NUKLEON MOZGÁSA SKALÁRIS MEZONTÉRBEN*

MARX GYÖRGY és SZAMOSI GÉZA
Eötvös Loránd Egyetem Fizikai Intézete, Budapest

A dolgozat pontszerű nukleonnak skaláris mezontérben való klasszikus mozgásával foglalkozik. A sztatikus térben való mozgás egzaktul tárgyalható. A számítások megerősítik *Werle* kis energiára vonatkozó közelítésben nyert eredményeit, mely szerint tisztán vonzó (pl. Yukawa-) potenciál is taszításra vezet akkor, ha a potenciális energia abszolút értéke a nyugalmi energiánál nagyobbá válik. Így minden külön feltevés nélkül kiadódik a nukleont körülvevő, kb. annak Compton-hullámhosszával egyenlő sugarú taszítógömb létezése. A mozgás időbeli lefolyásának vizsgálata többek közt arra az eredményre vezet, hogy a részecske a taszítási tartomány határán fénysebességgel halad át. Több nukleon kölcsönhatása esetén a háromtest-erőkkel analóg effektusok lépnek fel.

1. §. Bevezetés

Általánosan elfogadott nézet, hogy az atommagban uralkodó viszonyok közt a relativisztikus effektusok nem játszanak jelentékeny szerepet. Ez a felfogás azon alapul, hogy a magban az egy nukleonra jutó kötési energia kicsiny a nukleon sajátenergiájához képest. Mindazonáltal részletesebb kijelentéseket erről a kérdésről csak akkor tehetünk, ha megvizsgáljuk a nukleonok egzakt relativisztikus mozgásegyenletét a magerőtérben (mezontérben). A megoldást először nyilván a klasszikus elmélet közt kell keresni.

A mozgásegyenlet felállításával többen foglalkoztak [1], meghatározták a külső tér által a nukleonra kifejtett erő mellett a sajáttér visszahatásából származó tagokat is. A klasszikus relativisztikus mozgásegyenlet tehát pontosan ismeretes. Kevesebbet foglalkoztak azonban ezen egyenletek megoldásával, magával a tér-időbeli mozgásnak a lefolyásával. *Werle* [2] a legutóbb a relativisztikus Hamilton—Jacobi-egyenletet diszkutálva mutatott rá a következőre: amíg a részecske kinetikus és potenciális energiájának összege kicsiny a nyugalmi energiához képest, a részecske mozgása megfelel egy olyan potenciáltérben való mozgásnak, melyben a közönséges vonzó magerő-potenciálhoz egy rövid hatótávolságú erős taszító potenciál járul. Ez az eredmény azért nagyon érdekes, mert szerinte a vonzó magerőnek igen kis távolságban pusztán

* Érkezett 1954. aug. 21. Az Annalen der Physikben (*15.* 182. 1955) és az Acta Physica Hungaricában (*4.* 221. 1955), valamint a Bulletin Acad. Sci. Polonaise-ben (*2.* 475. 1954) megjelent dolgozatok összefoglaló ismertetése.

relativisztikus okokból taszításba kell átmennie. A nukleonokat tehát egy kis taszítógömb veszi körül, mely megakadályozza, hogy azok egymást minden határon túl megközelítsék. Mint ismeretes, ilyen taszítógömb létezését valószínűsítették *Lévy* kvantumelméleti megfontolásai is [3]. Ezen kishatótávolságú taszítás létezése úgy látszik, a tapasztalattal összhangban van, ugyanis azt *Jastrow* és mások [4] nukleon-nukleon-szóráskísérleteket és más magfizikai megfigyelések eredményét ilyen taszítás fenomenológiai bevezetésével tudták magyarázni.

A jelen dolgozat célja az, hogy a klasszikus skaláris mezontérben a nukleon mozgásegyenletének megoldásait közelítésmentesen diszkutálva megvizsgáljuk, eredményez-e tisztán vonzó jellegű mezonpotenciál bizonyos tartományban — pusztán relativisztikus okokból — taszítást. A magfizikai problémák jellegzetes többtestproblémák, ezért kívánatos volna a nukleonok kölcsönhatásának mint többtestproblémának a vizsgálata. Mivel azonban a klasszikus relativisztikus többtestproblémának kielégítő megoldása nem ismeretes, mi mindig egyetlen pontszerű nukleonnak adott külső mezontérben való vizsgálatával fogunk foglalkozni.*

2. §. *A mozgásegyenletek háromdimenziós jelölésben*

ϱ sűrűségfüggvénnyel leírt, g nukleontöltést hordozó nukleonok által keltett mezontér egyenlete

$$\Box\varphi - \mu^2\varphi = 4\pi g\varrho. \tag{1}$$

A mezontér energia-impulzus-tenzora, mint ismeretes

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \frac{\delta_{ik}}{8\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\frac{\partial\varphi}{\partial x_r} + \mu^2\varphi^2\right).$$

A nukleonra ható ponderomotoros erő sűrűsége

$$f_i = -\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -g\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

ebből a pontszerű nukleonra ható erő négyesvektora

$$F_i = -g\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

Ezt figyelembe véve a nukleon mozgásegyenlete

$$\frac{d}{d\tau}(Mu_i) = -g\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad u_i u_i = -c^2. \tag{2}$$

* Ez azt is jelenti, hogy jelen közleményben nem vesszük figyelembe a sajáttér visszahatását sem. A sugárzási visszahatás tárgyalását egy későbbi közlemény számára szeretnénk fenntartani.

M a nyugalmi tömeg, $u_i = dx_i/d\tau$ a nukleon négyessebessége, $x_4 = ict$, c a fénysebesség, τ egy skaláris paraméter, mely általában „sajátidő" néven ismeretes. Bevezetve a $g\varphi = V$ (skaláris) potenciális energiát, írhatjuk:

$$\frac{d}{d\tau}(Mu_i) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Novobátzky kimutatta [5], hogy skaláris potenciális energiával leírt erő esetén a nyugalmi energia nem lehet állandó a mozgás során. Ugyanis a differenciálást elvégezve és a (3) mozgásegyenletet $c^{-2}u_i$-val végigszorozva kapjuk:

$$\frac{dM}{d\tau} = \frac{1}{c^2}\frac{dV}{d\tau}, \quad M = m + \frac{V}{c^2}. \tag{4}$$

Így a mozgásegyenletbe a tömegspektroszkópiai mérésekből ismeretes állandó m nukleontömeget helyettesíthetjük:

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(m + \frac{V}{c^2}\right)u_i\right] = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \tag{5}$$

Írjuk át ezt az egyenletet hármas írásmódba. Az első három komponens ($i = 1, 2, 3$):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m + V/c^2}{\sqrt{1 - \mathfrak{v}^2/c^2}}\,\mathfrak{v}\right) = -\sqrt{1 - \mathfrak{v}^2/c^2}\,\mathrm{grad}\, V. \tag{6}$$

A negyedik komponens ($i = 4$) $-ic$-szerese:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2 + V}{\sqrt{1 - \mathfrak{v}^2/c^2}}\right) = \sqrt{1 - \mathfrak{v}^2/c^2}\,\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{7}$$

Tételezzük fel egy pillanatra, hogy V explicite nem függ az időtől (az erőtér konzervatív). Ekkor az

$$E = \frac{mc^2 + V}{\sqrt{1 - \mathfrak{v}^2/c^2}} \tag{8}$$

mennyiség időben állandó. Ezt a mennyiséget kell tehát a nukleon energiájának tekintenünk. Annál is inkább, mert a $c \to \infty$ nem-relativisztikus közelítésben:

$$\lim_{c \to \infty}(E - mc^2) = \frac{1}{2}m\mathfrak{v}^2 + V,$$

ami éppen a nem-relativisztikus mechanika energiakifejezése. Időben változó erőtérben az energia is változik:

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{1 - \mathfrak{v}^2/c^2}\,\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{9}$$

A mozgásegyenletek (7) térbeli komponensei (8) figyelembevételével így is írhatók:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c^2}\mathfrak{v}\right) = -\sqrt{1 - \mathfrak{v}^2/c^2}\,\mathrm{grad}\, V,$$

vagy (9) figyelembevételével:

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=-\frac{1-\mathfrak{v}^2/c^2}{1+V/mc^2}\left(\operatorname{grad}V+\frac{1}{c^2}\mathfrak{v}\frac{\partial V}{\partial t}\right), \tag{10}$$

esetleg kissé más alakban:

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=-(1-\mathfrak{v}^2/c^2)\left(\operatorname{grad}+\frac{1}{c^2}\mathfrak{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)mc^2\log\left(1+\frac{V}{mc^2}\right).$$

Kis sebességekre tehát a mozgás úgy zajlik le, mintha a részecske egy

$$V^*=mc^2\log\left(1+\frac{V}{mc^2}\right)$$

potenciállal leírt térben mozogna. (Erre először *Plebanski* mutatott rá [1].) A tetszőleges energiák és sebességek esetén érvényes mozgásegyenletet (10) alatt írtuk fel.

3. §. *Mozgás sztatikus skalártérben*

Abban a gyakorlatilag fontos esetben, mikor a használt koordinátarendszerben V explicite nem függ az időtől, az egzakt (10) mozgásegyenlet igen leegyszerűsíthető. Használjuk fel a (8) egyenletet a sebesség kiküszöbölésére és vegyük figyelembe, hogy (9)-re való tekintettel most E állandó. Ekkor (10) a következő egyszerű alakra hozható:

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2\left(1+\frac{V}{mc^2}\right)\operatorname{grad}V, \tag{11}$$

azaz

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=-\operatorname{grad}W, \tag{12}$$

ahol

$$W=\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2\left(V+\frac{V^2}{2mc^2}\right). \tag{13}$$

Leolvasható ebből, hogy a nukleon statikus térben teljesen úgy mozog, mintha reá a W potenciális energiából származó Newton-féle erő hatna. Ezt a potenciálkifejezést a Hamilton—Jacobi-egyenletből kiindulva $E^*=E-mc^2\ll mc^2$ közelítésben először *Werle* [2] vezette le

$$W=V+\frac{V^2}{2mc^2} \tag{14}$$

alakban. A mostani levezetés egyrészt *Werle* eredményét a mozgásegyenletből kiindulva támasztja alá, másrészt azt tetszőleges energiákra általánosítja, így annak közelítő jellegét megszünteti.

A (13) alatt levő kifejezés nem tekinthető klasszikus értelemben vett potenciálnak, mert hiszen ebben már a mozgás egyik állandója, E szerepel.

Tekintettel azonban arra, hogy az összenergia szóráskísérleteknél a kísérleti feltételekből, más esetekben mérésekből jól meghatározható, az egyszerű alakú (12) mozgásegyenlet mégis igen jól használható a mozgás tárgyalására, hiszen az egyenlet a klasszikus mechanika mozgásegyenletével egyező alakú, amellett semmi közelítést nem tartalmaz, a mozgást teljesen egzaktul, relativisztikusan írja le.

A (12) mozgásegyenletből könnyen megkapható a mozgás egyik integrálja:

$$E_W = \frac{1}{2} m v^2 + W \tag{15}$$

alakban, ez azonban teljesen megegyezik a (8) alatt felírt energiaintegrállal.

A számítás tovább egyszerűsödik, ha feltételezzük, hogy φ csak az erőcentrumtól számított r távolság függvénye. Ekkor a W ekvivalens potenciál is ilyen, tehát a sebességmomentum állandó. Ez azt jelenti, hogy a mozgás egyrészt síkban folyik le, másrészt a (síkbeli polárkoordinátákban kifejezhető) területi sebesség állandó:

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h = \text{const.} \tag{16}$$

Ezt figyelembe véve (8)-ból

$$\frac{dr}{dt} = c \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2 + V(r)}{E}\right)^2 - \frac{4h^2}{c^2 r^2}}, \tag{17}$$

amiből az $r(t)$ függvény már egyszerű integrálással meghatározható. Eredményünk tehát az, hogy a skaláris sztatikus centrális erőtérben a nukleon mozgása teljesen egzaktul tárgyalható.

A kapott eredményekből már érdekes következtetések vonhatók le. Tételezzük fel, hogy a V potenciál tisztán vonzó jellegű: r csökkenésével csökken. Ekkor a (11) egyenletből leolvasható módon a gyorsulás a $V > -mc^2$ tartományban a vonzócentrum felé irányul. A

$$V(r_0) = -mc^2 \tag{18}$$

egyenlettel meghatározott r_0 pontban azonban a gyorsulás zérussá válik (ugyanitt tűnik el (4) szerint a nyugalmi tömeg is), majd ezen belül $r < r_0$, $V < -mc^2$ értékekre a gyorsulás ellenkező irányú lesz. Látható tehát, hogy teljesen vonzó jellegű potenciál esetén is az erőcentrumot egy r_0 sugarú taszítási tartomány veszi körül, mely teljesen független az energiától, vagy más kezdeti feltételtől. (A taszító tartomány létezésének feltétele az, hogy V elég nagy negatív értéket is felvegyen.)

A (8) energiaegyenletből fejezzük ki a sebességet:

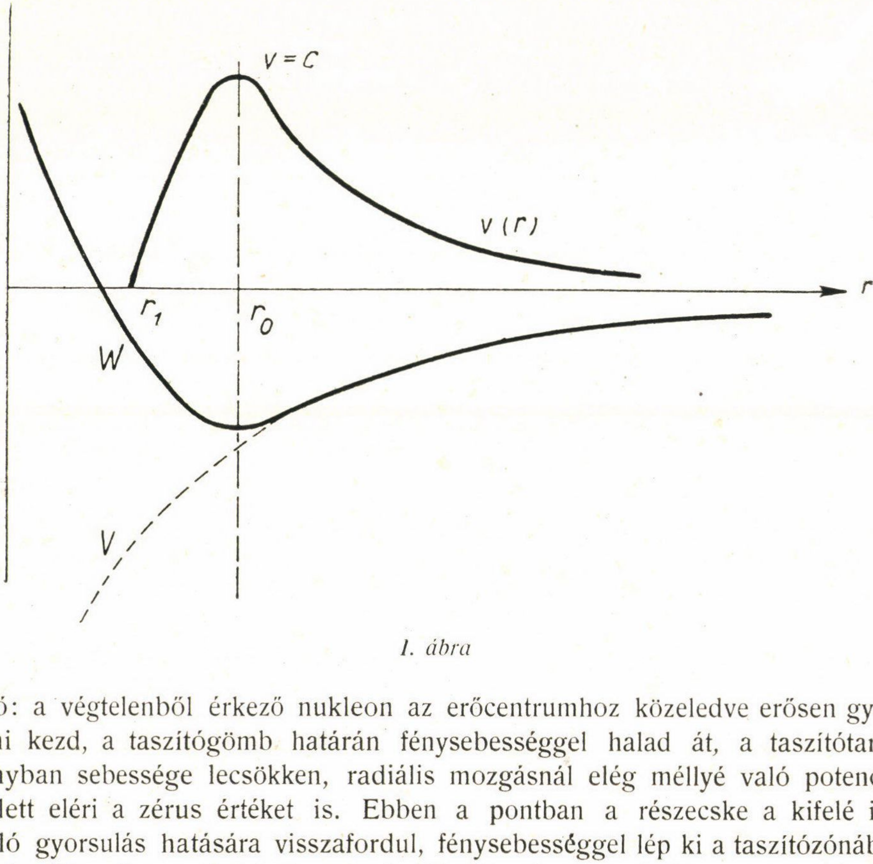
$$|v| = c \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2 + V}{E}\right)^2}. \tag{19}$$

Ebből látható, hogy az $r = r_0$ pontban a nukleon sebessége eléri a fénysebességet (ismét E-től függetlenül). Ez azonban nem okoz semmi nehézséget, ugyanis a nyugalmi tömeg egyidejű eltűnése miatt az $M(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ mozgási tömeg továbbra is véges állandó értékű marad.

A kívülről (pl. szóráskísérleteknél végtelenből) érkező nukleon a taszítózónába fénysebességgel lép be. A taszítózónában megindul a sebesség csökkenése, és ha a potenciál abszolút értéke elég nagy lesz, eléri a

$$V(r) = -mc^2 - E \tag{20}$$

értéket, akkor a részecske sebessége radiális mozgás esetén zérussá válik, a részecske tehát ebben a pontban visszafordul. A mozgás lefolyása tehát a követ-



1. ábra

kező: a végtelenből érkező nukleon az erőcentrumhoz közeledve erősen gyorsulni kezd, a taszítógömb határán fénysebességgel halad át, a taszítótartományban sebessége lecsökken, radiális mozgásnál elég méllyé való potenciál mellett eléri a zérus értéket is. Ebben a pontban a részecske a kifelé irányuló gyorsulás hatására visszafordul, fénysebességgel lép ki a taszítózónából, majd eltávozik a végtelenbe. A kezdősebességnek mindössze az a szerepe van, hogy a nagyobb energiájú nukleon fordulópontja a vonzócentrumhoz közelebb esik. (Lásd az ábrát.)

4. §. Példák

Tekintsük először azt az esetet, amikor a mozgó nukleonra ható magerőteret egy nyugvó nukleon kelti: Skaláris mezontérrel dolgozva ekkor:

$$\varphi = -g \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad V = -g^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}.$$

Vezessük be az

$$\frac{e^2}{r_e} = m_e c^2$$

definícióval értelmezett „klasszikus elektronsugár" analógiájára a

$$g^2 \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} = mc^2 \tag{21}$$

értelmezés szerint az r_0 „klasszikus nukleonsugár" fogalmát.* Tekintettel arra, hogy $g > e$, ez sokkal kisebb a magerők μ^{-1} hatótávolságánál, ezért értéke

$$r_0 = \frac{g^2}{mc^2} e^{-\mu r_0} \simeq \frac{g^2}{mc^2} = \frac{g^2}{\hbar c} \frac{\hbar}{mc}, \tag{22}$$

és mivel $g^2/\hbar c$ a megfigyelés szerint 1 közelébe eső érték, r_0 kb. a nukleon Compton-hullámhosszával egyezik meg, $2 \cdot 10^{-14}$ cm körüli érték. Célszerű lesz r_0 egységekben számolni.

A nukleon sebességét, mint r függvényét a (19) képlet határozza meg. A nukleon-nukleon szórásproblémáknál a nukleon kezdeti kinetikus energiája igen kicsiny a nyugalmi energiájához képest, így

$$v(r) = c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{g^2}{mc^2} \frac{e^{-\mu r}}{r}\right)^2} \tag{23}$$

írható. (Ha végtelenben a kezdősebesség $v_0 = 0$, a képlet pontos.) A taszítózóna határa, a fénysebesség elérése a

$$g^2 \frac{e^{-\mu r_0}}{r_0} = mc^2 \tag{24}$$

egyenlet által jellemzett pontban, tehát éppen a klasszikus nukleonsugárnál, a rögzítettnek tekintett nukleontól $2 \cdot 10^{-14}$ cm távolságban van, ami a „klasszikus nukleonsugár" kifejezés használatát még indokoltabbá teszi. (Ez a magerők hatótávolságának kb. 1/6 része.) A radiálisan haladó nukleon a rögzített nukleont a

$$g^2 \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} = 2mc^2$$

egyenlet által definiált távolságig közelíti meg, ami

$$r_1 = \frac{r_0}{2} e^{\mu(r_0 - r_1)} \simeq \frac{r_0}{2}$$

* Tulajdonképpen következetesebb volna r_0-t kétszeres nukleonsugárnak nevezni.

szerint kb. a klasszikus nukleonsugár fele. Látható tehát, hogy két nukleon nem-relativisztikus sebességek esetén sohasem közelítheti meg egymást a klasszikus nukleonsugár felénél kisebb távolságra.

A mozgás lefolyása tehát az, hogy a beeső nukleon a rögzitettnek tekintett nukleon felé haladva 10^{-12} cm körül a vonzó magerő hatására gyorsulni kezd, 10^{-13} cm-en belül a gyorsulás igen intenzívvé válik, a nukleon kb. $2 \cdot 10^{-14}$ cm körül eléri a fénysebességet. Ekkor a gyorsulás természetesen nem folyhat tovább, a nukleon taszítózónába jutva elveszíti sebességét, 10^{-14} cm távolságban visszafordul, ismét átmegy a fénysebesség tartományán, majd sebességét fokozatosan elveszítve eltávozik a végtelenbe. A mozgás időbeli lefolyásáról könnyen képet alkothatunk magunknak, ha figyelembe vesszük, hogy tartományban $e^{-\mu r} \simeq 1$. Ezért (21) figyelembevételével

$$v(r) = \frac{dr}{dt} = c \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2}$$

írható. Ebből egyszerű integrálással a

$$t = t_0 + \frac{r_0}{2c} \left[\left(\frac{2r}{r_0} - 1 \right)^{1/2} + \frac{1}{3} \left(\frac{2r}{r_0} - 1 \right)^{3/2} \right]$$

adódik. (t_0 jelenti az $r_1 \simeq r_0/2$ fordulóponton való áthaladás pillanatát.) Ebből leolvasható, hogy a taszítózónában való tartózkodás ideje 10^{-23} sec-nál lényegesen rövidebb, ez alatt a rövid idő alatt a nukleon sebessége c-ről 0-ra, majd ismét c-re változik. (Ha a mozgás nem radiális, a részecskének kezdeti impulzusmomentuma van, a visszafordulás természetesen még hamarabb, pl. p-szórásnál kb. a taszítózóna határán bekövetkezik.)

*

Második példaként tekintsük a nukleonnak egy kiterjedt mag terében való mozgását. Ismét skaláris mezontérrel számolva, az állandó sűrűségűnek tekintett A tömegszámú, R sugarú mag terében a potenciális energia (1) alapján:

$$V(r) = -\frac{3Ag^2}{\mu^2 R^3} \left[1 - (1 + \mu R) e^{-\mu R} \frac{\operatorname{sh} \mu r}{\mu r} \right] \qquad (r \leqq R).$$

Tekintettel arra, hogy $\mu R \simeq A^{1/3}$ jó közelítésben, $g \simeq 20e$ esetén egy nehéz atommag belsejében a taszítózóna jelentős térrészt foglal el. Viszont $g \simeq 5e$ esetén a taszítózóna nem lép fel, a (10) ekvivalens potenciál nem különbözik erősen a $V(r)$ potenciáltól, relativisztikus effektusok nem adnak számottevő korrekciót.

*

Az előző példában a magot alkotó nukleonokat az atommagban egyenletes sűrűséggel elosztott állapotban levőknek tekintettük. Vizsgáljuk meg ezután egy pontszerű nukleon mozgását n darab rögzített pontszerű nukleon terében.

Az $\mathfrak{r}$ helyen levő mozgó nukleon potenciális energiája az $\mathfrak{r}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ helyen rögzített nukleonok terében:

$$V(\mathfrak{r})=-g^2\sum_{i=n}^{n}\frac{e^{-\mu|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_i|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_i|}.$$

A nukleon a 3. § alapján úgy mozog, mintha klasszikus mechanika szerint egy

$$\begin{aligned} W(\mathfrak{r}) &= \sum_{i=1}^{n}\left(-g^2\frac{e^{-\mu|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_i|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_i|}+\frac{g^4}{2mc^2}\frac{e^{-2\mu|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_i|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_i|^2}\right)+ \\ &+\sum_{i\neq j}\frac{g^4}{mc^2}\frac{e^{-\mu|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_i|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_i|}\frac{e^{-\mu|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_j|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_j|} \end{aligned} \tag{25}$$

potenciállal leírt erőtérben mozogna. Ebből az a fontos eredmény adódik, hogy a sztatikus mezontérben való relativisztikus mozgás egy olyan klasszikus mozgással ekvivalens, melynél a kéttest-erők mellett háromtest-erők is fellépnek, éspedig harmadik nukleon jelenléte a két nukleon közt ható vonzóerőt gyengíti. (Ez az effektus azonban csak 10^{-13} cm-nél kisebb távolságban jelentős.)

Azt egyébként, hogy az itt tárgyalt relativisztikus effektusok kvantummechanikai alkalmazásnál Hartree- vagy Hartree—Fock-közelítésben is minden külön feltevés nélkül háromtesterőkre vezetnek, egyszerű számítással be lehet látni.

5. §. *A sajátidő-paraméter szerepe*

A számítások alapjául szolgáló (3) mozgásegyenletben a koordinátáknak τ paraméter szerint vett deriváltjai szerepelnek. τ a t koordinátaidővel a

$$\frac{d\tau}{dt}=\sqrt{1-\mathfrak{v}^2/c^2} \tag{26}$$

kapcsolatban áll. Ebből leolvasható, hogy a taszítási tartomány határán, a klasszikus nukleonsugárnak megfelelő távolságban, ahol $|\mathfrak{v}|=c$, $d\tau/dt$ zérussá, ebben a pontban tehát mozgásegyenlet határozatlanná válik. Felmerülhet a gondolat, hogy ez a határozatlanság nem azt takarja-e, hogy a nukleon be sem lép az $r<r_0$ taszítási tartományba. Ennek megvizsgálására vezessük be a $p_i=Mu_i$ négyesimpulzust. Ennek komponensei így írhatók:

$$\mathfrak{p}=(p_1,p_2,p_3)=\frac{E}{c^2}\mathfrak{v},\qquad p_4=\frac{i}{c}E.$$

Noha $r\to r_0$ esetén u_i divergenssé válik, p_i mégsem lesz az, hiszen sztatikus térben $E=$ const. Írjuk az (5) mozgásegyenletet a következő formába:

$$dp_i=F_i d\tau.$$

Ez az alak már nem tartalmaz semmi szingularitást, hanem azt mutatja, hogy az $r=r_0$ határponton a nukleon állandó impulzussal halad át, itt ugyanis $d\tau$ zérus lesz. Ez azt jelenti, hogy a taszítótartományba a nukleon gyorsulásmentes tehetetlenségi mozgással lép be úgy, amint azt a 3. §-ban (11) alapján feltételeztük.

(26) alapján a τ paramétert a részecske sajátidejével azonosítjuk, azaz azzal az idővel, melyet a részecskével momentán együttmozgó inerciarendszerben levő órák mérnek. A (26) differenciálhányados általában pozitív. Ha azonban a nukleon belép a taszítási zónába, a (8) képletben az energiaállandó kifejezésében a számláló előbb zérussá válik. Ugyanennek kell történnie a nevezővel is. Ez azt jelenti, hogy a taszítózónában (26) negatív, t növekedésével τ csökken. Ez a paradox eredmény azt látszik mutatni, hogy a taszítózónában a nukleon órája visszafelé jár. Ez logikai abszzordumokra, ok — okozat felcserélődésére vezetne. Gondoljuk meg azonban a következőket: A gyorsuló nukleon órájáról nem beszélhetünk, hanem csak a nukleon pillanatnyi v sebességével megegyező sebességű inerciarendszer órájáról. Ezen óra által mutatott és az általunk használt idő összefüggése a Lorentz-transzformáció általánosan érvényes képlete szerint:

$$\frac{d\tau^*}{dt} = \left|\sqrt{1 - v^2/c^2}\right|.$$

Ezt a τ^*-ot kell neveznünk sajátidőnek. τ^* t-nek mindig monoton függvénye és általában megegyezik a mozgásegyenletben szereplő τ parameterrel $(d\tau^*/d\tau = 1)$, a taszítózóna határán $d\tau^*/d\tau$ határozatlanná $(0/0)$ válik, azon belül pedig τ^* különbözik τ-tól, $(d\tau^*/d\tau = -1)$. A mozgásegyenlet τ^*-gal is felírható:

$$\frac{d}{d\tau^*}\left(M\frac{dx_i}{d\tau^*}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Ennek azonban az a hátránya, hogy a $p_i^* = M dx_i/d\tau^*$ definíció nem használható, mert a taszítási tartomány átlépésekor sztatikus térben is az egyébként állandó $E^* = -icp_4^*$ energia előjelének megváltozását eredményezné. A mozgásegyenlet felírható még a

$$p_i = |M|\frac{dx_i}{d\tau^*}, \qquad \frac{dp_i}{d\tau^*} = -(\operatorname{sign} M)\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

alakban is. Ez világosan mutatja a vonzó potenciál dacára fellépő taszítás okát: az a nyugalmi tömeg negatívvá válásának a következménye.

6. §. *Mozgás általános erő hatására*

A (2) alatt tárgyalt mozgásegyenletek speciális esetei az általános

$$\frac{d}{d\tau}(Mu_i) = F_i \tag{27}$$

egyenletnek. Vizsgáljuk ezen mozgásegyenletet általános F_i erővektor esetén. A differenciálást elvégezve kapjuk:

$$\frac{dM}{d\tau}u_i + M\frac{du_i}{d\tau} = F_i. \tag{28}$$

u_i-vel végigszorozva és az $u_i \frac{du_i}{d\tau} = 0$ összefüggést figyelembe véve kapjuk:

$$\frac{dM}{d\tau} = -\frac{1}{c^2} F_i u_i. \tag{29}$$

Ebből látható, hogy ha az erővektor nem merőleges a négyessebességre, a nyugalmi tömeg az erővektor „négyeseffektusa" folytán változik. (33)-at (32)-be helyettesítve:

$$M \frac{du_i}{d\tau} = (\delta_{ik} + \frac{1}{c^2} u_i u_k) F_k. \tag{30}$$

Látható ebből, hogy általános esetben is írható a mozgásegyenlet „tömeg $\times$ gyorsulás" alakban, csak ekkor a jobboldalra az erővektornak u_i négyessebességre merőleges komponense írandó. Gyorsító hatása csak az F_i erővektor a részecske világvonalára merőleges komponensének van. A tangenciális komponens (30) szerint „munkavégzés" folytán a nyugalmi tömeget (nyugalmi energiát) változtatja meg:

$$\begin{aligned} F_i &= F_i^{(m)} + F_i^{(t)}, & F_i^{(t)} &= -\frac{1}{c^2} u_i u_r F_r, \\ M \frac{du_i}{d\tau} &= F_i^{(m)}, & \frac{d}{d\tau}(Mc^2) &= -F_i^{(t)} u_i. \end{aligned} \tag{31}$$

(Tekintettel arra, hogy a $-c^{-2} u_i u_k$ tenzor bizonyos értelemben „kisebb, mint δ_{ik}, az előbbi átlósösszege — spurja — 1, utóbbié 4, azt lehet mondani, hogy $M du_i/d\tau$ „nagyjából" F_i irányába mutat.)

A gyorsulás mindaddig az erő merőleges komponensének irányába mutat, amíg M pozitív. Ha azonban F_i-nek a világvonal elég hosszú szakaszán van számottevő mozgásirányú komponense, M egyszer negatívvá válik. Ebben a pontban bekövetkezik a gyorsulás jelváltása. A mozgásnak ilyen megfordulása változatlan irányú erő esetén tehát nem csak az $F_i = -\partial_i V$ összefüggéssel jellemzett skalártérben lép fel, hanem általában mindig, amikor az erő nem merőleges a mozgás világvonalára.

A relativisztikus mozgásegyenleteket mindeddig túlnyomórészt az $F_i = \frac{e}{c} f_{ik} u_k$ Lorentz-erőnek alávetett részecske esetében vizsgálták, itt F_i-nek csak a mozgásra merőleges komponense van ($F_i u_i = 0$), ekkor tehát a nyugalmi tömeg a mozgás során állandó. Nem állandó nyugalmi tömegre első példa volt Nordström gravitáctós elmélete [6], majd az egyes skaláris térben végbemenő mozgások [7, 5, 8, 1], többek közt a skaláris mezontérben. Változik a pszeudoskalár mezontérben $F_i = c_r \partial_r \partial_i \varphi$ típusú erő hatására mozgó nukleon nyugalmi tömege is, tehát itt is jellegzetes relativisztikus effektusok fellépte várható. (A pszeudoskalár térben való mozgás vizsgálatára egy későbbi közleményben vissza kívánunk térni.)

Vizsgáljuk meg azt a magfizikai szempontból érdekes esetet, amikor a részecske az elektrosztatikus tértől származó Lorentz-erő és a skaláris mezontértől származó magerő együttes hatására mozog (proton esete):

$$F_i = \frac{e}{c} f_{ik} u_k - g \partial_i \varphi.$$

(29) figyelembevételével az M nyugalmi tömegre most is

$$M = m + \frac{g\varphi}{c^2}, \quad m = \text{const.}$$

adódik, tehát a mozgásegyenlet:

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(m + \frac{g\varphi}{c^2}\right)u_i\right] = \frac{e}{c} f_{ik} u_k - g \partial_i \varphi.$$

A mozgást sztatikus térben vizsgáljuk, melyet időtől független φ mezonpotenciál és Φ elektromos potenciál, eltűnő $\mathfrak{A}$ vektorpotenciál jellemez. Ekkor a mozgásegyenletek első három komponense

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m + g\varphi/c^2}{\sqrt{1 - \mathfrak{v}^2/c^2}}\mathfrak{v}\right) = -e \operatorname{grad} \Phi - \sqrt{1 - \mathfrak{v}^2/c^2}\, g \operatorname{grad} \varphi. \tag{33}$$

(32) negyedik komponense az energia megmaradásáról ad számot:

$$E = \frac{mc^2 + g\varphi}{\sqrt{1 - \mathfrak{v}^2/c^2}} + e\Phi, \qquad \frac{dE}{dt} = 0. \tag{34}$$

Az utóbbi egyenletből:

$$|\mathfrak{v}| = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2 + g\varphi}{E - e\Phi}\right)^2}.$$

Látható ebből, hogy az elektromágneses tér jelenléte a jellegzetes relativisztikus taszítás felléptét nem befolyásolja. A nukleon a $g\varphi = -mc^2$ pontig, a fénysebesség eléréséig gyorsulhat, onnan kezdve a taszítózónába jut. Radiális mozgásnál a fordulópont a $g\varphi = -(mc^2 + E - e\Phi)$ egyenlet által meghatározott helyen van.

A (34) energiaképlet felhasználásával a (29) mozgásegyenlet a következő alakban is felírható:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E - e\Phi}{c^2}\mathfrak{v}\right) = -e \operatorname{grad} \Phi - \sqrt{1 - \mathfrak{v}^2/c^2}\, g \operatorname{grad} \varphi.$$

Meglepő, hogy az idő szerinti differenciálás jele alatt, a sebesség előtt álló $M' = (E - e\Phi)/c^2$ tömegkifejezés tartalmazza a nyugalmi és kinetikus energia, valamint a mezonikus potenciális energia tömeg-ekvivalenseit, nem szerepel azonban benne az elektromos helyzeti energiának megfelelő tömeg. A többi energiaformákkal szemben a Coulomb-energia ez esetben nem vezet „tömegdefektusra“.*

* *
*

* A tömegdefektus-kérdés pontos vizsgálata csak a relativisztikus többtestprobléma keretei között lehetséges.

Ezen a helyen mondunk köszönetet *J. Werle* és *J. Plebanski* docens uraknak (Varsóban), akikkel folytatott értékes diszkussziók jelen vizsgálatok elindítói voltak. Köszönettel tartozunk *Novobátzky Károly* professzor úrnak, aki a számítás során felmerült elvi problémák tisztázásánál nyújtott értékes segítséget.

FÜGGELÉK

A nukleon-mozgás variációs elve mezontérben

Teljesség kedvéért ismertetjük a skaláris térben mozgó tömegpontra vonatkozó Hamilton-elvet. A hatásintegrál [1]:

$$S = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} (mc^2 + g\varphi(x))\,d\tau - \frac{1}{8\pi c}\int [\partial_\nu\varphi(y)\partial_\nu\varphi(y) + \mu^2\varphi(y)^2]\,dy. \qquad (35)$$

Itt $x_i = x_i(\tau)$ a nukleon koordinátája, τ a $dt = \frac{1}{ic}\sqrt{dx_\nu dx_\nu}$ relációval definiált invariáns sajátidő, y_i az egész teret végigfutó integrációs változó, $dy = \frac{1}{i}\,dy_1 dy_2 dy_3 dy_4$.

Először variáljuk az $x_i(\tau)$ függvényt, mely a tömegpont pályáját határozza meg.

$$\delta S = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\left(m + \frac{g\varphi}{c^2}\right) c^2 \delta d\tau + g\partial_i\varphi\,\delta x_i\,d\tau\right].$$

Itt

$$\delta d\tau = \frac{1}{ic}\,\delta\sqrt{dx_\nu dx_\nu} = \frac{1}{ic}\frac{dx_i\,\delta dx_i}{\sqrt{dx_\nu dx_\nu}} = -\frac{1}{c^2}\,u_i\,\delta dx_i.$$

Ezt behelyettesítve

$$\delta S = -\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[-\left(m + \frac{g\varphi}{c^2}\right)u_i\,\delta dx_i + g\partial_i\varphi\,\delta x_i\,d\tau\right] =$$

$$= \left[\left(m + \frac{g\varphi}{c^2}u_i\right)u_i\,\delta x_i\right]_{\tau_1}^{\tau_2} - \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\frac{d}{d\tau}\left[\left(m + \frac{g\varphi}{c^2}\right)u_i\right] + g\partial_i\varphi\right\}\delta x_i\,d\tau.$$

Ha megköveteljük, hogy a pálya-végpontokban eltűnő variációk esetén a valóságos mozgást a $\delta S = 0$ egyenlet szolgáltassa,

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left\{\frac{d}{d\tau}\left[\left(m + \frac{g\varphi}{c^2}\right)u_i\right] + g\partial_i\varphi\right\}\delta x_i\,d\tau = 0$$

egyenletből, δx_i-nek $\tau_1 < \tau < \tau_2$ pontokban felvett értékének tetszőleges voltát figyelembe véve, kapjuk a tömegpont mozgásegyenletére:

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(m+\frac{g\varphi}{c^2}\right)u_i\right]+g\partial_i\varphi=0. \tag{36}$$

A (36) által leírt valóságos mozgás esetén δS általános képlete:

$$\delta S=\left[\left(m+\frac{g\varphi}{c^2}\right)u_i\delta x_i\right]_{\tau_1}^{\tau_2}.$$

Ebből S-nek, mint a végpont-koordináta függvényének deriváltjára kapjuk:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}=\left(m+\frac{g\varphi}{c^2}\right)u_i.$$

Mivel az értelmezés szerint u_i kielégíti az $u_iu_i=-c^2$ összefüggést,

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_i}=-\left(m+\frac{g\varphi}{c^2}\right)^2c^2.$$

Ez a tömegpont mozgását leíró Hamilton—Jacobi-egyenlet.

Variáljuk a $\varphi(y)$ térpotenciálokat rögzített $x_i(\tau)$ tömegpont-koordináták mellett. A számítás kényelmesebbé tétele céljából vezessük be a

$$\delta^{(4)}(y-x(\tau))=\delta(y_1-x_1)\,\delta(y_2-x_2)\,\delta(y_3-x_3)\,\delta\left(\frac{y_4}{i}-\frac{x_4}{i}\right)$$

négydimenziós Dirac-féle δ-függvényt. Ezt felhasználva a (35) hatásintegrál így írható:

$$S=-\int_{\tau_1}^{\tau_2} mc^2\,d\tau-\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{8\pi}(\partial_r\varphi\,\partial_r\varphi+\mu^2\varphi^2)+g\varrho\varphi\right]dy=$$

$$=-\int_{\tau_1}^{\tau_2} mc^2\,d\tau+\frac{1}{c}\int L\,dy,$$

ahol

$$\varrho(y)=c\int_{\tau_1}^{\tau_2}\delta^{(4)}(y-x(\tau))\,d\tau.$$

S mint $\varphi(y)$ funkcionálja akkor lesz extremális, ha $\varphi(y)$ kielégíti az Euler-féle differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}}=0,$$

azaz L konkrét alakját felhasználva

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_k\partial y_k}-\mu^2\varphi\right)-g\varrho=0,$$

rendezve

$$\Box\varphi - \mu^2\varphi = 4\pi g\varrho. \tag{Y}$$

Ez a mezontér Yukawa-féle egyenlete.

A $\varrho(y)$ nukleonsűrűség-függvény alakja háromdimenziós jelölésben:

$$\varrho(y) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0)\,\delta(ct-ct_0)\frac{d\tau}{dt}\,c\,dt = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2/c^2}}\,\delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0).$$

(Itt $\mathfrak{r}=(y_1, y_2, y_3)$, $\mathfrak{r}_0=(x_1, x_2, x_3)$ jelöli, $d\tau/dt=\sqrt{1-\mathfrak{v}^2/c^2}$).

Ha a τ sajátidő helyett a t koordinátaidő függvényében keressük a részecske térbeli koordinátáit, akkor (26) figyelembevételével a (35) hatásintegrálnak részecskekoordinátát tartalmazó része így írható:

$$S' = \int L'\,dt, \qquad L' = -(mc^2+g\varphi)\sqrt{1-\mathfrak{v}^2/c^2}.$$

Ebből kiindulva a mozgásegyenletek háromdimenziós alakjához juthatunk el. A kanonikus impulzus (mely a dinamikai impulzussal egyenlő)

$$\mathfrak{p} = \frac{\partial L'}{\partial \mathfrak{v}} = \frac{m+g\varphi/c^2}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2/c^2}}\,\mathfrak{v}.$$

Szokott módon megalkothatjuk a Hamilton-függvényt is:

$$H = \mathfrak{p}\mathfrak{v} - L' = \frac{mc^2+g\varphi}{\sqrt{1-\mathfrak{v}^2/c^2}} = \sqrt{(mc+g\varphi)^2+(\mathfrak{p}c)^2}.$$

H megegyezik a teljes energiával. A kanonikus egyenletek a mozgásegyenleteket szolgáltatják.

A 3. §-ban láttuk azt is, hogy a Werle-féle közelítésben ($E-mc^2 \ll mc^2$, $\mathfrak{v}$ tetszőleges) a téregyenletek ekvivalensek a (12), (14) mozgásegyenletekkel. Ezeknek viszont ismét könnyen felírható a Hamilton-függvénye:

$$H_W = \frac{\mathfrak{p}^2}{2m} + \left(g\varphi + \frac{g^2\varphi^2}{2mc^2}\right) \qquad (H_W = E_W).$$

A két Hamilton-függvény természetesen nem független egymástól, hanem fennáll a következő kapcsolat:

$$H = mc^2\sqrt{1+\frac{2H_W}{mc^2}},$$

tehát a Werle-féle közelítésben

$$H = mc^2 + H_W.$$

Látható, hogy a Hamilton-formalizmus is elvezet az ekvivalens potenciálhoz, ami különösen a kvantummechanikára való áttérés szempontjából fontos. Lényeges azonban, hogy ez a Werle-féle közelítés velejárója. Ha a szokásos nem-relativisztikus közelítést vesszük ($\mathfrak{p}^2 \ll c^2$, $g\varphi \ll mc^2$), akkor

$$H = mc^2 \sqrt{\left(1+\frac{g\varphi}{mc^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{p}}{mc}\right)^2} = mc^2 + g\varphi + \frac{\mathfrak{p}^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{\mathfrak{p}^4}{m^3c^2} - \frac{1}{2}\frac{g\varphi\mathfrak{p}^2}{m^2c^2} + \cdots$$

(A $\cdots c^{-4}$ rendű tagokat jelent.) Ilyen közelítésben már nem szerepel a taszítást eredményező $g^2\varphi^2/2mc^2$ potenciáltag.

IRODALOM

[1] *H. J. Bhabha*, Proc. Roy. Soc. A. *178*, 314, 1941.
H. J. Bhabha, Harish—Chandra, Proc. Roy. Soc. A. *185*, 250, 1946.
P. Havas, Phys. Rev. *87*, 309, 1952, *93*, 882, 1954.
J. Plebanski, szóbeli közlés.
[2] *J. Werle*, Bull. Acad. Sci. Polon. III. *1*, 281, 1953.
[3] *M. M. Lévy*, Phys. Rev. *84*, 441, 1951.
[4] *R. Jastrow*, Phys. Rev. *81*, 165, 1951.
Szamosi Géza, Acta Phys. Hung., *4*, 155, 1954.
Szamosi Géza, Magyar Fizikai Folyóirat *2*, 313, 1954.
[5] *Novobátzky Károly*, Ann. Phys. VI. *11*, 285, 1953.
[6] *G. Nordström*, Phys. ZS. *13*, 1126, 1912.
[7] *M. Abraham*, Ann. Phys.
[8] *Takabayasi*, Progr. Theor. Phys. *9*, 187, 1953.
Magyar Fizikai Folyóirat *2*, 251, 1954.