

## A GÁTOLT KŰSZÁS SZÁMÍTÁSA

### *Bevezetés*

A jelen tanulmány célja egy új számítástechnikai módszer bemutatása. A módszer matematikai alapjai és az alapok elektrotechnikai alkalmazásai a századforduló táján váltak O. Heaviside révén ismertté. Az operátor számítás ma már egyrészt több, egymástól különböző kiindulási alapja ellenére rendelkezik azzal a matematikai szigorral, hogy eredményei vitathatatlanok legyenek, másrészt a korszerű híradástechnikában, elektronikában, szabályozástelemben nélkülözhetetlen segédeszközzé vált. Az elektrotechnikán kívüli alkalmazásai mindezeideig háttérben maradtak. Tárgyalták segítségével a rugalmas rezgéseket is, sőt a tartók statikájában is voltak kezdeményezések, de itt a jelentősége más, a feladatok természetéhez jobban simuló módszerek mellett elhalványult.

### *Feltevések*

A beton lassú alakváltozásának nevezik azt a fizikai jelenséget, hogy a beton alakváltozása, állandó teher hatására, időben változik. Az alakváltozás egy része azonnal, a terhelés fellépésekor előáll, azonban a betontest ekkor még nem jön nyugalomba, hanem az alakváltozás monoton csökkenő irányzattal tovább növekszik és ha a terhelés felléptétől számított idő a végtelenhez tart, az alakváltozás egy végértéket közelít meg.

A lassú alakváltozás kifejezés mellett az idegenből átvett, de rövidsége és egyértelmősége miatt a hazai irodalomban is elterjedt „kúszás” kifejezést is használni fogjuk.

A lassú alakváltozás rheológiai tárgyalását mellőzve — elég a kiterjedt és magyar kutatásokra is támaszkodó szakirodalomra utalni — azokat az általánosan is használt feltevéseket soroljuk fel, melyekre a továbbiakban támaszkodni kívánunk.

1. A beton homogén és izotróp.
2. Csak egytengelyű feszültségi állapot lép fel.
3. A Hooke-törvény mind a rugalmas, mind a lassú alakváltozásokra korlátlanul érvényes.
4. A beton rugalmassági modulusa sem a feszültségtől, sem az időtől nem függ.

A 3. feltevés azt mondja ki, hogy a teher hatására azonnal fellépő rugalmas alakváltozás arányos a terheléssel és a lassú alakváltozás egy bizonyos kötött időpontban szintén arányos a terheléssel és így a rugalmas alakváltozással is. A lassú és a rugalmas alakváltozás közötti arányossági tényező függ a teher fellépése óta eltelt időtől és ugyanazon beton esetében a végértéke, azaz

a végtelen hosszú ideig ható teher hatására bekövetkező lassú és rugalmas alakváltozás aránya, függ a beton megszilárdulása és terhelése között eltelt időtől.

Egyenletben kifejezve:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_r \varphi(t) \quad (1)$$

A  $\varphi(t)$  ún. kúszási függvény alakját Withney és Dischinger nyomán szokás  $\varphi(t) = \varphi_m (1 - e^{-ct})$  alakban felvenni. A  $\varphi_m$  és a  $c$  értéke kísérletileg állapítható meg. Szabályzataink a beton minősége, kora és környezetének nedvesség tartalma szerint írják elő  $\varphi_m$  értékét, ha az nincs kísérletileg megállapítva. A  $c$  értéket a szabályzat szerkesztői 160 nap<sup>-1</sup>-ban vették fel, közel ugyanezt az értéket szolgáltatják az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetemen végzett kísérletek is (1).

A kúszási függvény alakjára más javaslatok is vannak (2), (3). Jelen tanulmányunk általában bármely analitikusan adott vagy empirikusan meghatározott kúszási függvény alkalmazását lehetővé teszi.

#### *A kúszás alapegyenletei*

A kúszás alapegyenletébe rugalmassági összefüggést helyettesítve kapjuk a teljes alakváltozást:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_r + \varepsilon_l = \frac{\sigma}{E} [1 + \varphi(t)] \quad (2)$$

Ez az összefüggés az állandó nagyságú feszültség és a változó alakváltozás között áll fenn. Az összefüggésben a feszültség és az alakváltozás szerepe nem cserélhető fel. Azaz pl. állandó alakváltozás hatására keletkező feszültségre:

$$\sigma(t) \neq \frac{E \varepsilon}{1 + \varphi(t)} \quad (3)$$

A 2. jelű összefüggést úgy is felfoghatjuk, hogy a lassú alakváltozást egy módosított, úgynevezett ideális rugalmassági modulussal számolhatjuk, amelynek értéke az időtől függően:

$$E_i(t) = \frac{E}{1 + \varphi(t)} \quad (4)$$

Ha a lassú alakváltozást semmi nem gátolja és a teher állandó marad, ez a felfogás helyes eredményt szolgáltat. A szerkezetek túlnyomó részében azonban az alakváltozást más szerkezeti részek, a betonban elhelyezett acélbetétek, a betonnal összekapcsolt acéltartók, feszítőkábelek stb. akadályozzák. Ebben az esetben a 3. jelű képlet értelmében az ideális rugalmasságú modulus hibás eredményt szolgáltat.

Az ideális rugalmassági modulust használó módszer, nyilvánvalóan hibás volta ellenére, általánosan használt és ezt a körülményt részben könnyű kezelhetősége, részben viszonylag jó közelítő volta igazolja. Közelítése csak viszonylagosan mondható jónak, mert bizonyos esetekben, pl. a stabilitás-vesztés esetében minőségileg is téves következtetésekre vezet.

Ha a feszültség megváltozását is tekintetbe akarjuk venni, akkor vissza kell nyúlnunk a 2. jelű egyenlethez.

Az első teher fellépésének ideje,  $t_0$  időpont óta hasson egy  $\sigma$  állandó feszültség a betontestre. A kúszási függvényt a  $t_0$  időpontra, mint kezdő időre vonatkoztatva, jelölje a  $\varphi = \varphi(t)$ .

A teljes alakváltozás ekkor  $t_1$  időpontban

$$\varepsilon(t_1) = \frac{\sigma}{E} [1 + \varphi(t_1)].$$

Ebben a  $t_1$  időpontban lépjen fel egy újabb  $\Delta\sigma$  feszültség és vizsgáljuk a teljes alakváltozást a  $t_2$  időpontban.

$$\varepsilon(t_2) = \frac{\sigma}{E} [1 + \varphi(t_2)] + \frac{\Delta\sigma}{E} [1 + \varphi(t_2) + \varphi(t_1)]$$

A teljes alakváltozás növekménye  $\Delta\varepsilon$  a  $t_1$  és  $t_2$  időpontok között

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon(t_2) - \varepsilon(t_1) = \frac{\sigma}{E} [\varphi(t_2) - \varphi(t_1)] + \frac{\Delta\sigma}{E} [1 + \varphi(t_2) - \varphi(t_1)]$$

a  $\varphi(t)$  növekményét  $\Delta\varphi$ -vel jelölve

$$\Delta\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Delta\varphi + \frac{\Delta\sigma}{E} + \Delta\sigma \Delta\varphi$$

ha  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  és  $\Delta\sigma \rightarrow 0$  akkor a határátmenet elvégezhető és a lassú alakváltozás differenciálegyenletét nyerjük:

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{1}{E} \left[ \sigma + \frac{d\sigma}{d\varphi} \right] \quad (5)$$

#### *Az alapvető differenciálegyenlet integráljai*

Az 5. jelű differenciálegyenletet különböző feltételek mellett lehet integrálni. Állandó feszültség mellett

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0; \quad \varphi = 0 \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

és integrálként megkapjuk a 2. jelű egyenletet.

Állandó alakváltozás mellett

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = 0; \quad \varphi = 0 \quad \sigma = \varepsilon E$$

az integrál  $\sigma = \varepsilon E e^{-\varphi}$  (6)

Ideális rugalmassági modulussal  $\sigma = \frac{\varepsilon E}{1 + \varphi}$  lenne az eredmény.

A két érték eltérését a  $\varphi$  függvényében az 1. sz. ábra mutatja.

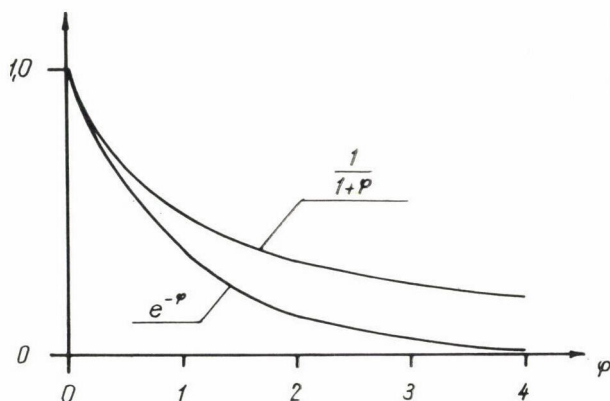
Láthatjuk, hogy állandó feszültség mellett az ideális rugalmassági modult használó módszer a differenciálegyenlet megoldásával megegyező, míg állandó alakváltozás mellett eltérő eredményt ad.



A gyakorlati esetekben az alakváltozás többé-kevésbé gátolt, ezért az ideális rugalmassági modulus használata pontatlan eredményt ad.

Két szélső esetben, az állandó feszültség és az állandó alakváltozás esetében ismerjük az összefüggést az ideális rugalmasságú modulus és a differenciálegyenletet használó módszer között. Kísérjük meg ezt az összefüggést más esetekre is általánosítani.

Tételezzük fel, hogy létezik egy — egyenlőre  $\mathcal{T}$ -vel jelölt transzformáció —, amely az ideális rugalmassági modulus által szolgáltatott függvényt a pontos megoldás függvényébe viszi át. Természetesen nem beszélhetünk arról, hogy az egyik függvény bármely pontját a másik függvény egy pontjába visszük át.



1. sz. ábra

Nevezzük a továbbiakban a differenciálegyenlet által nyújtott pontos függvényt tárgyfüggvénynek, míg az ideális rugalmassági modulus által szolgáltatott közelítőfüggvényt képfüggvénynek. Feltevéseink szerint a  $\mathcal{T}$  transzformáció a tárgyfüggvénybe viszi át.

Transzformációkat az állandó feszültség feladatának két úton nyert megoldására alkalmazva:

$$\mathcal{T}(1 + \varphi) = 1 + \varphi \quad (7)$$

Ha a  $\varphi$ -t megnöveljük, pl. a  $c$  szerezére, akkor

$$\mathcal{T}(1 + c\varphi) = 1 + c\varphi \quad (8)$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a  $\mathcal{T}$  transzformáció lineáris. Jelölje  $f_1(\varphi)$  és  $f_2(\varphi)$  a  $\varphi$ -nek két különböző függvényét, továbbá  $c_1$  és  $c_2$  legyen két állandó, akkor a linearitás megkívánja, hogy

$$\mathcal{T}[c_1 f_1(\varphi) + c_2 f_2(\varphi)] = c_1 \mathcal{T} f_1(\varphi) + c_2 \mathcal{T} f_2(\varphi) \quad (9)$$

A 8. egyenletből még azt is megtudhatjuk, hogy

$$\mathcal{T}(1) = 1; \quad \mathcal{T}(\varphi) = \varphi \quad (10)$$

Alkalmazzuk most a transzformációt az állandó alakváltozás feladatának két különböző megoldására.

$$\mathcal{F} e^{-\varphi} = \frac{1}{1 + \varphi} \quad (11)$$

Ha  $\varphi$  helyére ismét  $c\varphi$ -t teszünk

$$\mathcal{F} e^{-c\varphi} = \frac{1}{1 + c\varphi} \quad (12)$$

Ha a  $c \rightarrow 0$  határmenetet elvégezzük, ismét a  $\mathcal{F}(1) = 1$  összefüggést nyerjük.

A 12. jelű egyenlet mindkét oldalát  $n$ -szer  $c$  szerint deriválva és feltételezve azt, hogy a transzformáció a differenciálással sorrendre nézve felcserélhető, a következőket kapjuk:

$$\mathcal{F} \varphi^n e^{-c\varphi} = \frac{n! \varphi^n}{(1 + c\varphi)^n} \quad (13)$$

Ismét elvégezve a  $c \rightarrow 0$  határátmenetet

$$\mathcal{F} \varphi^n = n! \varphi^n \quad (14)$$

Ha  $n = 0$ ,  $\mathcal{F}_\varphi = \varphi$ , megegyezően a 10. jelű összefüggéssel. Látható, hogy a transzformáció tulajdonságainak levezetése az állandó feszültség és az állandó alakváltozás követelményéből nincsen egymással ellentmondásban.

A 14. jelű összefüggés segítségével a transzformáció értelmezését polinomokra és analitikus függvényekre is kiterjeszthetjük és a transzformáció számos tulajdonságát feltárhatjuk.

Szükségünk van a transzformáció inverz műveletének a megállapítására is. Ezt  $\mathcal{F}^{-1}$ -gyel jelöljük. A  $\mathcal{F}^{-1}$  transzformáció a képfüggvényt a tárgyfüggvénybe viszi át és így módot ad arra, hogy az ideális rugalmassági modulus által adott függvényből a pontos megoldást kapjuk meg. A 12. jelű összefüggést invertálva tehát

$$\mathcal{F}^{-1} \frac{1}{1+c\varphi} = e^{-c\varphi} \quad (15)$$

képletet nyerjük.

A 15. jelű képletet hasznosíthatjuk az elemi törtekre felbontott racionális törtfüggvények visszatranszformálásánál. Ez a feladat az alkalmazások túlnyomó részében előfordul és a 15. jelű képlet használatán túl csak egyszerű algebrai rendezési és egyenletmegoldási munkát követel.

Bár heurisztikusan konstruált  $\mathcal{F}$  transzformációnk segítségével a felmerülő feladatok túlnyomó részét már megoldhatnánk, nem foglalkozunk további tulajdonságainak feltárásával, hanem igyekszünk eredményeinket szilárd matematikai alapokra helyezni. Ehhez legalkalmasabbnak látszik a Laplace-transzformáció vizsgálata.

### A Laplace-transzformáció

A Laplace-transzformáció vagy más néven operátor-számítás előnyösen alkalmazható állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek, illetve differenciálegyenletrendszerek megoldására. Döntő jelentőségű az operátor-

számítás abban az esetben, ha a vizsgált feladat fizikai tartalmából kiindulva csak egy, alapvető jellegű differenciálegyenletet kell felírni és a továbbiakban ennek a transzformáltjával közvetlenül lehet a jelenséget leíró algebrai egyenletekbe bemenni. Ez az eset áll fenn az elektromos transiens jelenségeknél, és amint látni fogjuk, a kúszásnál is.

A Laplace-transzformáció fogalmát és műveleti szabályait itt nem ismer-tjük. A vonatkozó, könnyen hozzáférhető szakirodalomban ezek megtalál-hatók (4), (5). A különböző jelölésekre való tekintettel azonban a jelen tanul-mány által használt definíciót és jelöléseket ismertetjük.

$F(t)$ ,  $F(\varphi)$  tárgyfüggvények.

$f(p)$  képfüggvény.

$$f(p) = \mathcal{L} F(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$$

$\mathcal{L}$  a Laplace transzformáció jele.

$\mathcal{L}^{-1}$  az inverz transzformáció jele.

Ha a  $\mathcal{F}$  transzformációra vonatkozó 14. jelű képletben az  $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^n dz$  összefüggést alkalmazzuk, akkor

$$\mathcal{F} \varphi^n = \varphi^n \int_0^{\infty} e^{-z} z^n dz \quad (16)$$

$\varphi z = t$  helyettesítéssel a

$$\mathcal{F} \varphi^n = \frac{1}{\varphi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\varphi}} t^n dt \quad (17)$$

képletet nyerjük.

Ha  $F(\varphi)$  analitikus függvény, akkor konvergens hatványsorba is fej-tető és a sor tagonként transzformálható. Ekkor igaz az, hogy

$$\mathcal{F} F(\varphi) = \frac{1}{\varphi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\varphi}} F(t) dt \quad (18)$$

Ez a kifejezés azonban a jelölések különbözőségétől eltekintve csak annyiban tér el a Laplace-transzformációtól, hogy  $p$  helyett  $\frac{1}{\varphi}$  szerepel benne és az integrált még  $\varphi$ -vel osztani kell.

A  $\mathcal{F}$  transzformációt ezentúl módosított Laplace-transzformációnak fogjuk nevezni, bár bevezetésének módja lényegesen különbözik más, az operá-torszámításban használt transzformáció vagy operátorfogalom bevezetésétől.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> A módosított Laplace-transzformáció az irodalomban ismeretlen. A közölt levezetés elsősorban azt a célt szolgálja, hogy az ideális rugalmassági modulussal és a differenciálegyenlettel való számolást közelebb hozza egymáshoz.



### A Laplace-transzformáció alkalmazása a lassú alakváltozás számítására

Ha a kúszásnak az 5. jelű képletben megadott differenciálegyenletére a Laplace-transzformációt alkalmazzuk tekintettel arra, hogy betontestünk minden pillanatban egyensúlyban van, azaz  $\varepsilon(0) = \frac{\sigma(0)}{E}$  akkor a következő kifejezést nyerjük:

$$\mathcal{L} \sigma = \frac{E}{1 + \frac{1}{p}} \mathcal{L} \varepsilon \quad (19)$$

Ez az összefüggés azt mutatja, hogy a fajlagos hosszváltozás és a feszültség transzformáltja között lineáris, a Hooke-törvénnyel alakilag azonos összefüggés áll fenn, ha a beton rugalmassági tényezőjét  $1 + \frac{1}{p}$ -vel osztjuk.

A rugalmasságtan egyenletei lineárisak, tehát szerkezetük a Laplace-transzformációval szemben invariáns. Következésképpen ha egy rugalmasságtani egyenletrendszer transzformálunk és megoldunk, ugyanazt az eredményt kapjuk, mintha az erők (feszültségek) és az elmozdulások (hosszváltozások, szögforgások stb.) transzformáltjai között a kúszás nélküli, csupán rugalmas összefüggést írnánk fel, csak a beton rugalmassági modulusát osztjuk  $1 + \frac{1}{p}$ -vel.

A lassú alakváltozás számítási módja a Laplace-transzformációval a következő lépésekben hajtható végre:

1. Felírjuk a keresett összefüggést úgy, mintha kúszás nem is volna.
2. Az erőket (igénybevételeket, feszültségeket) és a mozgásokat (elmozdulásokat, elfordulásokat stb.) transzformáltjaikkal helyettesítjük és a beton rugalmassági modulusát  $1 + \frac{1}{p}$ -vel osztjuk.
3. Az összefüggést visszatranszformáljuk.

Látható, hogy ez a módszer megkímél bennünket a rugalmas feltételek mellett már megoldott feladat  $\varphi$ -től függő differenciálegyenletrendszer formájában való felírásától és újra való megoldásától. A rugalmasságtan eredményei közvetlenül felhasználhatók, az összes számítási munka a visszatranszformálásra összpontosul, ez azonban általában sem elvileg, sem numerikusan nem jelent nehézséget.

### Megjegyzések

#### 1. Zsugorodás

A zsugorodást általában úgy szokták felvenni, hogy időbeli lefolyása a kúszásával azonos legyen, azaz

$$\varepsilon_{zs}(t) = k \varphi(t) \quad (20)$$

$$\text{ahol } k = \frac{\varepsilon_{zs \text{ max}}}{\varphi_m}$$

A teljesen gátolt zsugorodásból származó húzófeszültség transzformáltja

$$\mathcal{L} \sigma_{zs} = \frac{k E_b}{(1 + p) p} \quad (21)$$

### 2. Időben változó terhelőerő vagy mozgás

Az időben változó terhelőerő vagy mozgás hatását kiszámíthatjuk az állandó terhelőerő vagy mozgás hatásából a konvolúció tételével. Ha  $y = A(\varphi)$  az egységnyi állandó okozta hatás és  $x(\varphi)$  a változó ok, akkor a változó ok okozta hatás

$$y = \frac{d}{d\varphi} [A(\varphi) * x(\varphi)] \quad (22)$$

### 3. Különböző kúszási végértékű betonokat tartalmazó szerkezet

Ha feltételezzük, hogy a kúszás időbeli lefolyása mindegyik betonfajtára nézve azonos, akkor célszerű független változóként a minden betonra azonos  $\varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi_m}$  függvényt tekinteni. A kúszás alapvető egyenlete ekkor transzformált alakban

$$\mathcal{L} \sigma = -\frac{E}{1 + \frac{\varphi_m}{p}} \mathcal{L} \varepsilon. \quad (23)$$

#### A karakterisztikus egyenlet gyökeiről

Az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek elméletében fontos szerepet betöltő karakterisztikus egyenlet az operátorszámításban is felép. A Heaviside-féle kifejtési tétel a visszatranszformálódó függvényt racionális törtefüggvény alakjában adja meg. Az elemi törtekre való bontáshoz szükséges a nevezőben levő polinom gyökeinek a meghatározása. Ez a polinom azonos a differenciálegyenletrendszer karakterisztikus egyenletével. Megfontolva, hogy a karakterisztikus egyenletet is tulajdonképpen a rugalmasságtani összefüggésekből nyertük, a gyökökről bizonyos megállapításokat tehetünk.

1. Állandóan ható terhelőerő vagy mozgás hatásának transzformáltjában a karakterisztikus egyenlet gyökei nem lehetnek komplexek. Ez a megállapítás abból a tényből vezethető le, hogy bármely hatás munkaegyenletek formájában is leírható. A munkaegyenletekből alkotott mátrix pozitív definit és összes saját-értéke valós.

2. A gyökök a stabilitási feladatok kivételével nem lehetnek pozitívak és értékük  $0 \geq P_i \geq -1$  határok közé esik.

A karakterisztikus egyenlet zérussá válása ugyanis azt jelenti, hogy van olyan  $E_i = -\frac{E}{1 + \frac{1}{p_i}}$  rugalmassági tényező, amely mellett az ideális rugalmassági modulussal számolt hatás végtelenné válik. Nyilvánvaló, hogy ez pozi-



tív, tehát fizikai realitással rendelkező  $E_i$  mellett nem következhet be. Ahhoz, hogy  $E_i$  ne legyen pozitív, szükséges, hogy  $0 \geq p_i \geq -1$  legyen.

3. A különböző kúszási végértékű betonokat tartalmazó szerkezet esetében, ha a független változó egységiesen a  $\varphi_0(t)$  függvény, akkor a gyökökre a  $0 \geq P_c \geq \varphi_{m \max}$  korlátok érvényesek.

4. Egy határozott szerkezetnél, ahol csak a belső erők rendeződnek át a kúszás hatására, a karakterisztikus egyenlet fokszáma állandó terhelőerő vagy mozgás, illetve a kúszással affin zsugorodás esetében legfeljebb kétszerese a zérustól különböző kúszási végértékű alkotórészek számának.

#### *Az ideális rugalmassági modulust használó módszer pontossága*

A módosított Laplace-transzformáció segítségével lehet legkönnyebben kapcsolatot teremteni a hatások pontos és ideális rugalmassági modulussal való közelítő számítása között. A 14. jelű képlet segítségével tudunk a tárgy — és a képtartomány összetartozó analitikus polinomjai között kapcsolatot teremteni.

Megállapíthatjuk, hogy a két polinom értéke a  $\varphi = 0$  pontban első deriváltjával együtt megegyezik, továbbá a Laplace-transzformáció hasonlósági tételeinek alkalmazásával megállapíthatjuk azt is, hogy  $\varphi \rightarrow \infty$  határátmenetnél a két függvény azonos értéket vesz fel. Elvárható tehát, hogy  $\varphi$  kis értékei-nél a képfüggvény, amely jelen esetben megegyezik az ideális rugalmassági modulussal számolt hatás függvényével, jól közelíti a tárgyfüggvényt, a hatás pontos értékét. További összehasonlítást is tehetünk a két függvény között.

$$\text{A 18. jelű képlet szerint } \mathcal{S} F(\varphi) = \frac{1}{\varphi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\varphi}} F(t) dt$$

Ha az  $F(\varphi)$  függvény a  $0 \leq \varphi \leq \infty$  intervallumban korlátos, és az alkalmazásokban általában az is, akkor

$$\frac{1}{\varphi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\varphi}} F_{\min} dt \leq \frac{1}{\varphi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\varphi}} F(t) dt \leq \frac{1}{\varphi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\varphi}} F_{\max} dt$$

mivel

$$\frac{1}{\varphi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\varphi}} dt = 1$$

ezért

$$F_{\min} \leq \mathcal{S} F(\varphi) \leq F_{\max} \quad (24)$$

$\mathcal{S} F(\varphi)$  a képfüggvény, vagy másképpen az ideális modulussal számolt kúszási hatás. A 24. jelű összefüggés azt mutatja, hogy ha a tárgyfüggvény, azaz a pontos kúszási hatás szélső értéke valamely 0 és  $\infty$  közé eső  $\varphi$  értéknél van, az ideális modulussal való számolás a biztonság rovására közelít.

Igen gyakori eset az, hogy a kúszás valamely hatást monoton növel. Jelölje a hatást a  $\varphi$  függvényében az  $F(\varphi)$  monoton növekvő függvény. Előírjuk azt is, hogy az  $F''(\varphi) \neq 0$  a  $0 < \varphi < \infty$  intervallumban. A  $\varphi_m$  kúszási végértékhez a  $F(\varphi_m)$  érték tartozik.

Ideális rugalmassági modulussal számolva a keresett hatás közelítő értéke  $\mathcal{T}F(\varphi)$   $\varphi = \varphi_m$  helyen.

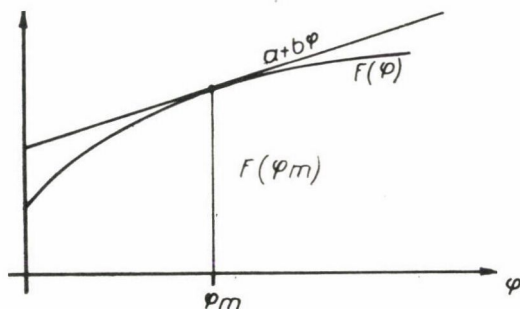
Húzzunk a vizsgált  $\varphi_m$  abszcisszájú pontban az  $F(\varphi)$  függvényt ábrázoló görbéhez érintőt. Az érintő egyenlete  $a + b\varphi$  (2. ábra).

A  $F'' \neq 0$  feltételből következik, hogy  $a + b\varphi > F(\varphi)$  az egész intervallumon.

A módosított Laplace-transzformáció definíciós integráljában szereplő

$\frac{e^{-\frac{t}{\varphi}}}{\varphi} > 0$  pozitív, valós  $\varphi$  esetében, ezért

$$(a + bt) \frac{e^{-\frac{t}{\varphi}}}{\varphi} > F(t) \frac{e^{-\frac{t}{\varphi}}}{\varphi} \quad (25)$$



2. sz. ábra

Az integrálás az egyenlőtlenséget nem változtatja meg.

$$\int_0^{\infty} (a + bt) \frac{e^{-\frac{t}{\varphi}}}{\varphi} dt > \int_0^{\infty} F(t) \frac{e^{-\frac{t}{\varphi}}}{\varphi} dt \quad (26)$$

azaz  $\mathcal{T}(a + b\varphi) > \mathcal{T}F(\varphi)$  (27)

és tovább  $a + b\varphi > \mathcal{T}F(\varphi)$  (28)

A  $\varphi = \varphi_m$  helyen  $a + b\varphi = F(\varphi_m)$

$$F(\varphi_m) > \mathcal{T}F(\varphi) \quad \varphi = \varphi_m \quad (29)$$

Mivel  $\mathcal{T}F(\varphi)$  a  $\varphi = \varphi_m$  helyen felvett értéke a keresett hatás ideális rugalmassági modulussal számolva, látható, hogy a közelítő számítás a biztonság rovására közelít. Egyes szerzők (6) a  $\varphi$ -t egy  $\psi$  korrekciós tényezővel látják el, hogy a közelítést javítsák. Megállapíthatjuk, hogy erre az 1-nél nagyobb  $\psi$ -re nem lehet általános szabályt adni.

Felmerülni látszik az a kérdés, vajon az ideális rugalmassági modulussal elkövetett hiba nem sokkal kisebb-e, mint amekkora hibát az a tény jelent,

<sup>2</sup> A  $\varphi$  felcserélése  $t$ -re, az előzőkhöz képest a transzformáció végrehajtásához szükséges.

hogy a kúszási tényező végértékét,  $\varphi_m$ -t nem tudjuk előre kellő pontossággal megbecsülni.

Állítjuk, hogy bár a pontos és közelítő számítás közötti hiba korlátozott, de sokkal nagyobb annál, mint amit  $\varphi_m$  felvételénél el szoktunk követni.

Egy egyszerű példa alkalmasnak látszik a kérdés megvilágítására.

Vizsgáljunk egy állandó nyomóerő hatásának kitett központosan nyomott vasbeton oszlopot. Az acélbetétek keresztmetszetét egyszer a teljes keresztmetszet 0,6%-ában, egyszer pedig 3,0%-ában vettük fel. Az acél és a beton rugalmassági modulusának arányát  $n = 15$ -ben rögzítettük. A következő táblázat mutatja az acélfeszültség számításában elkövetett hibát a pontos érték %-ában, illetve azt a  $\psi$  és  $\psi\varphi$  értéket, amellyel számolva az ideális rugalmassági modulus pontos eredményt adna.

$\varphi$	$F_v = 0,006 F_b$			$F_v = 0,03 F_b$		
	hiba%	$\psi$	$\psi\varphi$	hiba%	$\psi$	$\psi\varphi$
0	0	1,00	0	0	1,00	0
0,5	0,6	1,02	0,51	1,6	1,08	0,54
1,0	1,7	1,04	1,04	4,2	1,17	1,17
1,5	3,0	1,06	1,59	6,6	1,28	1,91
2,0	4,7	1,09	2,18	8,7	1,38	2,77
2,5	5,6	1,11	2,78	10,4	1,51	3,78
3,0	6,7	1,13	3,39	11,7	1,65	4,95
3,5	7,9	1,16	4,06	12,8	1,80	6,32
4,0	8,9	1,18	4,72	13,6	1,98	7,92

A fenti példa meggyőz arról, hogy fontosabb esetekben érdemes a pontos eredményt szolgáltatató módszerhez folyamodni.

### Szám példa

A bemutatandó szám példában a kúszás hatása kicsi. A példa azonban alkalmasnak látszik arra, hogy a transzformáció alkalmazásának egyszerű voltát egy viszonylag bonyolult feladaton szemléltesse.

Vizsgáljuk meg egy rugalmasan alátámasztott vasbeton alapgerenda alatt a talajreakció megváltozását a beton kúszásának hatására (3. ábra). A maximális talajreakció az oszlop alatt van.

$$\text{Értéke } q_{\max} = q_{\text{átl.}} \frac{\alpha \operatorname{Sh} \alpha + \sin \alpha}{2 \operatorname{Ch} \alpha - \cos \alpha} \quad (30)$$

ahol  $\alpha = \frac{l}{L}$  a gerenda merevségi hossza.

Kiinduló adatok:

A betonkeresztmetszet inercianyomatéka  $I_b = 1,8 \times 10^6 \text{ cm}^4$

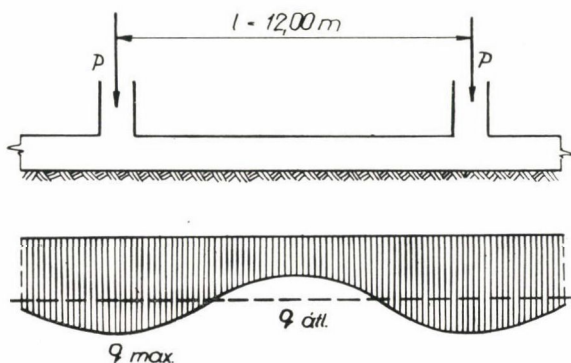
A betonkeresztmetszet rugalmassági tényezője  $E_b = 225 \text{ t/cm}^2$



Az acélkeresztmetszet inercianyomatéka  $I_v = 0,0429 = 10^6 \text{ cm}^4$   
 Az acélkeresztmetszet rugalmassági tényezője  $E_v = 2100 \text{ t/cm}^2$   
 A kúszás végértéke  $\varphi_m = 3$   
 Az ágyazási együttható  $c = 10 \text{ kg/cm}^3$

A gerenda merevségi hossza csak a betonkeresztmetszetből:

$$L_b^4 = 16,2 \times 10^{10} \text{ cm}^4$$



3. ábra

Csak az acélkeresztmetszetből:

$$L_v^4 = 3,6 \times 10^{10} \text{ cm}^4$$

A beton és az acélkeresztmetszetből:

$$L_0^4 = 19,8 \times 10^{10} \text{ cm}^4$$

A 30. jelű egyenletbe a  $q_{\max}$  és a  $q_{\text{átl.}}$  helyett ezek transzformáltjait helyettesítve és  $E_b$  helyett  $\frac{E_b}{1 + \frac{1}{p}}$  - t téve

$$\mathcal{L} q_{\max} = q_{\text{átl.}} \cdot \frac{\alpha(p)}{2} \cdot \frac{\text{Sh } \alpha(p) + \sin \alpha(p)}{\text{Ch } \alpha(p) - \cos \alpha(p)} \cdot \frac{1}{p} \quad (31)$$

ahol

$$\alpha(p) = \frac{l}{L(p)} \quad L_{(p)}^4 = \frac{L_b^4}{1 + \frac{1}{p}} + L_v^4$$

Sorbafejtéssel meggyőződhetünk arról, hogy a 31. jelű egyenlet  $p$ -nek racionális törtefüggvénye, tehát alkalmazható rá a kifejtési tétel.

A nevező zérus helyei

$$\alpha_k^4 = -4\pi^4 k^4$$

$$L_{(p_k)}^4 = \frac{l^4}{\alpha_k^4} = -\frac{l^4}{4\pi^4 k^4}; \quad p_k = -\frac{l^4 + L_v^4 4\pi^4 k^4}{l^4 + L_0^4 4\pi^4 k^4}$$

Visszatranszformálva

$$q_{\max} = q_{\max}(\infty) - q_{\text{atl}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - e^{pkq}) \quad (32)$$

ahol  $q_{\max}(\infty)$  a maximális talajnyomás értéke kúszás nélkül.

$$a_k = \frac{\alpha_k}{2} \cdot \frac{\text{Sh } \alpha_k + \sin \alpha_k}{\frac{\partial}{\partial p} [\text{Ch } \alpha(p) - \cos \alpha(p)] \cdot p_k} = \frac{\alpha_k}{2p_k} \frac{\text{Sh } \alpha_k + \sin \alpha_k}{\text{Sh } \alpha_k + \sin \alpha_k} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \alpha}{\partial p}}$$

$$p = p_k \qquad p = p_k$$

$$a_k = \frac{\alpha_k}{2p_k} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha} = - \frac{2 L_b^4 l^4}{\left( \frac{l^4}{4\pi^4 k^4} + L_v^4 \right) \left( \frac{l^4}{4\pi^4 k^4} + L_0^4 \right)} \cdot \frac{1}{4\pi^4 k^4}$$

$$p = p_k$$

$$a_k = - \frac{2 L_b^4 l^4}{L_v^4 L_0^4} \cdot \frac{1}{4\pi^4 k^4 \left( 1 + \frac{\alpha_v^4}{4\pi^4 \cdot k^4} \right) \left( 1 + \frac{\alpha_0^4}{4\pi^4 k^4} \right)}$$

$$\frac{\alpha_v^4}{4\pi^4} = 0,148; \quad \frac{\alpha_0^4}{4\pi^4} = 0,027 \quad a_k = - \frac{0,242}{k^4} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{0,148}{k^4} \right) \left( 1 + \frac{0,027}{k^4} \right)}$$

$$p_k = - 0,182 \left\{ 1 + \frac{0,121}{0,027 + k^4} \right\}$$

k	$a_k$	$p_k$
0	0	-1,0000
1	-0,2055	-0,2034
2	-0,0150	-0,1834
3	-0,0030	-0,1823
4	-0,0010	-0,1821
5	-0,0004	-0,1820
6	-0,0002	-0,1820
7	-0,0001	-0,1820

$$L_0 = 667 \text{ cm} \quad a_0 = 1,80$$

$$q_{\max}(\infty) = \frac{1,80}{2} \times \frac{2,94217 + 0,97385}{3,10747 + 0,22720} = 1,0569 q_{\text{ati}}$$

$$\begin{aligned} \frac{q_{\max}}{q_{\text{átl.}}} &= 1,0569 + 0,2055 (1 - e^{-0,6102}) \\ &+ 0,0150 (1 - e^{-0,5502}) \\ &+ 0,0030 (1 - e^{-0,5469}) \\ &+ 0,0010 (1 - e^{-0,5463}) \\ &+ 0,0004 (1 - e^{-0,5460}) \\ &+ 0,0002 (1 - e^{-0,5460}) \\ &+ 0,0001 (1 - e^{-0,5460}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q_{\max}}{q_{\text{átl.}}} &= 1,0569 + 0,0938 + 0,0064 + 0,0013 + 0,0006 + 0,0006 + 0,0002 + \\ &+ 0,0001 = 1,1593 \end{aligned}$$

#### IRODALOM

- [1] *Balázs—Kilián*: Nagyszilárdságú betonok lassú alakváltozása és tömörödése, a kis lassú alakváltozású beton. Mélyépítéstudományi Szemle, 1957.
- [2] *Арутюнян*; Некоторые вопросы теории ползучести. Москва, 1952.
- [3] *Аракелян*; Расчёт железобетонных неразрезных балок. Москва, 1951.
- [4] *Fazekas*: Műszaki matematikai gyakorlatok. C. I. Operátorszámítás, speciális függvények. Tankönyvkiadó. Budapest, 1962.
- [5] *Fodor*: Laplace-transzformáció műszaki alkalmazása. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1962.
- [6] *Fritz*: Vereinfachtes Berechnungsverfahren für Stahlträger mit einer Betondruckplatte bei Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens. Bautechnik, 1950.