n*. ágazat	$(n+1)$. ágazat	
1. ágazat	0	p_1x_{12}		p_1x_{1j}		p_1x_{1n}	$p_1x_{1,\,n+1}$	p_1x_1
2. ágazat	p_2x_{21}	0		p_2x_{2j}		p_2x_{2n}	$p_2x_{2,\,n+1}$	p_2x_2
⋮								
i. ágazat	p_ix_{i1}	p_ix_{i2}		p_ix_{ij}		p_ix_{in}	$p_ix_{i,n+1}$	p_ix_i
⋮								
n. ágazat	p_nx_{n1}	p_nx_{n2}		p_nx_{nj}		0	$p_nx_{n,\,n+1}$	p_nx_n
$(n+1)$. ágazat	$p_{n+1}x_{n+1,1}$	$p_{n+1}x_{n+1,2}$		$p_{n+1}x_{n+1,\,j}$		$p_{n+1}x_{n+1,\,n}$	0	$p_{n+1}x_{n+1}$
Összkiadás	$\sum_i p_ix_{i1}$	$\sum_i p_ix_{i2}$		$\sum_i p_ix_{ij}$		$\sum_i p_ix_{in}$	$\sum_i p_ix_{i,\,n+1}$	

A táblázatban x_i az i-edik ágazat kibocsátását, x_{ij} az i-edik ágazat kibocsátásából a j-edik ágazat által beszerzett mennyiségét, p_i pedig az i-edik ágazat kibocsátásának egységárát jelöli. Már jeleztük, Leontief az ágazatok kibocsátását – a mai gyakorlattól eltérően – „nettó" módon ábrázolja: kiszűri belőle a saját ágazaton belüli felhasználást, vagyis csak az *ágazatok közötti cseréket* ábrázolja. Emiatt a táblázat főátlójában mindenhol nulla szerepel ($x_{ii} = 0$).

A táblázat oszlopai, hangsúlyozzuk, nem az ágazati (nettó) kibocsátások értékét meghatározó ráfordításokat (költségeket) tartalmazzák, hanem az ágazatok beszerzéseit (kiadásait). A kibocsátások összértékének (az összbevételnek), azaz az utolsó oszlop összegének $\left(\sum_i p_ix_i\right)$, a mérleg természeténél fogva, természetesen meg kell egyeznie az összkiadás értékével, vagyis az utolsó sor összegével $\left(\sum_j\sum_i p_ix_{ij}\right)$. Az egyes ágazatok – például a k-adik – esetében azonban a bevétel $\left(p_kx_k = \sum_j p_kx_{kj}\right)$ jellemzően eltér a kiadástól $\left(\sum_i p_ix_{ik}\right)$. A kibocsátás értékét ugyanakkor egyensúlyban – a szokásos elméleti feltevés szerint – az előállításához szükséges ráfordítások értéke határozza meg. Ezt azonban a táblázat nem tartalmazza. Leontief tehát azzal a problémával szembesült, hogy miként lehetne a táblázat adatai alapján megbecsülni a kibocsátásokhoz szükséges ráfordításokat.

Az adott időszaki kibocsátáshoz szükséges ágazati ráfordításoknak és az ágazati beszerzéseknek a teljes összege és összetétele is jellemzően eltér egymástól. Az egyetlen kivétel az egyszerű újratermelés absztrakt modellje, amely esetén joggal feltehetjük, hogy a beszerzések és a ráfordítások minden időszakban megegyeznek egymással. Nem véletlen tehát, hogy Leontief első, pusztán didaktikai célokat szolgáló elméleti modelljében egy ilyen, Marx és a klasszikusok által is előszeretettel használt, elvont gazdaság újratermelésének egyensúlyi feltételeit fogalmazta meg. Az elhasznált termelési eszközöket és fogyasztási cikkeket egy ilyen esetben folyamatosan pótolnák, a keletkező hozzáadott értéket pedig teljes egészében fogyasztásra fordítanák. A *2. táblázat* elemei tehát egyidejűleg mutatnák a ráfordításokat és a kiadásokat, egy adott ágazat sorainak és oszlopainak összege megegyezne egymással. A ráfordítási együtthatók meghatározása tehát nem ütközne semmi akadályba.

A Walras–Cassel-féle korai általános egyensúlyi modellek példáját követve, Leontief is változatlan $\tilde{a}_{ij}$ ráfordítási együtthatókat feltételezett, amelyeket *termelési együtthatóknak* nevezett. Az *egyszerű újratermelés* naturális és értékbeli egyensúlyának feltételeit ezek alapján – skaláris és mátrixalgebrai jelölésekkel egyaránt – felírva a (4) egyenletrendszerhez jutunk:

$$x_i = \tilde{a}_{i1}x_1 + \tilde{a}_{i2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{i,n+1}x_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{4}$$

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \tag{L.I.1}$$

ahol a $\mathbf{x} = (x_i)$ vektor x_i eleme az *i*-edik ágazat kibocsátását (és egyidejűleg a kibocsátó tevékenység alkalmazási szintjét) jelöli, illetve

$$p_j = p_1\tilde{a}_{1j} + p_2\tilde{a}_{2j} + \ldots + p_{n+1}\tilde{a}_{n+1,j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{5}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}\tilde{\mathbf{A}}, \tag{L.I.2}$$

ahol a $\mathbf{p}$ vektor p_j eleme a *j*-edik ágazati kibocsátás egységára (árindexe).

Két rövid megjegyzés:

Az $(n + 1)$-ed rendű, a produktív ágak mellett a háztartásokat is tartalmazó együtthatómátrixot $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})$ szimbólummal jelöltük, hogy a hullámos ékezettel megkülönböztessük a csak produktív ágazatokat tartalmazó nyílt Leontief-modellek ráfordítási együtthatóinak szokásosan **A**-val jelölt mátrixát. (Később mi is ezt fogjuk használni a közönséges termékek együtthatóiból képzett mátrix jelölésére.) A ráfordítási együtthatók így képzett mátrixának utolsó oszlopa a szükséges fogyasztást tartalmazza, tehát ugyanúgy a *teljes körű* ráfordítási együtthatók mátrixáról van szó, mint Neumann modelljében. A két mátrix azonos szimbólummal jelölése elfedi a tényt, hogy itt *kiterjesztett* és nem a Neumann által használt *összevont* alakban szerepel. A teljes körű ráfordítási együtthatók kétféle lehetséges megjeleníthetésének és korlátozott egyenértékűségének a kérdésére később még visszatérünk.

A gyakorlatban, természetesen, a kibocsátások értékben aggregált volumenindexek lesznek, az árak pedig a bázisárszintekhez viszonyított indexek. Az így összeállított táblázatban tehát a p_j árak induló értéke rendre 1 lesz, és $\tilde{a}_{ij} = x_{ij}/x_j$.

A *második modelljében* Leontief már figyelembe vette, hogy a termelés szerkezete időben megváltozhat, s emiatt az egyes ágazatok kiadása és jövedelme eltérhet egymástól. Ilyen esetben a *2. táblázat* oszlopok szerint az ágazatok beszerzéseinek, sorok szerint az ágazatok kibocsátásainak az elosztását mutatja. Leontief az ágazatok összkiadásának $\left(\sum_i p_i x_{ik}\right)$. és összbevételének $(p_k x_k)$ a különbségét, amennyiben pozitív, *beruházásnak*, ellenkező esetben *megtakarításnak* nevezi, eléggé önkényes és félrevezető módon használva e fogalmakat.

Leontief továbbra is felteszi, hogy az ágazatok termelési lehetőségei kellő pontossággal leírhatók változatlannak tekintett ráfordítási együtthatókkal ($\tilde{a}_{ij}$), más szavakkal: a technológia leírható a később róla elnevezett típusú termelési függvényekkel. Az egyszerű újratermelés esetében ezeket, mint láttuk, közvetlenül ki lehetett olvasni a táblázatból ($\tilde{a}_{ij} = x_{ij}/x_j$), mivel az ágazati kiadások és a ráfordítások, feltevés szerint, megegyeztek egymással. A második esetben azonban a táblázat csak az ágazatok kiadásait (beszerzéseit) részletezi. Az ágazati ráfordításoknak csak az értékösszegét tartalmazza, ami – feltevés szerint – megegyezik a kibocsátás $p_k x_k$ értékével. A ráfordítások szerkezete által meghatározott termelési együtthatók pontos becsléséhez tehát nem áll rendelkezésre a szükséges információ. Az ebből keletkező „gordiuszi csomót" Leontief merész feltevéssel vágta ketté. Továbbra is feltette, hogy az ágazati ráfordítások és kiadások *áruszerkezete megegyezik* egymással, a változatlannak feltételezett $\tilde{a}_{ij}$ együtthatókkal.

Vezessük be a $\lambda_j = 1 + \delta_j$ paramétert az összkiadás és az összbevétel hányadosának jelölésére:

$$\lambda_j = 1 + \delta_j = \sum_i p_i x_{ij} \Big/ p_j x_j .$$

A λ_j együtthatót a j-edik ágazat *kapacitásváltozási tényezőjének* fogjuk nevezni, mivel a kibocsátás jövőbeli bővülésének (1-nél nagyobb érték), illetve szűkülésének (1-nél kisebb érték) a lehetőségére utal. Leontief egyébként ezek reciprokát, $b_j = 1/\lambda_j$ paramétereket használt ebben a funkcióban, amelyeket – megint csak félrevezető módon – *beruházási együtthatóknak* nevezett. Nyilvánvaló ugyanis, hogy csak az 1-nél kisebb b_j érték jelezne bővülést, azaz beruházást.

Az egyszerű újratermelés esetében $\lambda_j = 1$ minden j-edik ágazat esetén. Az ágazati kiadások, illetve bevételek teljes összegének mindig meg kell egyezniük egymással, mivel mindkettő a cellákban szereplő számok összege. Ebből adódóan, ha a beszerzési szint bármely ágazat esetén eltér az x_j kibocsátások által feltételezett $a_{ij} x_j$ ráfordításoktól, akkor szükségképpen lesznek 1-nél nagyobb és 1-nél kisebb értékű kapacitásváltozási tényezők, azaz egyaránt lesznek „beruházások" és „megtakarítások". Érdemes ennek kapcsán arra is felhívni a figyelmet, hogy makrogazdasági szinten csak akkor beszélhetünk valóban megtakarításról, potenciálisan bővülő gazdaságról, ha a háztartások ágazatának kapacitásváltozási tényezője 1-nél kisebb, azaz kiadásuk kisebb a bevételüknél. Ez is jelzi a Leontief által használt kifejezések félrevezető voltát.

A fenti merész feltevés mindenesetre lehetővé tette Leontief számára, hogy pusztán a *2. táblázat* adataira hagyatkozva számszerűsítse az $\tilde{a}_{ij}$ termelési együtthatókat. A feltevés teljesülése esetén ugyanis a beszerzett inputtényezők volumene (x_{ij}) a fenti λ_j tényezők által meghatározott egyenes arányban áll az x_j kibocsátáshoz szükséges $\tilde{a}_{ij} x_j$ ráfordításokkal, amiből $x_{ij} = \lambda_j \tilde{a}_{ij} x_j$, azaz $\tilde{a}_{ij} = x_{ij}/\lambda_j x_j$ következik. Ebből adódóan a $\lambda_j x_j$ mutatószámokat olyan feltételezett kibocsátási szintekként értelmezhetjük, amelyekhez az ágazatok a beszerzéseiket méretezték.

Közbevetjük, hogy folyó árakon összeállított mérleg esetén, amikor $p_i = 1$ minden i-re, az $\tilde{a}_{ij}$ ráfordítási együtthatókat egyszerűen megkapjuk a *2. táblázatból*. Ezek nem mások lesznek, mint az oszlopokban szereplő értékeknek az oszlopösszegekhez viszonyított megoszlási arányszámai, amelyek tehát 1-re összegződnek. Ugyanígy számítanánk ki a ráfordítások táblázatok alapján a ráfordítási együtthatókat is, ahol az oszlopösszegek az ágazati kibocsátások (x_j) lennének. Leontief azonban ekkor még nem rendelkezett a maiakhoz hasonló, hanem csak olyan „ágazatok közötti kapcsolatok" mérlegével, amely a kibocsátások elosztását részletezi. A mai értelemben vett ágazati kapcsolatok mérlegének (ÁKM) a központi eleme – mint ismeretes – már a ráfordítások táblázata (az úgynevezett belső négyzet).

Az egyszerű újratermeléstől tehát a változó termelési szerkezetet megengedő második eset csak abban tér el, hogy az első esetén $\lambda_j = 1$ minden j-re, míg a második esetben ezek értéke eltérhet 1-től. Az elsőt tehát a második sajátos esetének tekinthetjük. A második modell *egyensúlyi feltételei* is csupán egy adott időszakra vonatkoznak, tehát *intratemporális* és nem *intertemporális* feltételek, mint Neumann modelljében. A *termékmérlegek* a (6) formát öltik:

$$x_i = \tilde{a}_{i1}\lambda_1 x_1 + \tilde{a}_{i2}\lambda_2 x_2 + \ldots + \tilde{a}_{i,n+1}\lambda_{n+1}x_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{6}$$

Az *egyensúlyi árak* feltételeit pedig a (7) alakban adhatjuk meg:

$$p_j = p_1\tilde{a}_{1j} + p_2\tilde{a}_{2j} + \ldots + p_n\tilde{a}_{nj} + p_{n+1}\tilde{a}_{n+1,j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{7}$$

Összefoglalva, mátrixalgebrai jelölésekkel:

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}\langle\boldsymbol{\lambda}\rangle\mathbf{x}, \tag{L.II.1}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}\tilde{\mathbf{A}}, \tag{L.II.2}$$

ahol $\mathbf{x} = (x_i)$ feltevés szerint pozitív vektor (x_i az i-edik ágazat kibocsátása), $\mathbf{p} = (p_j)$ szintén pozitív vektor (p_j a j-edik ágazati kibocsátás ára, illetve árindexe), $\langle\boldsymbol{\lambda}\rangle$ pedig a λ_j tényezőket tartalmazó diagonális mátrix.

Látjuk, hogy míg a naturális és az értékbeli egyensúly feltételében szereplő együtthatómátrixok az egyszerű újratermelés esetén megegyeznek egymással, a második esetben megszűnik ez a Neumann-modell esetén is látott duális szimmetria. Az is látható, hogy úgynevezett sajátérték-feladatokról van szó, amelyek megoldhatóságának szükséges és elégséges feltételei a Perron–Frobenius-féle sajátértéktételek ismeretében egyszerűen adódnak. Nevezetesen:

– ha a megfigyelésekből származó változók és paraméterek értékei, ahol $\mathbf{x}$ és $\mathbf{p}$ pozitív vektorok, kielégítik az (L2.1) és (L2.2) egyenlőségeket, akkor az $\tilde{\mathbf{A}}\langle\boldsymbol{\lambda}\rangle$ és az $\tilde{\mathbf{A}}$ együtthatómátrixok domináns sajátértéke szükségképpen 1, $\mathbf{x}$ az $\tilde{\mathbf{A}}\langle\boldsymbol{\lambda}\rangle$ mátrix domináns sajátértékéhez tartozó jobb oldali, $\mathbf{p}$ pedig az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix domináns sajátértékéhez tartozó bal oldali sajátvektora;

– ha az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix nemnegatív és irreducibilis, $\boldsymbol{\lambda}$ pedig pozitív vektor, akkor az (L2.1) és (L2.2) egyenlőségeknek akkor és csak akkor létezik nemnegatív $\mathbf{x}$ és $\mathbf{p}$ megoldása, ha az $\tilde{\mathbf{A}}\langle\boldsymbol{\lambda}\rangle$ és az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrixok domináns sajátértéke 1, és ekkor $\mathbf{x}$ az $\tilde{\mathbf{A}}\langle\boldsymbol{\lambda}\rangle$ mátrix, $\mathbf{p}$ pedig az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix 1 domináns sajátértékéhez tartozó jobb és bal oldali, határozottan pozitív és arányaiban egyértelműen meghatározott sajátvektora.

Kellően aggregált ágazatok esetén az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix jellemzően pozitív, vagyis irreducibilis. Felesleges komplikációk elkerüléséhez és Leontief kezdetleges zárt input-output modelljének Neumann eredeti modelljével való összehasonlításához a továbbiakban nyugodtan feltehetjük a gazdaság, azaz az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix irreducibilis voltát.

A fenti követelmények nyilvánvalóan korlátozzák a paraméterek, $\tilde{\mathbf{A}}$ és $\boldsymbol{\lambda}$ elemeinek feltételezett változását a komparatív statikai elemzés során. Az $\tilde{\mathbf{A}}$ és az $\tilde{\mathbf{A}}\langle\boldsymbol{\lambda}\rangle$ mátrix domináns sajátértékének ugyanis a változások után is 1-nek kell maradnia! Egy elem tehát egyedül nem változhat, több elem együttes változása esetén pedig legalább egynek alkalmazkodnia kell a többi változásához.

Érdemes felfigyelni arra is, hogy az első esetről ($\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$) a másodikra való áttérés egy ilyen komparatív statikai elemzésként értelmezhető: mi történik, ha megváltoznak a $\boldsymbol{\lambda}$ vektor bizonyos elemei. Arra kapnánk választ, hogyan változna meg az egyszerű újratermelés esetén kialakult állapot a Leontief értelmében vett beruházások és a megtakarítások megjelenése következtében. Ha az $\tilde{\mathbf{A}}$ ráfordítási együtthatók, azaz a termelékenység változatlan marad, akkor az árarányok nem változnak meg. Az egyensúlyi termelési szerkezet, vagyis az $\mathbf{x}$ vektor arányai természetesen megváltoznának. Jelöljük ezeket $\mathbf{x}^0$ és $\mathbf{x}^1$ vektorokkal, és normalizáljuk a két esetben kapott megoldást a $p_n = 1$ és az $x_n^0 = x_n^1$ megkötésekkel! A hozzáadott érték (a GDP) tehát változatlan maradna. Ha a háztartások ágazatában nem változna meg a λ_{n+1} kapacitástényező, az azt jelentené, hogy a változatlan nagyságú GDP-t továbbra is teljes egészében fogyasztásra költenék. A háztartásoknak tehát továbbra sem lenne megtakarításuk, holott Leontief értelmezése szerint van beruházás egyes ágazatokban és megtakarítás másokban. Ez is jelzi a beruházás és a megtakarítás fogalmának sajátos használatát.

Kísérlet Leontief korai zárt modelljének stacionárius kiterjesztésére

Már az eddigi példák is mutatták, hogy Leontief modelljének közgazdasági tartalma körül nincs minden rendben, és az adatok csak egyetlen időszak (év) termelésének elosztását részletezik. Az egyszerű újratermelés esetében ezek az elméleti és adatbeli hiányosságok nem érdekesek, elegendők a feltételezett stacionárius egyensúly jellemzésére. Az általános eset modellje mögött azonban nincsenek világos elméleti feltevések. Miféle egyensúlyról lehetne egyáltalán beszélni ebben az esetben?

A modellben csak az adott időszak *intra*temporális feltételei jelennek meg. A kereslet és kínálat a feltevés szerint pontosan fedezi egymást (az adott időszakban!), tehát elfogadható feltevés, hogy az árakat a költségek határozzák meg. De mi történik a megvásárolt termékek azon részével, amelyeket nem használnak fel az adott időszakban, illetve honnan pótolják azokat, amelyekből az adott időszakban szükséges ráfordításoknál kevesebbet vesznek csak meg? Ha tehát egyáltalán lehet valamiféle egyensúlyról beszélni, akkor csak statikus vagy Marshall-féle időleges *(temporary)* versenyzői egyensúlyról lehet szó. Leontief tehát megalapozatlanul értelmezi a „dinamikai feltételek" figyelembevételeként azt, hogy bevezeti a modellbe a változás lehetőségét, és legalábbis szokatlan, hogy a modelljével végzett *komparatív statikai* elemzést *stacionáriusnak* nevezi.

A bevételek és a kiadások eltérése esetleg értelmezhető lenne egyszerűen úgy, mint korábban kialakult egyensúlytalanságok korrekciója. Ám a modellben egyáltalán nem jelenik meg semmiféle kapcsolat sem a megelőző, sem a következő időszakokkal. Nincs benne semmi utalás a tőkelekötést megtestesítő forgó- vagy állóeszközkészletekre, azok beruházásokkal összefüggő időbeli változására. Így azután explicit formában nem jelenik meg benne, tőkelekötés, tőkehozam, kamatláb stb., amelyek nemcsak a dinamika, de az egyensúlyi árak meghatározásának is elengedhetetlen kellékei. Hogyan kell, illetve lehet értelmezni egyáltalán a feltételezett $\lambda_j x_j$ kibocsátásokat, amelyekhez az ágazatok a beszerzéseiket méretezték? Mikor fognak azok megvalósulni? Egy időszak, két időszak múlva?

A hiányosságok igen szembetűnően jelennek meg a beruházások és a megtakarítások értelmezésében – és mindenekelőtt a háztartások kezelésében –, amelyek összessége nem pusztán végső fogyasztó, hanem mások által megvásárolt szolgáltatásokat kibocsátó ágazat is (mint az üzleti ágazatok). Ugyanakkor Leontief modelljében csak a személyes fogyasztás céljára vásárolnak termékeket és szolgáltatásokat. Beruházást csak az üzleti, a termelőágak valósíthatnak meg, amelyek valamilyen, a modellben nem részletezett transzferek révén megkapják a háztartások – ha van nekik egyáltalán –, illetve egymás megtakarításait. Nem tisztázott az sem, hogy mi vezérli az üzleti ágazatok beruházási, megtakarítási döntését.

Különösen nehezen értelmezhető a háztartások által nyújtott vegyes (munkaerő- és tőke-) szolgáltatás „fizikai" megjelenése és mértékegysége, amelyből – a modell feltevései szerint – akár „készletek" is képezhetők. Ha ugyanis egy „üzleti" ágazat beruházása pozitív, az azt jelenti, hogy minden kibocsátásból, így a háztartások szolgáltatásaiból is többet vásárol, mint amennyit az adott időszakban felhasznál, vagyis átviszi a következő időszakba! Megtakarítás esetén pedig, amikor a folyó beszerzés kisebb, mint az adott időszaki kibocsátás ráfordítása, annak fedezete csak az előző időszakról áthozott készletek lehetnek. A sort még folytathatnánk, de ennyi bőven elég ahhoz, hogy megállapítsuk, Leontief modelljét nem tekinthetjük másnak, mint a dinamikus input-output modell megfogalmazására irányuló első, nem igazán sikeres kísérletnek, ami természetesen – a későbbi fejlemények fényében – nem csökkenti Leontief érdemeit.

Nézzük meg, hogyan lehetne pótolni a jelzett elméleti hiányosságokat, és a fenti modellből kiindulva egy szabatosabb elméleti modellhez jutni! Vezessünk be mindenekelőtt dinamikát megjelenítő, intertemporális feltételeket a modellbe! Éspedig azzal az időleges egyensúlyi feltevéssel, hogy a $\lambda_j x_j$ kibocsátások a következő időszak előrejelzett termelési szintjei, ezekhez méretezték az ágazatok a beszerzéseiket. Vezessük be az időszakra utaló indexeket, és tegyük fel tehát, hogy $\langle\boldsymbol{\lambda}\rangle\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t+1}$, azaz $\langle\boldsymbol{\delta}\rangle\mathbf{x}_t = \Delta\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t$, ahol $\mathbf{x}_t$ a t-edik időszak, $\mathbf{x}_{t+1}$ a $(t+1)$-edik időszak kibocsátása, $\boldsymbol{\delta} = (\delta_j)$ a kibocsátási szint változásának előrejelzett üteme. Leontief statikus vagy inkább időlegesnek mondható mérlegegyensúlyi összefüggését ezzel egy több időszakon átívelő folyamatba, növekedési pályába helyezhetjük:

$$\mathbf{x}_t = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \tilde{\mathbf{A}}\Delta\mathbf{x}_t = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_{t+1}. \tag{8}$$

Érdemes közbevetőleg megjegyezni, hogy a fenti $\mathbf{x}_t = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \tilde{\mathbf{A}}\Delta\mathbf{x}_t$ intertemporális forma lesz majd a zárt, *tetszőleges hosszúságú termelési periódust*, de *egyperiódusú beruházásbeérést* feltételező dinamikus Leontief-modellek naturális egyensúlyi feltételének matematikai alakja is. Azzal a fontos különbséggel, hogy $\Delta\mathbf{x}_t$ szorzója ott már a tőkelekötési (beruházási) együtthatók mátrixa lesz. Egy termelési periódus esetén az utóbbi megegyezne az úgynevezett *teljes körű, folyó ráfordítási együtthatók* mátrixával, amely az elhasznált állóeszközök pótlásához és a munkaerő újratermeléséhez szükséges ráfordításokat is tartalmazza a felhasznált anyagok mellett.

A kapott (8) összefüggések további kiegészítő feltevésekre és azokon nyugvó magyarázatra szorulnak ahhoz, hogy elfogadható közgazdasági értelmezést adhassunk nekik. Lássuk be, mindenekelőtt, hogy a t-edik időszak kibocsátásának ($\mathbf{x}_t$) és a ($t+1$)-edik időszak ráfordításának ($\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_{t+1}$) egyenlősége csak akkor lesz az egyensúly szükséges feltétele, ha a termelés – mint Neumann modelljében – minden ágazat esetében egyöntetűen egyperiódusú. Ehhez viszont fel kellene tenni, hogy a modellben csak olyan ágazatok szerepelnek, amelyek „készletezhető” termékeket bocsátanak ki, mint – megint csak – Neumann modelljében. A szolgáltatások és a szolgáltató ágazatok lehetséges kezelésének kérdésére rövidesen visszatérünk.

Lássuk be azt is, hogy a (8) egyenletrendszer önmagában még egy lezáratlan, csonka modell! A változók ($\mathbf{x}_t$ és $\mathbf{x}_{t+1}$) száma ugyanis $2n$, az egyenletek száma pedig mindössze n. Ahhoz, hogy egyértelmű megoldást feltételezhessünk, a változók és egyenletek számának meg kell egyeznie, tehát szűkíteni kell a változók számát és/vagy növelni az egyenletek számát. (A két lehetőség gyakran ugyanahhoz az eredményhez vezet.) Leontief, mint láttuk, voltaképpen az $\mathbf{x}_{t+1} = \langle\boldsymbol{\lambda}\rangle\mathbf{x}_t$ kiegészítő feltétellel érte ezt el, ahol $\boldsymbol{\lambda}$ elemei ismert paraméterek (ezek segítségével becsülte meg a ráfordítási együtthatókat). Ettől a feltevéstől vált modellje – ugyan kérdéses elméleti megalapozottságú, de mindenesetre – komparatív statikai elemzésre alkalmas, legalábbis annak látszó, statikus, illetve időleges egyensúlyi modellé.

Ahhoz azonban, hogy az $\mathbf{x}_t = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}_{t+1}$ intertemporális mérlegegyenleg valóban dinamikus tartalmat nyerjen, ezt a két időszak közötti kapcsolatot be kellene tudnunk helyezni egymást követő időszakok hosszabb, összefüggő láncolatába. Két ismert lehetőség kínálkozik erre. Az egyiket a véges időhorizontot feltételező optimális növekedési pálya elemzése kínálja, amelyben a külső (exogén) feltételek között szerepelhet például az indulókészletek állománya, illetve egy távlati cél, például a maximalizálandó zárókészletek kívánatos struktúrája. A másik lehetőséget egy végtelen időhorizontú stacionárius növekedési pálya elemzése kínálja, amit Neumann választott. Az úgynevezett *autópálya- (turnpike)* tételekből[4] azóta már tudjuk, hogy ez a két lehetőség voltaképpen nem is nagyon különbözik egymástól, mert kellően hosszú, véges időszak kijelölése esetén az optimális növekedési pálya a vizsgált időszakban rajta van a stacionárius növekedési pályán, vagy igen közel áll hozzá.

Mivel az utóbbi technikailag egyszerűbb, ezért célszerű ebben is Neumann példáját követni. Legyen tehát a kiegészítő feltétel $\mathbf{x}_{t+1} = \alpha\mathbf{x}_t$. Ezzel kiegészítve a (8) feltételt, az $\mathbf{x}_{t+1}$ változókat és az idő t indexét elhagyhatjuk. Ennek eredményeképpen az

$$\mathbf{x} = \alpha\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = (1+\delta)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} \qquad \text{(LN.I.1)}$$

homogén egyenletrendszerhez jutunk, ami formai szempontból pontosan megfelel az (L1) – a Leontief-technológiát és szigorú egyenlőségekkel felírt, Neumann-jellegű

[4] Lásd például *McKenzie* [1976] az 1970-es évek első feléig elért eredményeket összefoglaló cikkét.

modell naturális egyensúlyi – feltételének. Innen már – a Neumann-modell feltevéseit és felépítését követve – egyenes út vezet az (L2)-nek megfelelő duális feltételhez.

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p\tilde{A}} = (1+\delta)\mathbf{p\tilde{A}}. \tag{LN.I.2}$$

Úgy tűnik fel tehát, hogy Leontief zárt statikus modelljét dinamizálva eljutottunk egy olyan stacionárius modellhez, amely a Neumann-modell sajátos esetének tekinthető, legfeljebb a ráfordítási együtthatók mátrixainak ($\mathbf{\hat{A}}$, illetve $\mathbf{\tilde{A}}$) meghatározásában van köztük különbség. Ám korai az öröm. Közgazdasági szempontból ugyanis nehezen áthidalható különbségek vannak a két modell között, különösen a munkaerő és fogyasztásának, valamint a tőkelekötés ábrázolása tekintetében. Nézzük meg ezeket közelebbről!

Állomány *versus* folyam, a munkaerő- és a tőkeszolgáltatások ábrázolása

A dinamikus elemzést mindenekelőtt a gazdasági folyamatok időbeli ábrázolása különbözteti meg a statikus modellektől. A statikus modellek jellemző változói egy adott időszak termelését és felhasználását összevontan leíró *folyam (flow) jellegű mutatószámok*, jellemző összefüggései pedig *intra*temporális egyensúlyi feltételek, amelyekben az állományok is „folyamosítva", készletváltozás vagy készletváltozáshoz vezető folyó tevékenységek (például felhalmozás) alakjában jelennek meg. Ilyen típusú mutatószámok szerepeltek a termelést és felhasználást részletező nemzetgazdasági mérlegekben is, és ilyenekre épült még az – elvben a dinamika irányában átalakított – (LN.I) input-output modell is.

A dinamikus modellek jellemzői ezzel szemben az egyes időszakok folyamatainak intenzitását korlátozó *erőforrások* időszak eleji vagy az időszakra jellemző átlagos *állománya*, a modellek összefüggései pedig jellemzően az egyes időszakok mutatóit összekapcsoló *inter*temporális egyensúlyi feltételek. Jellemző példája ennek Neumann modellje, amely valójában a korábbi időszakok termeléséből felhalmozott készletek alakulását követi nyomon a kibocsátásokkal. A készletfelhalmozást kikényszerítő ok alapvetően a termelési periódusok feltételezett, egységesen egy időszakos hossza, általánosabban: az időszakfordulón lezajló *egyszeri csere* feltevése.

Mint erre felhívtuk a figyelmet, Neumann modelljében emiatt csak készletezhető termékek szerepelhetnek, az adott időszak folyamán előállított és egyúttal el is fogyasztott szolgáltatások közvetlenül nem jelenhetnek meg benne – legfeljebb csak közvetve, a kibocsátási kapacitásaikat behatároló készletezhető termékek kibocsátásain (állományain) keresztül. Jó példa erre a munkaerő-szolgáltatás, amely csak az adott időszakban foglalkoztatott munkaerő fenntartásához szükséges fogyasztási cikkek alakjában, azok előző időszaki termelésének részeként (abból az időszak elején beszerzett készleteken keresztül) jelenik meg a modellben, mint erre rövidesen visszatérünk.

Az ágazati kapcsolatok mérlegére épülő input-output modellekben ezzel szemben jellemzően több szolgáltató ágazat is van, nemcsak a munkaerő- és tőkeszolgáltatásokat nyújtó háztartások ágazata. Az egységesen egy termelési periódust feltételező (LN.I) modellben ezek kibocsátásai explicite nem vehetők figyelembe. Neumann ugyanakkor példát mutatott arra, hogyan lehet ilyen folyam jellegű, egyidejű szolgáltatást közvetve, implicit módon figyelembe venni. Már csak ezért is érdemes közelebbről megvizsgálni a munkaerő- és a tőkeszolgáltatások eltérő kezelési módját Neumann és Leontief modelljében.

Neumann ebben is kristálytiszta logikával építkezik, őt nem korlátozza az adatok hiánya, mint Leontiefet.[5] A szükséges adatok hiánya miatt Leontief egyszerűen összevonta a hozzáadott érték kategóriájában a két, egymástól merőben eltérő típusú szolgáltatást, és ágazatonként rögzítette azok kibocsátáshoz viszonyított hányadát. Ez pedig joggal kifogásolható megoldás. Kritizálható főleg amiatt, hogy egyrészt a fogyasztás szerkezetével határozta meg a két tényező együttes árindexét, másrészt a fogyasztási kiadásokhoz viszonyítva határozta meg „együttes reálbérüket" (annál nagyobb az összevont termelési tényező „reálbére", minél kisebb a fogyasztás aránya a nemzeti jövedelmen belül).

Egy statikus elemzésben még valamelyest elfogadható, hogy semmit sem lehet tudni sem a termelési, sem a beruházási periódusokról, sem a tőkeelemek ezekkel részben összefüggő forgási sebességéről vagy megtérülési idejéről. A helyzet azonban merőben megváltozik, ahogy áttérünk a dinamikus, egy termelési periódust és emiatt egyperiódusú tőkemegtérülést feltételező (LN.I) modellre.

Neumann a tőkeszolgáltatás kezelése kapcsán logikusan abból indul ki, hogy egy termelési periódus esetén az adott időszak termelése érdekében lekötött tőke nem más, mint az adott kibocsátáshoz szükséges összes, az előző periódusból készletek formájában átvett, tőkeként megelőlegezett ráfordítás (ami mindig a következő időszak elején fog megtérülni). Tökéletes verseny feltételei között viszont – követi Neumann a klasszikus feltevést – egyensúlyban a kibocsátás értékének meg kell egyeznie a termelési költségekkel, ahol intertemporális döntések esetén a költségeket az egyensúlyi kamatlábbal közös jelen időszakra kell diszkontálni. Ez jelenik meg nála az egyensúlyi árak feltételében.

Neumann modellje, csak közvetve ugyan, de példát mutat arra is, hogyan lehet elméleti szempontból elfogadható módon ábrázolni a munkaerő-szolgáltatást egy termelési periódust és így készletezhető termékeket feltételező modellben. Nézzük meg ezt közelebbről! Válasszuk le mindenekelőtt, Neumann megoldását követve, a tőkeszolgáltatást a munkaerőről! Helyettesítsük be a hozzáadott értékeknek az $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrix utolsó sorában szereplő együtthatói helyébe a munkaerő-felhasználási együtthatók ($\boldsymbol{l}$, l_0) vektorát, ahol l_0 az úgynevezett improduktív, a munkaerő újratermeléséhez felhasznált munkaerő. A változtatások hangsúlyozására jelöljük a háztartások oszlopában megjelenő, a munkaerő újratermeléséhez szükséges ráfordításokat $(\mathbf{c}, l_0)^{\mathrm{T}}$ vektorral, amely csak utolsó elemében (0 helyett l_0) tér el a korábbi $\mathbf{x}_{n+1}$ vektortól. Ennek jelentőségére még rövidesen visszatérünk. Eme helyettesítések után az alábbi, a vonatkozó irodalomból jól ismert, a munkaerő újratermésének feltételeivel kibővített, $\breve{\mathbf{A}}$ input-output együtthatómátrixot kapjuk, amely

[5] „… az állóeszközszámlák vizsgálata … ilyen értelmű »tőkeelszámolás« új közgazdasági problémák egész sorát vetné fel, mint például az értékcsökkenés, a készletek értékelése stb." (*Leontief* [1936] 110. o.)

csak az utolsó sorában, de tartalmában jelentősen eltér a Leontief által bevezetett $\tilde{\mathbf{A}}$ együtthatómátrixtól:

$$\breve{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{c} \\ \boldsymbol{l} & l_0 \end{pmatrix}.$$

Az $\breve{\mathbf{A}}$ mátrixban szereplő $\mathbf{A}$ részmátrix nem más, mint a nyílt, csak termelőágazatokat tartalmazó input-output modell ráfordítási együtthatóinak mátrixa, mint annak megjelenését előre jeleztük. Már több helyütt részletesen megmutattuk, hogy egyáltalán nem mindegy, hogy miként vesszük figyelembe az improduktív munkaerőt és annak szükséges fogyasztását (például *Zalai* [1987], [2012]). Szinte minden ismert elemzés kibővített formájú együtthatómátrixot használ, amely esetén az egy termelési periódust feltételező modell egyensúlyi feltételei az (9) és (10) lesznek:

$$\breve{\mathbf{x}} = \alpha\breve{\mathbf{A}}\breve{\mathbf{x}}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{x} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}l_s), \quad l_s = \alpha(\boldsymbol{l}\mathbf{x} + l_0 l_s), \tag{9}$$

$$\breve{\mathbf{p}} = \alpha\breve{\mathbf{p}}\breve{\mathbf{A}}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}(\mathbf{A} + w\boldsymbol{l}), \quad w = \alpha(\mathbf{p}\mathbf{c} + wl_0), \tag{10}$$

ahol $\breve{\mathbf{x}}$ és $\breve{\mathbf{p}}$ az $n + 1$ elemű kibocsátási és árvektort jelöli, $\mathbf{x}$ és $\mathbf{p}$ azok produktív ágazatokra vonatkozó első n elemét, l_s (azaz x_{n+1}) az adott időszakban újratermelt (de csak a következő időszak elején kibocsátott!) munkaerő mennyisége, w pedig az egységnyi munkaerő egyensúly ára, azaz munkabére (p_{n+1} megfelelője).

Ezek szerint az adott időszakban újratermelt l_s munkaerő szolgáltatásai, a többi jószághoz hasonlóan, csak a következő időszakban kerülnek értékesítésre. Nem könnyen ugyan, de található rá magyarázat. A munkaerő újratermelése pedig „produktív”, a közönséges javakhoz hasonló nyereséges vállalkozásként jelenik meg benne, ami – ha lehet – még kritikusabb feltevés. Érdemes ennek kapcsán megjegyezni, hogy az árak egyensúlyi feltételei egyébként megfeleltethetők a *termelési árak* Ricardo által használt meghatározásának. Ő ugyanis feltette, hogy a tőkések utólag („betakarítás után”) fizetik ki a munkásokat, tehát nekik kell megelőlegezniük az adott időszaki fogyasztásuk költségét. Ha viszont elhagyjuk a munkaerőre vonatkozó feltételekből az α szorzót, vagyis $w = \mathbf{p}\mathbf{c} + wl_0$, akkor a (10) képlet a termelési árak Marx-féle definíciójának feleltethető meg. Nála ugyanis a tőkések előlegezik meg a munkabéreket, azaz a munkaerő fogyasztásának a költségét (ezt volt nála az úgynevezett *változó tőke*).

Könnyen megmutatható, továbbra is egy tőkemegtérülési periódust feltételezve, hogy a Marx-, illetve a Ricardo-féle termelési árak arányai megegyeznek egymással, s ha ugyanazt az árszintet választjuk, akkor a Ricardo esetén kapott bérszint éppen a marxi α-szorosa lesz. Ez – mint Marx és mások feltették – akár úgy is értelmezhető, mintha a munkások is profithoz jutnának, másképpen fogalmazva: mintha a tőkések átengednék nekik azt a kamatot, amire igényt tartanának akkor, ha ők előlegeznék meg a fogyasztásukat. Tetszetős, de Ricardo aligha értelmezte volna ezt a munkásháztartások profitjának, ha felfigyelt volna egyáltalán erre a lehetséges értelmezésre.[6]

[6] A neoklasszikus elmélet, azon belül is a tökéletes piaci verseny és az emberi tőke hívei természetesen örömmel elfogadják az egyensúlyi bérek ilyen értelmezését. Egy ilyen gazdaságban mindenki tőkés a maga módján! Kis tőkés, nagy tőkés – egyre megy.

Megmutatjuk, hogy Neumann megoldása valójában Marx értelmezésének felel meg. Ez nem véletlen, mert Neumann tanulmányából kiderül, hogy a klasszikus közgazdászokhoz hasonlóan ő is úgy képzelte el a gazdaságot, mint olyan, egymással cserekapcsolatban levő termelőegységek halmazát, amelybe nemcsak a termelési eszközök, hanem a munkások és az alkalmazottak is beletartoznak. Tegyük fel, hogy a munkaerő homogén (vagy a termelésben felhasznált munkaórákat egyenértékekre, „absztrakt munkaórákra" átszámítva ábrázoljuk), és hogy a munkaerő minden munkaórájának újratermeléséhez ugyanakkora – a $(\mathbf{c}, l_0)^{\mathrm{T}}$ vektorban szereplő – ráfordításokra van szükség. A Neumann-modell ráfordítási együtthatóinak $\hat{\mathbf{A}}$ mátrixa ekkor $\mathbf{Ax} + \hat{\mathbf{c}} \circ \boldsymbol{l}$ alakban felbonthatóvá válik, ahol $\mathbf{A}$ a közönséges árukból szükséges (termelő) ráfordítások együtthatóit, a $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{c}} \circ \boldsymbol{l}$ mátrix pedig a munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztási együtthatókat tartalmazza, $\hat{\mathbf{c}} = (1 - l_0)^{-1}\mathbf{c}$, és a $\circ$ szimbólumot a diadikus szorzat jelölésére vettük igénybe. Egyszerűen belátható, hogy az így kapott

$$\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{Ax} + \mathbf{c}l_s), \quad l_s = \boldsymbol{l}\mathbf{x} + l_0 l_s, \tag{11}$$

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}(\mathbf{A} + w\boldsymbol{l}), \quad w = \mathbf{pc} + wl_0 \tag{12}$$

feltételek nem mások, mint a Neumann-formájú (LN) modellben összevont alakra redukált

$$\mathbf{x} = \alpha\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{Ax} + \hat{\mathbf{c}} \circ \boldsymbol{l}), \tag{LN.II.1}$$

$$\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}\hat{\mathbf{A}} = \alpha\mathbf{p}(\mathbf{A} + \hat{\mathbf{c}} \circ \boldsymbol{l}) \tag{LN.II.2}$$

egyensúlyi feltételek, pontosabban azok kibontott formájú megfelelői.

A $\hat{\mathbf{c}}$ vektor nem más, mint az egységnyi *munkaerő* újratermeléséhez közvetlenül és – az újratermeléséhez igénybe vett improduktív munkaerőn keresztül – közvetve *szükséges fogyasztás vektora*.[7] Az $\mathbf{A} + (1 - l_0)^{-1}\mathbf{c} \circ \boldsymbol{l}$ alakkal meghatározott $n \times n$-es méretű $\hat{\mathbf{A}}$ mátrixot a teljes körű ráfordítási együtthatók *összevont formájú* mátrixának nevezhetjük, szemben az ugyanazon paraméterekből felépített, $(n + 1) \times (n + 1)$-es méretű *kibővített formájú* $\breve{\mathbf{A}}$ együtthatómátrixszal.

Megjegyezzük, hogy a munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztás fenti értelmezése teljesen egybecseng Marxnak A tőkében adott definíciójával: az üzleti szférában foglalkoztatott produktív és a munkaerő újratermelésében foglalkoztatott improduktív munkaerő (orvos, tanár stb.) fogyasztása együttvéve. A munkaerő a klasszikus közgazdászok és Marx felfogásában olyan különleges áru, amelynek az újratermelését nem a profitmotívum szabályozza, s az árát, a munkabért nem a kereslet-kínálat alakítja ki, hanem a történelmileg és társadalmilag kialakuló szükséges fogyasztás. Mindezért a „termelésében" nem is keletkezik sem értéktöbblet, sem profit. Érdekes, hogy a marxi munkaértékek és termelési árak matematikai újraformulázása és elemzése során a legtöbb kutatónak, köztük olyan nagyságoknak is, mint *Bródy* [1969], *Morishima* [1973],

[7] Érdemes megjegyezni, hogy ez teljesen egybecseng azzal, ahogyan Marx A tőkében definiálta a szükséges fogyasztást. A munkaerő nála különleges áru, amelynek a „termelésében" nem keletkezik sem értéktöbblet, sem profit.

Morishima–Catephores [1978], elkerülte a figyelmét ez az alapvető marxi tézis és annak következménye, nevezetesen, hogy Marx elemzéseit korrekt módon csak a teljes körű ráfordítási együtthatók mátrixának *összevont formáját* használva lehet matematikai formákba önteni. Ők ugyanis rendre a kibővített formát vették alapul.

A Perron–Frobenius-tételek ismeretében megmutatható (lásd *Zalai* [2012]), hogy a *kibővített* és az *összevont* mátrixok nevezetes matematikai tulajdonságai megegyeznek egymással. Így például a két mátrix domináns sajátértéke csak egyidejűleg lehet 1, 1-nél nagyobb vagy kisebb (tehát produktív is), illetve reducibilis. Mindezek fényében meglepőnek tűnhet, hogy a stacionárius egyensúlyi növekedés esetében a kétféle formával felírt modellek mégsem *egyenértékűek*, pontosabban fogalmazva, csak az egyszerű újratermelés ($\alpha = 1$) esetén vezetnek azonos eredményre, amint azt a (9)–(10) és a (11)–(12) összefüggések összevetéséből is láthatjuk.

Az utóbbi összehasonlítás arra is felhívja a figyelmet, hogy a két forma között a közgazdasági különbség a szolgáltatás (itt a munkaerő-szolgáltatás) kezelésében van. Az összevont forma használata esetén a szolgáltatások kibocsátása az adott időszaki felhasználás igényeit elégíti ki, ezért az egyensúlyi feltétele *intra-* és nem *inter*temporális.

Leontief modelljéből Neumann-modell – szintén fából vaskarika

Tegyük fel újra kérdésünket: vajon Leontief-modellnek tekinthető-e a Neumann-modell Leontief-technológiát feltételező, kvázi Neumann-modell változata. A Leontief-féle zárt input-output modell dinamizálásával nyert (LN.II) modell mintha azt sejtetné, hogy az már majdnem az ezt igazoló, keresett modell. Már csak egy akadályt kell leküzdeni. Nevezetesen azt, hogy a munkaerő-szolgáltatáson kívül lehetnek más, nem készletezhető szolgáltatást nyújtó ágazatok is, amelyek esetében szintén nem helytálló az egy termelési periódus feltevése.

Valaki joggal gondolhatná, hogy nem kell mást tenni, mint ezekre is alkalmazni a munkaerő esetében követett megoldást. Azaz csoportosítanunk kell az ágazatokat aszerint, hogy a kibocsátásuk készletezhető termék (legyen indexeik halmaza: I_k!), vagy azonnal felhasználandó szolgáltatás (I_f). Az utóbbiakat – a munkaerő esetében követett módon – kiiktathatjuk a modellben megjelenő ágazatok közül, azaz redukáljuk a modellt a készletezhető kibocsátással rendelkező ágazatokra. Mint láttuk, ezzel egyenértékű megoldás az is, hogy továbbra is megjelenítjük explicit módon az összes ágazatot, de a szolgáltatások esetében, eltérően a készletezhető javaktól, nem *inter-*, hanem *intra*temporális egyensúlyi feltételeket használnunk.

Kezdjük ez utóbbi megoldással! Bontsuk fel tehát az ágazatokat e szerint, majd ennek megfelelően az (LN.I) modell együtthatómátrixát és az egyensúlyi feltételeket! A naturális összefüggésekre ennek eredményeképpen az

$$\mathbf{x}_k = \alpha(\tilde{\mathbf{A}}_{kk}\mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{A}}_{kf}\mathbf{x}_f), \qquad \text{(LN.I.1.}k\text{)}$$

$$\mathbf{x}_f = \tilde{\mathbf{A}}_{fk}\mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{A}}_{ff}\mathbf{x}_f, \qquad \text{(LN.I.1.}f\text{)}$$

az árak esetében pedig a

$$\mathbf{p}_k = \alpha(\mathbf{p}_k\tilde{\mathbf{A}}_{kk} + \mathbf{p}_f\tilde{\mathbf{A}}_{fk}), \qquad (\text{LN.I.2.}k)$$

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_k\tilde{\mathbf{A}}_{kf} + \mathbf{p}_f\tilde{\mathbf{A}}_{ff} \qquad (\text{LN.I.2.}f)$$

egyenletrendszert kapjuk meg.

A naturális összefüggések jól értelmezhetők. A készletezhető termékek kibocsátása és felhasználása között megtartottuk az egyperiódusú késleltetés (termelési periódus) feltevését, a szolgáltatások esetében viszont értelemszerűen egyidejűséget feltételeztünk. Az „egyensúlyi" árakat meghatározó duális feltételek készletezhető termékekre vonatkozó (LN.I.2.*k*) egyenletei szintén rendben vannak. Ám a szolgáltatásokra vonatkozó, tőkemegtérülést nem tartalmazó (LN.I.2.*f*) „nonprofit" áregyenletek közgazdasági szempontból elfogadhatatlanok. Egy normálisan működő, növekvő, tőkés piacgazdaságban ugyanis, egyensúly esetén, minden ágazatban kell lennie lekötött tőkének, és keletkeznie kell tiszta jövedelemnek, amit Neumann modelljében a kamat képvisel, Leonfief modelljében pedig a hozzáadott érték munkaerőköltségen felüli része.

Egyébként, ha – mint joggal feltehető – az $\tilde{\mathbf{A}}_{ff}$ mátrix produktív, vagyis létezik nemnegatív Leontief-inverze, akkor a fenti feltételek valóban redukálhatók a készletezhető termékekre, azaz a Neumann-modellnek megfelelő alakra:

$$\mathbf{x}_k = \alpha[\tilde{\mathbf{A}}_{kk} + \tilde{\mathbf{A}}_{kf}(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{ff})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_{fk}]\mathbf{x}_k = \alpha\hat{\mathbf{A}}_{kk}\mathbf{x}_k, \qquad (\text{LN.I.1.}r)$$

$$\mathbf{p}_k = \alpha\mathbf{p}_k[\tilde{\mathbf{A}}_{kk} + \tilde{\mathbf{A}}_{kf}(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}_{ff})^{-1}\tilde{\mathbf{A}}_{fk}] = \alpha\mathbf{p}_k\hat{\mathbf{A}}_{kk}. \qquad (\text{LN.I.2.}r)$$

Igen ám, de ahhoz, hogy a Neumann-modell formájához juthassunk, megfizethetetlen közgazdasági ára van: a profitnak megfelelő kamatot ki kell iktatnunk a szolgáltató ágazatok hozzáadott értékéből, minden szolgáltatást „nonprofit" tevékenységnek kellene tekintenünk. Ez azonban csak a munkaerő esetében, illetve egy vegyes, nem tiszta tőkés piacgazdaságban néhány közösségi szolgáltatás esetén lenne elfogadható feltevés.

Egy kínálkozó rövidebb út: Leontief dinamikus input-output modellje

Ezzel a hosszas – és sokak számára esetleg körülményesnek ható – levezetéssel sem jutottunk pozitív eredményre, Leontief zárt modelljétől elindulva sem tudtuk igazolni a vizsgált állítást, hogy egy termelési periódus feltételezésével közgazdasági szempontból értelmes Neumann-jellegű modellhez juthatunk el. Az egy termelési periódus feltételezése egyébként is minden bizonnyal idegen lett volna a gyakorlati érvényességet nagyra becsülő, mindkét lábával az empíria talaján álló Leontieftől. Sem ő, sem munkatársai nem is ebben az irányban keresték az input-output modell dinamizálásának lehetőségét. Bár, hozzátesszük, az elmozdulás a dinamikus modell irányába óhatatlanul *ex ante* szemléletű, absztrakt elméleti modellek felé vezet, tehát távolít a gyakorlattól, mivel egy sor, empirikusan nehezen beazonosítható és mérhető fogalom bevezetését teszi szükségessé.

Mindenesetre egy diszkrét modell esetén a dinamika ábrázolása szükségessé teszi az idő szakaszolását, amelyre Leontief a beruházások egységes, egy időszakos beérési periódusának kevésbé életidegen, bár még mindig meglehetősen absztrakt feltevését választotta az egy termelési periódus helyett. A zárt stacionárius modell naturális egyensúlyi feltételének az így nyert általános matematikai formája

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \rho\mathbf{B}\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \rho\mathbf{B})\mathbf{x}, \tag{DL.1}$$

ahol a **B** együtthatómátrix oszlopában szereplő elemek az adott ágazat kibocsátásának egységnyi növeléséhez szükséges beruházási (felhalmozási) igényeket mutatják. A jelölésekkel egyelőre szándékosan nyitva hagytuk a kérdést, hogy $(n+1) \times (n+1)$-es méretű *kibővített* vagy $n \times n$-es méretű *összevont* együtthatómátrixokkal és ezekhez méretezett vektorokkal van-e dolgunk. Az (LN.I) modell naturális feltétele kétségkívül emlékeztet a fenti mérlegegyenlegre.

A b_{ij} együtthatók azt mutatják meg, hogy a j-edik ágazat kapacitásának egységnyi bővítése esetén az i-edik ágazat kibocsátásából mennyit kell felhasználni. Neumann modelljében a tőkejavak (álló- vagy forgóeszközök) homogén, készletezhető termékek voltak, amelyek időszak eleji nyitó állománya megegyezett az előző időszak kibocsátásával. Leontief modelljében a beruházások révén létrehozott ágazati állóeszközök sajátos összetett, kompozit javak lesznek. Vissza kell majd térnünk azokra az izgalmas kérdésekre, hogy vajon mi lesz a lekötött tőkejavak megjelenési formája, hogyan lehet vagy kell mérni volumenüket, mi határozza meg az árukat és értékcsökkenésüket.

Előbb azonban vessük össze az (LN.I.1) és a (DL.1) modellfeltételeket! Ami rögtön szembetűnik, hogy az (LN.I.1) feltételben a „beruházási" együtthatók mátrixa megegyezett a folyó ráfordítási együtthatók mátrixszával. Kevésbé szembetűnő viszont az, hogy a (DL.1) feltételben az **A** folyó ráfordítási együtthatók mátrixának már nemcsak a felhasznált anyagok (forgóeszközök) és a munkaerő (vagy csak annak szükséges fogyasztása) iránti igényeket kell tartalmaznia, hanem valamilyen formában az elhasznált állóeszközök pótlási igényeit is. A beruházás ($\mathbf{B}\Delta\mathbf{x}$) ugyanis a termelési kapacitások bővítéséhez ($\Delta\mathbf{x}$) szükséges, azaz nettó beruházásról van szó.

Leontief input-output modelljében egyébként, mint látható, nem jelennek meg sem az álló-, sem a forgóeszközök, csak azok bővítésének az igénye a beruházáson keresztül, amely pusztán az ágazatok termékeit és szolgáltatásait felhasználva, tehát munkaerő és tőke közvetlen igénybevétele nélkül hozza létre ezeket az adott időszak végső fogyasztásának részeként. Egy adott ágazat különböző időszakokban beállított állóeszközeit emiatt egymással azonos fizikai állagú, termelékenységük szempontjából homogén javakként kezeli. Élettartamuk meghatározatlan, mert feltevés szerint folyamatosan felújítják, pótolják őket, és a folyó ráfordítási együtthatók mátrixa ez irányú ráfordítási igényeiket is tartalmazza. Az egy időszak alatti elhasználódásuk, kopásuk mértéke elvben megadható exogén amortizációs rátákkal $\left(r_j^{\mathrm{a}}\right)$, amelyekből közvetve következtethetünk átlagos élettartamukra, illetve a pótlásukhoz szükséges ráfordítási igényekre.

Neumann-nál ezzel szemben, mint láttuk, az állóeszközök önálló termékek, ugyanolyan módon, termelőtevékenységek révén állnak elő, mint minden más termék. Az egyperiódusú termelési ciklus feltevése, valamint az állóeszközök eltérő korú változatainak bevezetése és megkülönböztetése révén minden termék egy időszakra lekötött forgóeszközként jelenik meg. Az utóbbi következtében az állóeszközök kopása, illetve értékcsökkenése is endogén módon jelenik meg Neumann modelljében.

Rövidesen meg fogjuk mutatni, hogy a dinamikus Leontief-modellben feltételezett ágazati állóeszközöket sajátos, különböző ágazati termékekből adott szerkezetben összetett (kompozit) javakként lehet értelmezni, és a modell alkalmas átírása révén explicit módon meg is lehet jeleníteni őket.

Mielőtt azonban erre rátérnénk, írjuk fel a (DL.1) primális feltétel alapján a zárt stacionárius modell árrendszerének egyensúlyi feltételeit, továbbra is feltételezve a naturális és az értékbeli egyensúlyi feltételek szimmetrikus dualitását, illetve a gazdaság irreducibilitását:

$$\mathbf{p} = \mathbf{pA} + \rho\mathbf{pB} = \mathbf{p}(\mathbf{A} + \rho\mathbf{B}). \tag{DL.2}$$

Irreducibilis **A** mátrix esetén itt is könnyen megadhatjuk az egyensúly létezésének szükséges és elégséges feltételeit: **A** domináns sajátértékének 1-nek vagy 1-nél kisebbnek kell lennie, és ilyen esetben létezik olyan nemnegatív ρ érték, amely mellett az $(\mathbf{A} + \rho\mathbf{B})$ mátrix domináns sajátértéke 1 lesz, **x** és **p** pedig ehhez tartozó jobb oldali és bal oldali sajátvektora lesz.

A (DL) modellpár implicit, de annál kritikusabb feltevése, hogy **B** nemcsak a beruházási mátrix, hanem egyidejűleg a tőkelekötési együtthatók mátrixa is. Ez pedig egyáltalán nem kézenfekvő feltevés. A beruházások ráfordításai ugyanis az ágazati kibocsátásokéihoz hasonlóan folyó ráfordítások, köztük tehát megjelennek nem készletezhető szolgáltatások is. A tőkelekötést, a tőkejavakat viszont csak tartósan lekötött forgó- és állóeszközök állományaival, készleteivel lehetne igazából fizikai formában megjeleníteni.

Ahhoz, hogy *egy termelési periódus* esetén a **B** mátrix egybeessen **A**-val, arra lenne szükség, hogy a nulla és a nem nulla elemek tekintetében **A** és **B** mátrix szerkezete megegyezzen egymással. Talán éppen ezt felismerve elemezte oly hosszasan Bródy András ezt a kérdést könyvében, és a következő megállapításra jutott:

> „A folyó ráfordítások **A** mátrixa és a tőkeráfordítások **B** mátrixa közötti kapcsolat azonban igen szoros, bármennyire is függetleneknek tűnnek fel első látásra. Termelési eszközök ráfordítását jelzi az első mátrix, termelési eszközök lekötését a második. … Az **A** mátrix ábrázolta termékáramlatok és a **B** mátrix által megadott termékkészletek … valójában csak egyazon gazdasági jelenség, egyazon gazdasági művelet két oldala." (*Bródy* [1969] 64. o.)

A folyó ráfordítások és a tőkelekötések között, Marxra és *Lange* [1961]-ra hivatkozva, Bródy a megtérülési idővel (t_{ij}) próbált meg kapcsolatot teremteni, a következőképp: $b_{ij} = a_{ij}t_{ij}$.[8] A *Bródy* [1969] 71. oldalán is megjegyzi, hogy b_{ij} nem magának a j-edik szektornak a tőkeigényességét méri, hanem az egységnyi j-edik termék előállítása érdekében „az egész társadalmi termelés tőkeigényét, lekötését az i-edik termék formájában". Úgy véli, hogy a „statisztikai gyakorlat e **B** mátrix mérését is lehetővé teszi … a gyakorlat által megkívánt pontossággal" (77. o.), ugyanúgy, mint az **A** mátrixét.

[8] Lange elemzésében egyrészt végig feltette, hogy anyagi formát öltő, készletezhető termelési eszközről van szó, másrészt nála t_{ij} a termék fizikai élettartama, amely végén teljesen megsemmisül, és teljes értéke átkerül az előállított termékek értékébe. Bródy annyiban helyesen korrigálta Langét, hogy nem egyszerűen fizikai, hanem gazdasági élettartamról van szó, fizikai és erkölcsi kopásról.

Bár ezek a megállapítások erősen vitathatók, bennünket, itt és most, nem annyira b_{ij} vagy, ami ezzel egyenértékű, t_{ij} statisztikai becslésének fogas kérdése izgat, mint inkább a feltevés elméleti jogosultsága. Bródy is pontosan tisztában volt vele, hogy a felhasznált termék vagy, *nota bene*, a szolgáltatás megvételétől az abból készülő termék vagy szolgáltatás értékesítéséig „életútjának legforradalmibb *változásain* megy át. Állapota sem fizikai értelemben, sem értékét tekintve nem változatlan." (65. o.) A termelési célra megvásárolt termékek jellemző fizikai állapotai az anyagkészletek, félkész termék és késztermék készletek. Mikor és hol van, melyik szektorban, milyen készletekben, nem lehet tudni pontosan, de – mint fentebb jeleztük – Bródy szerint ez nem is érdekes, hanem csak „az egész társadalmi termelés tőkeigénye".

Bródy több oldalon át érvel amellett, hogy „… bármilyen kis időtartamra is, *minden* átadott termék lekötődik egy bizonyos pozitív időre. … mint például villamos áram vagy szolgáltatások vásárlásakor." (68. o.) Érvelése azonban egyáltalán nem meggyőző érvelés. Nem lehet meggyőző, ugyanis a folyam jellegű, nem készletezhető szolgáltatások felhasználásuk pillanatában elvesztik saját anyagformájukat, közvetlenül más félkész vagy késztermék alakjában rögzülnek. Bródy itt „a cél szentesíti az eszközt" érvelés csapdájába esett. Kicsit Neumannhoz hasonlóan, aki az $\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{K} > \mathbf{0}$ feltevést, azaz, hogy minden termék részt vesz valamilyen formában, ráfordításként és/vagy kibocsátásként minden eljárásban, hasonló, matematikai ízű érveléssel próbálta meg jelentéktelennek feltüntetni: „tegyünk a nullák helyébe igen kis pozitív számokat". Nulla helyébe azonban bármilyen kis számot is teszünk, az mind Neumann, mind Bródy esetében lényegi minőségében megváltoztatja a modell közgazdasági tartalmát, s ezért érvelésük elfogadhatatlan.

Nos, ha elfogadjuk, amint az Bródy is hangsúlyozza, hogy a termelésben tartósan lekötött álló- és a forgóeszközök csak készletek formájában ragadhatók meg, és az ágazatok között szerepelnek szolgáltatások is, akkor nem állja meg a helyét Bródynak az a feltevése, hogy a folyó ráfordítások és a tőkeigények együtthatóinak mátrixszerkezete a nulla és a nem nulla elemek tekintetében megegyezzen egymással. A szolgáltatásokhoz tartozó sorokban ugyanis az utóbbiban mindenhol nulláknak kell szerepelniük. Mindaddig tehát, amíg vannak szolgáltatásokat kibocsátó ágazatok, és miért ne lennének, a beruházási együtthatók $\mathbf{B}$ mátrixa nem lehet egyidejűleg a tőkelekötési együtthatók mátrixa is.

E megállapítás kapcsán vissza kell térnünk a nyitva hagyott kérdésre: vajon $(n+1) \times (n+1)$-es méretű *kibővített* vagy $n{\times}n$-es méretű *összevont* együtthatómátrixokkal lehet, illetve kell megadni a stacionárius (dinamikus) Leontief-modell (DL) feltételeit. Ha elfogadjuk a fentebb kifejtetteket, akkor $(n+1) \times (n+1)$-es méretű együtthatómátrixok használata esetén a tőkeigények $\mathbf{B}$ együtthatómátrixának utolsó sorában csak nullák lehetnek (munkaerőt nem lehet tőkeként lekötni!), és ugyanígy kell lennie minden más szolgáltató ágazat esetében is. Továbbá, ha elfogadjuk Marx és a klasszikus közgazdászok tételét, hogy a munkaerő újratermelésében nem keletkezik profit, akkor ugyanezen mátrix utolsó, a háztartások ágazatának oszlopában sem lehetnek mások, csak nullák. A háztartások által beszerzett tartós fogyasztási cikkeket ugyanis nem beruházásként, hanem fogyasztásként kell figyelembe venni az $\mathbf{A}$ mátrixban. Az $(n+1) \times (n+1)$-es méretű $\mathbf{B}$ együtthatómátrixnak csak a produktív ágazatokra vonatkozó $n \times n$-es blokkja fog nullától különböző elemeket tartalmazni, ami meg fog egyezni az *összevont* forma beruházásiegyüttható-mátrixával. Az egyéb, nem tőkeköltségeket elszámoló $\mathbf{A}$ mátrix esetében pedig mindegy, hogy az összevont vagy a kibővített formát alkalmazzuk.

Mindezek alapján megerősíthetjük két korábbi megállapításunkat: a dinamikus Leontief-modellből kiindulva ugyancsak el kell vetnünk az állítást, hogy a Leontief-technológiára épülő Neumann-jellegű modell egy termelési periódust feltételező zárt, stacionárius Leontief-modellként értelmezhető. Éspedig ugyanazon oknál fogva, mint korábban, a nem készletezhető kibocsátással rendelkező szolgáltató ágazatok megléte miatt, aminek a feltevése több mint életszerű. Továbbá, Marxnak az újratermelés és árak egyensúlyára vonatkozó elemzéseit csak a teljes körű ráfordítási együtthatók mátrixa *összevont formáját* használva lehet korrekt matematikai formákba önteni.

Feloldozás: van rokonság, de nem egyenesági

A fenti elemzések alapján megállapítható, hogy a Neumann- és Leontief-modell között az áthidalhatatlannak tűnő különbségek a folyam és állomány szemléletbeli eltéréséből fakadnak. Neumann, annak ellenére, hogy folyam jellegű mutatószámokat (termelés és felhasználás) használt, az egy termelési periódus és az ezzel összefüggő készletezhető kibocsátások feltevése folytán modelljében valójában az időszakok elején rendelkezésre álló termékkészletek időbeli alakulását, akkumulációját elemezte. Az előző időszak kibocsátása adja meg mindig a következő időszak elején rendelkezésre álló készletek induló állományát. Neumann nem foglalkozik a folyamatok időszakon belüli lefutásával, csak a végeredmény számít: mennyi készlet marad a következő időszak számára. A kínálati felesleggel rendelkező termékek elfekvő készletei, mint láttuk, nyomtalanul eltűnnek. Emiatt pusztán az adott időszak kibocsátása lesz az időszak végi záró készletek vektora, mintha az induló készlet megegyezett volna a felhasználói kereslettel.

A két modell közötti szemléletbeli különbségeket nyilván csak úgy tudjuk feloldani, ha oly módon alakítjuk át Leontief dinamikus modelljének felírását, hogy abban is megjelenjenek a készletek, követhető legyen a termelési kapacitásokat meghatározó álló- és a forgóeszközkészletek időbeli alakulása. Ehhez azonban mindenekelőtt további változók bevezetésére lesz szükségünk. Elsőként válasszuk el az állóés a forgóeszközök bővítését célzó beruházásokat egymástól! Jelöljük az állóeszköz-beruházások ráfordítási együtthatóit $\mathbf{B}^{a}$ mátrixszal, $\mathbf{y}^{a} = \left(y_j^{a}\right)$-vel a beruházási szintek vektorát! A beruházások által létrehozott állóeszközöket minden ágazatban egy sajátos kompozit (összetett) tőkejószágként kezelhetjük, amelyek összetétele a $\mathbf{B}^{a}$ mátrix megfelelő oszlopai által adott. Legyen $\mathbf{1B}^{a} = \mathbf{1}$, ami azt jelenti, hogy egységnyi beruházás egységnyi állóeszközt hoz létre. Az ágazati állóeszközök nagyságát ily módon a beruházások szintjével, egy dimenzió nélküli volumenindexszel mérhetjük. Az ágazati állóeszközök $\mathbf{p}^{a}$ árindexeit pedig az őket létrehozó beruházás költségeként, az összetevők árainak súlyozott átlagaként határozhatjuk meg: $\mathbf{p}^{a} = \mathbf{pB}^{a}$.

Jelölje ugyanakkor a $\mathbf{k} = (k_j)$ vektor általános eleme a j-edik ágazat egységnyi kibocsátása által igényelt kompozit ágazati állóeszköz volumenét! Az $\mathbf{x}$ szintű termeléshez tehát $\langle\mathbf{k}\rangle\mathbf{x}$ nagyságú állóeszközre van szükség, a termelés $\Delta\mathbf{x}$ mennyiségű növeléséhez pedig $\langle\mathbf{k}\rangle\Delta\mathbf{x}$ mennyiségre. A forgóeszközkészletek folyamatosan feltölthetők, ezért az állóeszköz-beruházások egyéves beérését feltételező modellben a forgóeszközkészletek növekedését az állóeszközök készleteinek növeléséhez lehet kötni. Egységnyi ágazati kibocsátás forgóeszköz-lekötési igényét így $\mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle$ fogja mutatni, ahol $\mathbf{B}^{f}$ az ágazati állóeszközök mennyiségére vetített forgóeszközigények együtthatóit tartalmazó mátrix. Mindezek alapján az ágazati kibocsátások egységnyi növelésének beruházási igényét végül is $\mathbf{B}^{s}\langle\mathbf{k}\rangle$ formában írhatjuk fel, ahol $\mathbf{B}^{s} = \mathbf{B}^{a} + \mathbf{B}^{f}$.

A forgóeszközök és az állóeszközök megfigyelhetősége és statisztikai számbavétele között jelentős különbségek vannak. Az ágazati állóeszközök volumene és az őket létrehozó beruházások összetétele, azaz a $\mathbf{B}^{a}$ mátrix több-kevesebb pontossággal megbecsülhető. A forgóeszközök azonban, mint arról már volt szó, állandóan változtatják mind fizikai alakjukat (anyag, félkész, késztermék), mind helyüket (termelő, kereskedő vagy felhasználó ágazat), ezért jó esetben csak átlagos készleteiket becsülhetjük meg, ágazati elosztásukat nem. Emiatt a $\mathbf{B}^{f}$ mátrix megbecslése gyakorlatilag lehetetlen. Nem véletlen tehát, hogy az ÁKM-ekre épülő alkalmazott modellekben a forgóeszköz-beruházásokat csak a készletváltozások vektora képviseli.

Írjuk fel most a forgóeszközök és az állóeszközök időbeli alakulásának (intertemporális) mérlegegyensúlyi feltételét ρ növekedési ütemet feltételezve:

$$(\mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle + \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{x} - \mathbf{B}^{a}\mathbf{y}^{a} = \mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = (1 + \rho)\mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle\mathbf{x}, \qquad \text{(LN.III.1}a\text{)}$$

$$\langle\mathbf{1} - \mathbf{r}^{a}\rangle\langle\mathbf{k}\rangle\mathbf{x} + \mathbf{y}^{a} = \langle\mathbf{k}\rangle(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = (1 + \rho)\langle\mathbf{k}\rangle\mathbf{x}. \qquad \text{(LN.III.1}b\text{)}$$

A feltételek magukért beszélnek. Az első feltétel a forgóeszközkészletek alakulását részletezi. $\mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle\mathbf{x}$ nagyságú *állománnyal* indul az időszak elején, amit fokozatosan növel az adott időszaki kibocsátás ($\mathbf{x}$), és csökkent a folyó felhasználás *folyama*, amelynek természetesen része mind az $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$ folyó felhasználás részét képező pótló, mind a $\mathbf{B}^{a}\mathbf{y}^{a}$ által képviselt nettó beruházás. Mindezek egyenlege határozza meg a forgóeszközök időszak végén rendelkezésre álló záró állományát, amelynek meg kell egyeznie a következő időszak termelése által igényelt forgóeszközök $\mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ mennyiségével.

A második feltételcsoport tartalma még ennél is egyszerűbb. Az állóeszközök $\langle\mathbf{k}\rangle\mathbf{x}$ nagyságú induló állománya folyamatosan kopik, az időszak végére pedig $\langle\mathbf{r}^{a}\rangle\langle\mathbf{k}\rangle\mathbf{x}$ mennyiséggel csökken. Ugyanakkor viszont beérnek az állóeszközökre fordított beruházások, aminek köszönhetően $\mathbf{y}^{a}$ mennyiséggel nő az állományuk, ami összhangba hozza kínálatukat a $\langle\mathbf{k}\rangle(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ igényekkel.

A két feltételcsoportot egybefogva a stacionárius egyensúly naturális feltételét a Neumann-modell feltételére emlékeztető (LN.III.1) alakban írhatjuk fel:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle + \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} & -\mathbf{B}^{a} \\ \langle\mathbf{1} - \mathbf{r}^{a}\rangle\langle\mathbf{k}\rangle & \mathbf{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{a} \end{pmatrix} = (1+\rho)\cdot\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle & \mathbf{0} \\ \langle\mathbf{k}\rangle & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{a} \end{pmatrix}, \qquad \text{(LN.III.1)}$$

amelynek a bal oldalán szereplő nettó *készletkibocsátás együtthatómátrixa* a Neumann-modell kibocsátási együtthatói $\mathbf{K}$ mátrixának feleltethető meg, a jobb oldalán lévő *készletfelhasználási együtthatómátrix* pedig az $\hat{\mathbf{A}}$ ráfordítási mátrixnak.

A tevékenységszintek $(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{a})^{T}$ vektora együtt tartalmazza az ágazati (egyedi) termékek és a kompozit ágazati állóeszközök kibocsátását.

Mint látható, a készletkibocsátási együtthatók mátrixa nem tesz eleget a Neumann-modellben elvárt nemnegativitási feltételnek, mivel a kompozit ágazati állóeszközöket előállító második *n* eljárás kibocsátása negatív az ágazati termékekből. De lehetnek negatív elemek az első *n* eljárás oszlopaiban is. Erre még visszatérünk. Az ágazati fő termékeket előállító első *n* eljárás ikertermelő folyamat, mert a főprofil terméke mellett megjelenik kibocsátásként a következő időszakra átvihető ágazati állóeszköz is. Ennek a termelékenysége, feltevés szerint, változatlan marad, csak volumene csökken az amortizációs ráta által meghatározott mértékben.

Könnyen belátható, hogy az (LN.III.1*a*) és (LN.III.1*b*) egyenletek összevonásával, azaz a kompozit ágazati állóeszközök kibocsátását képviselő $\mathbf{y}^{a}$ változókat kiiktatva, a fenti összefüggést a stacionárius Leontief-modell (DL.1) alapegyenletére redukálhatjuk:

$$\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{B}^{a}\langle\mathbf{r}^{a}\rangle\langle\mathbf{k}\rangle]\mathbf{x} + \rho\mathbf{B}\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \rho\mathbf{B})\mathbf{x}, \tag{LN.III.1.r}$$

ahol explicit formában megjelenik az elhasznált állóeszközök pótlási igénye is.

Az (LN.III.1) naturális egyensúlyi feltétel szimmetrikus duális megfelelője megadja az árak egyensúlyi feltételét:

$$\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}^{a}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle + \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}} & -\mathbf{B}^{a} \\ \langle\mathbf{1} - \mathbf{r}^{a}\rangle\langle\mathbf{k}\rangle & \mathbf{E} \end{pmatrix} = (1+\rho)\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}^{a}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle & \mathbf{0} \\ \langle\mathbf{k}\rangle & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{LN.III.2}$$

A kapott meghatározást az egyedi ágazati termékek és a kompozit ágazati állóeszközök szerint kibontva az (LN.III.2*a*) és az (LN.III.2*b*) egyenleteket kapjuk:

$$\mathbf{p}\mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle + \mathbf{p} - \mathbf{p}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{p}^{a}\langle\mathbf{1} - \mathbf{r}^{a}\rangle\langle\mathbf{k}\rangle = (1 + \rho)(\mathbf{p}\mathbf{B}^{f}\langle\mathbf{k}\rangle + \mathbf{p}^{a}\langle\mathbf{k}\rangle), \tag{LN.III.2a}$$

$$-\mathbf{p}\mathbf{B}^{a} + \mathbf{p}^{a} = \mathbf{0}, \tag{LN.III.2b}$$

amiből, megfelelő átalakítások és átrendezések után, most is megkapjuk a stacionárius Leontief-modell azonos, az egyensúlyi árakra vonatkozó (DL.1) feltételét:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{B}^{a}\langle\mathbf{r}^{a}\rangle\langle\mathbf{k}\rangle) + \rho\mathbf{p}\mathbf{B} = \mathbf{p}(\mathbf{A} + \rho\mathbf{B}). \tag{LN.III.2'}$$

Az állóeszközök önálló termékekként való megjelenítésével és a dinamikus Leontief-modell összefüggéseinek alkalmas átírásával eljutottunk tehát egy Neumann-modellre erősen hasonlító, állományszemléletű modellhez, amelyet *általánosított Leontief–Neumann-modellnek* nevezhetünk. A vegyes – folyam- és állományszemléletű – (LN.III) modell alapján beláthatjuk, hogy annak a közös, eddig nem fellelt „ősmodellnek" az általános formája, amelyből mind Neumann, mind Leontief stacionárius modellje származtatható, megegyezik a Neumann-modellével:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{x} \geqq \alpha\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \tag{LN.IV.1}$$

$$\mathbf{p}\hat{\mathbf{K}} \leqq \alpha\mathbf{p}\hat{\mathbf{A}}. \tag{LN.IV.2}$$

Van azonban egy lényeges különbség köztük. Nevezetesen, ebben a modellben a $\hat{\mathbf{K}}$ együtthatómátrix már nemcsak bruttó, hanem nettó kibocsátások mátrixa is lehet. Ennek megfelelően valamelyest módosul az együtthatók jelentése is. A nettó kibocsátási együtthatók azt mutatják meg, hogy mekkora és milyen előjelű az egyes tevékenységek hozzájárulása a termékkészletek időszak végére kialakuló, a következő időszakra áthúzódó állományához. A $\hat{\mathbf{K}}$ készletkibocsátási együtthatómátrix tartalmazhat negatív elemeket is. A nem készletezhető szolgáltatások nettó kibocsátása nulla, bruttó kibocsátásuk ugyanis megegyezik a velük szemben megnyilvánuló folyó felhasználási igényekkel.

Megmutatható a következő:

a) a *tőke nélkülözhetetlen*, azaz $\mathbf{1}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} > 0$, valahányszor $\hat{\mathbf{K}}\mathbf{x} \geqq \alpha\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}$, $\alpha > 0$ és $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$,

b) az $\hat{\mathbf{A}}$ és $\hat{\mathbf{K}}$ együtthatómátrixokkal adott termelési rendszer a felhasznált javak tekintetében *reproduktív*, azaz létezik olyan $\mathbf{x}' \geqq \mathbf{0}$, hogy $\hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}' \geqq \mathbf{0}$, és $[\hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}']_i > 0$, valahányszor $[\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}']_i > 0$

feltevések mellett, amelyek nem mások, mint az $\mathbf{1}\hat{\mathbf{A}} > 0$ és $\mathbf{K1} > \mathbf{0}$ Kemeny–Morgenstern–Thompson-feltételek általánosításai, a fenti általánosított Leontief–Neumann-modellnek is létezik megoldása (részletes bizonyítását lásd *Zalai* [2012]).

Megtaláltuk tehát azt a közvetlen „felmenőt", azt az általánosabb modellt, amely sajátos esetként tartalmazza mind Neumann, mind Leontief stacionárius egyensúlyi modelljét. Ennek matematikai formája megegyezik a Neumann-modellével, de a kibocsátások itt már készletekhez való nettó hozzájárulások, továbbá nem a termelési periódus, hanem a tőkefelhalmozás egységes periódusa szabja meg az időszak hosszát. (Neumannál, mint láttuk, a kettő egybeesett.) Ez az általánosított Leontief–Neumann-modell képes arra, hogy együtt ábrázolja a *készletállományok* időszakokon átívelő felhalmozását és az ezt kialakító vezető *folyamok* egyes időszakokon belüli alakulását is. Mindez rávilágít Neumann és Leontief modelljének rokonságára, ami egyáltalán nem egyenesági, mint többen gondolják, de azért kellően közeli rokonság.

Összefoglalás

A fenti elemzések számos tanulsággal szolgáltak. Emeljük ki a legfontosabbakat! Mindenekelőtt az eddiginél is világosabbá teszi a tőkejavak, különösen az állóeszközök kezelése tekintetében fennálló számottevő különbséget a Leontief- és a Neumann-modell között.

– Neumann-nál az állóeszközök egyedi termékek, Leontiefnél sajátos kompozit termékek.

– A Neumann-modellben az állóeszközök a maguk valós fizikai formájában jelennek meg, a dinamikus Leontief-modellben viszont csak az újratermelésükhöz szükséges beruházási ráfordításokon keresztül, ahhoz hasonlóan, ahogyan Neumann modelljében a munkaerő, amit csak az újratermeléséhez szükséges fogyasztás képvisel.

– A Leontief-modellben az állóeszközök nem jelennek meg valós fizikai formájukban, a Neumann-jellegű modellt már emiatt sem lehet a zárt, stacionárius Leontief-modellel azonosítani.

– Mindebből adódik, mint láttuk, egy nagyon fontos következmény: a stacionárius Leontief-modell árakat meghatározó feltételében a **B** mátrix, Bródy és mások értelmezésével szemben, nem a *tőkelekötési együtthatók* mátrixa, hanem a lekötött tőke értékét meghatározó *beruházási együtthatók* mátrixa. A kettő, ritka kivételtől eltekintve, nem azonos.

Elemzéseink rámutattak arra is, hogy a többperiódusú modellekben kiemelt figyelmet kell fordítani a folyam és állomány jellegű változók, illetve a készletezhető és nem készletezhető javak megkülönböztetésére. Láthattuk, hogy a növekedési modellekben, amelyek eltekintenek a potenciális külső (természeti erőforrás) korlátoktól, a felhalmozás, illetve az azzal versenyző fogyasztás határozza meg a növekedés ütemét. Ebből adódóan alapvetően a *készletek időbeli alakulása a lényeges változó*, még akkor is, ha azok állományai nem is jelennek meg explicit formában a modellben, csak bizonyos folyam jellegű változók (folyó termelés, felhasználás) közvetítésével.

A dinamikus Leontief-modellben például csak a termelés, a fogyasztás és a beruházás folyam jellegű változói jelennek meg. Megmutattuk azonban, hogy pótlólagos változók és feltételek bevezetésével a modell szokásos alapképletét át lehet átalakítani oly módon, hogy abban nyomon követhető legyen az álló- és a forgóeszközkészletek felhalmozása [lásd az (LN.III) modellt]. Ezzel megmutattuk azt is, hogy a dinamikus (stacionárius) Leontief-modell szokásos (DL) egyenletei valójában nem mások, mint ennek az álló- és a forgóeszközkészleteket megjelenítő (LN.III) modellnek a folyamváltozókra redukált változata.

Ezzel a levezetéssel egyszersmind tisztáztuk a Leontief-modellben szereplő **B** mátrix jelentését. Megmutattuk, hogy az „csak" a beruházási együtthatók mátrixa, ami ritka kivételektől eltekintve más, mint a tőkelekötési együtthatók mátrixa. Ezzel visszaállítottuk a modell legitimációját, amit megingatni látszott **B**-nek tőkelekötési együtthatómátrixként való értelmezése, ami kizárná azt, hogy a **B** mátrix szolgáltatási ágazatokhoz tartozó soraiban is legyenek pozitív számok.

A Neumann-modellben is csupán folyam jellegű változók jelennek meg: az egyes időszakokon belüli termelés és fogyasztás. Ám ezt is átalakíthatjuk úgy, hogy – az időszak eleji készletállományok $\mathbf{s}_t$ és a készletváltozás $\mathbf{y}_t^{\mathrm{k}}$ változóját bevezetve – az egyensúlyi feltételekben megjelenjen a készletfelhalmozás. Az alábbi három feltétel képviselhetné a mérlegegyensúlyi követelményeket:

$$\mathbf{s}_t \leqq \mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{y}_{t-1}^{\mathrm{k}}, \quad \mathbf{s}_t = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t, \quad (\mathbf{K} - \hat{\mathbf{A}})\mathbf{x}_t \geqq \mathbf{y}_t^{\mathrm{k}},$$

amiből levezethető alábbi láncolatot:

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_t \geqq \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}_t + \mathbf{y}_t^{\mathrm{k}} = \mathbf{s}_t + \mathbf{y}_t^{\mathrm{k}} \geqq \mathbf{s}_{t+1} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}_{t+1},$$

s ebből, elhagyva a lánc közbülső tagjait, megkapjuk Neumann eredeti $\mathbf{K}\mathbf{x}_t \geqq \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}_{t+1}$ intertemporális, csak folyam jellegű változókat tartalmazó feltételét.

Reméljük, mindezzel sikerült meggyőzően igazolnunk, hogy a Leontief-technológiát feltételező Neumann-modell, ha nem fosztjuk meg azokat eredendő közgazdasági tartalmuktól, idegen mind Neumann eredeti modelljétől, mind Leontief zárt, stacionárius, egy termelési periódust feltételező modelljétől. Ezért teljesen téves és félrevezető az utóbbit a Neumann-modell egyszerűbb változatának tekinteni. Legfeljebb azt állapíthatjuk meg, ha csak pusztán a két modell matematikai feltételrendszerét tekintjük, és feltesszük, hogy mindkettő irreducibilis matematikai struktúra, akkor azok megoldása egybeesik. Ez pedig egy olyan matematikai szempontból triviális megállapítás, aminek nincs semmi közgazdasági tartalma. Mindez csak megerősíti *Neumann* [1947/1965] sokak által figyelmen kívül hagyott figyelmeztetését, hogy a „tapasztalati forrásától nagy távolságban vagy sok absztrakt »behatás« után [a matematika tudományát – *Z. E.*] a degenerálódás fenyegeti" (21. o.). De itt ráadásul nem is matematikáról, hanem matematikai közgazdaságtanról van szó, ami nemcsak „tapasztalati forrásától", hanem az utóbbit jól-rosszul közvetítő verbális közgazdaságtantól is egyre távolabb került sok, egyébként kiváló matematikus művelőjénél.

Hivatkozások

Bródy András [1969]: Érték és újratermelés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Bromek, T. [1974]: Consumption-investment frontier in decomposable von Neumann models. Megjelent: *Łoś, J.–Łoś, M. W.* (szerk.): Mathematical Models in Economics. North-Holland, Amszterdam–New York, 47–57. o.

Kemeny, J. G.–Morgenstern, O.–Thompson, G. L. [1956]: A Generalization of von Neumann's Model of an Expanding Economy. Econometrica 24, 115–135. o.

Lange, O. [1961]: Teoria reprodukcji i akumulacji. Panstwowe wydawnictwo naukowe, Varsó (angolul: Theory of reproduction and accumulation. Pergamon Press, New York–Oxford, 1969.)

Leontyev, V. [1925]: Balansz narodnovo hozjajsztva SZSZSZR. Planovoje Hozjajsztvo, 12. 254–258. o.

Leontief, W. [1928]: Die Wiertschaft als Kreislauf. Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik, Vol. 60. 577–623. o.

Leontief, W. [1936]: Quantitative Input and Output Relations in the Economic System and the United States. The Review of Economics and Statistics, Vol. 18. No. 3. 105–125. o.

Leontief, W. [1937]: Interrelation of Prices, Output, Savings and Investment. A Study in Empirical Application of the Economic Theory of General Interdependence. The Review of Economics and Statistics, Vol. 19. No. 3. 109–132. o.

McKenzie, L. [1976]: Turnpike Theory. Econometrica, Vol. 44. 841–865. o.

Morishima, M. [1973]: Marx's Economics. Cambridge University Press, Cambridge.

Morishima, M. [1974]: The Fundamental Marxian Theorem: A Reply to Samuelson. Journal of Economic Literature, Vol. 12. No. 1. 71–74. o.

Morishima, M.–Catephores, G. [1978]: Value, Exploitation and Growth (Marx in the Light of Modern Economic Theory). McGraw–Hill, London.

Neumann János [1937/1965]: Az általános gazdasági egyensúly egy modellje. Megjelent: *Neumann* [1965] 160–176. o. Eredeti német nyelvű megjelenés: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 1937. 8. 73–83. o.

Neumann János [1947/1965]: A matematikus. Megjelent: *Neumann* [1965] 11–27. o. Az angol nyelvű eredeti: The Mathematician. Megjelent: *Heywood, R. B.* (szerk.): The Works of Mind. University of Chicago Press, Chicago, 180–196. o.

Neumann János [1965] Válogatott előadások és tanulmányok. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Popov P. I. (szerk.) [1926]: Balansz narodnovo hozjajsztva SZSZSZR 1923–1924 goda. TcSU, Moszkva.

Samuelson, P. A. [1937]: A Note on Measurement of Utility. The Review of Economic Studies, Vol. 4. No. 2. 155–161. o.

Schlesinger, K. [1933/1934]: Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 6. 10–11. o.

Zalai Ernő [1987]: Munkaérték és sajátérték. Akadémia Kiadó, Budapest.

Zalai Ernő [1999]: A közgazdaságtan metodológiájáról és a matematikai közgazdaságtanról a Neumann-modell ürügyén. Közgazdasági Szemle, 46. évf. 7–8. sz., 600–629. o.

Zalai Ernő [2011]: Az egyensúlyi ráták unicitása és a bérráta pozitivitása a Neumann-modell általánosításaiban. Közgazdasági Szemle, 58. évf. 1. sz. 20–40. o.

Zalai Ernő [2012]: Matematikai közgazdaságtan II.: Többszektoros modellek és makrogazdasági elemzések. Akadémia Kiadó, Budapest.

Zeuthen, F. [1928]: Denkonomiske Fordeling. Busck, Koppenhága.

Zeuthen, F. [1933]: Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination und ökonomische Qualität. Zeitschrift für Nationalökonomie, 4. 1–24. o.