

A pénzmennyiség-növekedés és az infláció közötti kapcsolat elemzése wavelet-koherenciával*

Simon Péter 

Arról, hogy a pénzmennyiség növekedése és az infláció között van-e stabil, hosszú távú kapcsolat, a különböző pénzelméletek mentén más-más következtetések vonhatók le. Empirikus elemzésében a szerző a hazai M2 pénzaggregátum növekedése és az infláció közötti wavelet-koherenciát vizsgálja. Az eredmények alapján hazánkban nem fedezhető fel robusztus, hosszú távú kapcsolat a két változó között. A pénzmennyiség-növekedés és az infláció közötti koherencia a 2000-es évek közepe és a 2010-es évek eleje közötti időszakban a forintárfolyam mozgását kiszűrve eltűnik. Ez empirikusan is alátámasztja azt a feltételezést, hogy a monetáris politika nem a pénzmennyiség alakításán keresztül hat az inflációra.

Journal of Economic Literature (JEL) kódok: C10, E31, E40

Kulcsszavak: infláció, pénzmennyiség, kamatok, wavelet-transzformáció

1. Bevezetés

A monetáris politika hatásmechanizmusát vizsgálva újra meg újra felvetődik a kérdés, hogy a pénzmennyiség és az infláció alakulása között van-e egyértelmű, stabil kapcsolat. Ennek értékelése nem egyszerű feladat: a különböző pénzelméletek mentén más-más következtetések vonhatók le arra vonatkozóan, hogy létezik-e, valamint hogy milyen erős, illetve mennyire változékonny időben ez a kapcsolat.

A mennyiségi pénzelmélet szerint a pénzmennyiség-növekedés és az infláció között lineáris a kapcsolat, így előbbi emelkedése ceteris paribus az utóbbi emelkedését okozza. Más pénzelméleti modellekben azonban a pénzmennyiség növekedése és az infláció között közel sem egyértelmű az összefüggés: a modern monetáris makroökómia (*Modern Monetary Theory*) és a post-keynesianizmus képviselői szerint például a pénzmennyiség növekedése és az infláció között nincs egyszerű, lineáris kapcsolat (*Mitchell et al. 2019*). A nemlinearitás olyankor szembeötlő igazán, ha a gazdaságban magas a dollarizáció, mert ilyenkor a pénzmennyiség növekedése

* A jelen kiadványban megjelenő írások a szerzők nézeteit tartalmazzák, ami nem feltétlenül egyezik a Magyar Nemzeti Bank hivatalos álláspontjával.

Simon Péter: Magyar Nemzeti Bank, elemző. E-mail: simonp@mnb.hu

A magyar nyelvű kézirat első változata 2023. szeptember 14-én érkezett szerkesztőségünkbe.

DOI: <https://doi.org/10.25201/HSZ.22.4.58>

nagymértékű inflációhoz vezethet (Levy Yeyati 2006), és jelentős kihívások elé állítja a monetáris politikát (Alvarez-Plata – Garcia-Herrero 2008).

Az empirikus vizsgálatok sem igazolják egyértelműen az infláció és a pénzmennyiség növekedése közötti kapcsolatot. McCallum – Nelson (2010) elemzése alapján a G7-országok makroadatai alátámasztják a mennyiségi pénzelmélet modelljének következtetéseit. A két változó közötti kapcsolat az 1980-as évek közepétől jelentősen gyengült, valamint jelentős országok közötti heterogenitást mutat fejlettségtől függően (Gertler – Hofmann 2018). A jobban liberalizált pénzügyi rendszerekkel rendelkező és az alacsony infláció mellett működő gazdaságokban az összefüggés gyengébb (Estrella – Mishkin 1997; De Grauwe – Polan 2005; Teles et al. 2016; Benati 2009). A jelenlegi, kínálati sokkok által jellemzett világgazdasági környezetben a két változó közötti összefüggést a kínálati faktorok alakulása is torzíthatja azáltal, hogy az infláció tartósan magasán ragad (Fornaro – Wolf 2023).

Ugyanakkor a kérdés a jegybankok számára gyakorlati jelentőséggel is bír, mivel számos jegybank a kamatok alakítása mellett eszközvásárlási, vagy -eladási programokat is kivitelez. Amennyiben a pénzmennyiség növekedése inflációt okoz, a jegybank eszközvásárlásokkal inflációt tud előidézni, eszközeladásokkal pedig az infláció leszorításához tud hozzájárulni. Ugyanakkor az elemzések azt mutatják, hogy az elmúlt évtizedben a globálisan meghatározó jegybankok eszközvásárlási programjainak nem volt egyértelmű inflációs hatása, a pénzmennyiség jelentős növekedése ellenére sem (Borio – Zabai 2018; Csiki 2022). Az új-keynesi szemléletű monetáris politikai modellekben – amilyen például a Magyar Nemzeti Bank (MNB) monetáris politikai alapmodellje is (Békési et al. 2016) – a pénzmennyiség növekedése nem jelenik meg, illetve nem befolyásolja a reálváltozók egyensúlyi helyzetét.

Az empirikus elemzés azt vizsgálja, hogy Magyarországon milyen erős a kapcsolat a pénzmennyiség növekedése és az infláció között. A két változó közötti kapcsolatot – tudomásom szerint hazai alkalmazásban elsőként – a wavelet-koherencia segítségével tártam fel, ami lehetővé tette a kapcsolat időbeli alakulásának nyomon követését, miközben az idősorok különböző frekvenciakomponenseinek változását is képes leírni. A két változó közötti kapcsolat időbeli változékonysága mellett számos tanulmány érvel (Hofmann 2006; Gertler – Hofmann 2018; Berger et al. 2023), az időbeliség és a frekvencia együttes nyomon követése pedig lehetővé teszi azt, hogy általános, nemstacionárius idősorokat vizsgáljunk, és a különböző frekvenciartományokban is feltárjuk a kapcsolat szorosságát a két változó között (Hajnal et al. 2023). A wavelet-dekompozíciós eljárás emellett lehetővé teszi a vezető–követő viszony vizsgálatát is.

A wavelet-dekompozíció lényege, hogy egy idősort korlátozott hosszúságú függvények („hullámocskák”, azaz waveletek) összegével közelít minden időpontban. A waveletek különböző mértékben vannak eltolva és összenyomva, ebből fakadóan képesek az idősor különböző frekvenciájú komponenseit jól leírni. A tanulmányban központi mutató a wavelet-koherencia, ami a korreláció analógiájára azt mutatja meg, hogy két változó között adott időpont és frekvencia mellett milyen erős a kapcsolat.

Az eredmények azt mutatják, hogy összességében nem fedezhető fel hazánkban robusztus kapcsolat a pénzmennyiség-növekedés és az infláció között. Hazai kontextusban *Komáromi (2007)* kifejti, hogy a monetáris bázis a jegybank számára adottság, így nincs közvetlen információtartalma a várható inflációról. Jelen elemzés ezt annyiban egészíti ki, hogy a monetáris bázison felül azt is megkérdőjelezi, hogy a gazdaságban lévő teljes pénzmennyiség és az infláció között van-e stabil kapcsolat. Az eredményeket számos robusztusságvizsgálattal igazoltam. A pénzmennyiség-növekedés és az infláció között a 2000-es évek közepe és a 2010-es évek eleje között szignifikáns koherenciát fedeztem fel, ami azonban a forintárfolyam mozgását kiszűrve eltűnik. Ezek alapján megállapítható, hogy a pénzmennyiség alakulása nem volt hatással az inflációra a vizsgált időszakban.

A tanulmány *2. fejezetében* áttekintem az infláció és a pénzmennyiség-növekedés kapcsolata mellett és ellen szóló fő érveket, nemzetközi és hazai vonatkozásban. A *3. fejezetben* bemutatom az elemzésem alapjául szolgáló wavelet-dekompozíciós eljárást, illetve az elemzéshez használt adatokat. A *4. fejezet* tartalmazza a tanulmány fő eredményeit. Az *5. fejezetben* összefoglalom a tanulmány következtetéseit.

2. Irodalmi áttekintés

A monetáris közgazdaságtan egyik központi témája a pénzelmélet, valamint ehhez kapcsolódóan a pénzmennyiség-növekedés és az infláció közötti hosszú távú kapcsolat. A 2008-ban kirobbant globális pénzügyi válságot megelőző időszakban számos közgazdász talált empirikus bizonyítékot arra, hogy a gazdaságban lévő, tágan értelmezett pénzmennyiség és az árszínvonal növekedése között közel egy-egy arányú kapcsolat van (például *Vogel 1974; Lucas 1996; Gertler – Hofmann 2018*). Ezek a megfigyelések a mennyiségi pénzelmélettel konzisztensek, amelynek a fő gondolata, hogy egységnyi exogén pénzmennyiség-növekedés ceteris paribus a nominális változók egységnyi növekedését okozza hosszú távon, azonban a gazdaság reálváltozóira nincsen hatással (*McCallum – Nelson 2010*). Ez egyenértékű a pénz hosszú távú semlegességével.

A mennyiségi pénzelmélet központi gondolata messze áll a valós alkalmazásoktól. A jegybankok által közvetlenül befolyásolható monetáris bázis alapvetően nem hordoz közvetlen információt az infláció várható alakulásáról, mivel még ebben is számos olyan tényező van, ami a jegybank számára külső adottság (Komáromi 2007). A modern monetáris politika működését az endogén pénzelmélet jobban képes leírni (Ábel et al. 2016). Ez utóbbi elmélet szerint a bankok az adott gazdasági körülményekre válaszul döntenek a tevékenységükről, így a pénzkínálat jelentős hányadát adó bankrendszer összességében endogén módon alakítja ki a pénzkínálatát. McCallum – Nelson (2010), valamint Ábel (2019) felhívja a figyelmet, hogy a jegybanki pénzteremtés alapvetően szintén endogén módon reagál a gazdasági folyamatokra, így a pénzmennyiség növekedése nem tekinthető exogénnek. Az endogén pénzelmélet kiegészíthető konzisztens keretrendszerrel, ha feltételezzük, hogy az inflációt alapvetően a gazdaság munkaerőpiaci kondíciói, kiemelten a munkaerőpiac teljes foglalkoztatottsághoz viszonyított helyzete határozza meg (Mitchell et al. 2019). Ebből következően az elmélet mentén nincs a két változó között lineáris kapcsolat. A nemlinearitás olyankor szembeötlő igazán, ha a gazdaságban magas a dollarizáció, mert ilyenkor a pénzmennyiség növekedése nagymértékű inflációhoz vezethet (Levy Yeyati 2006). Ezáltal a monetáris politika mozgásterét jelentősen szűkíti (Alvarez-Plata – Garcia-Herrero 2008).

Az empiria esetenként a mennyiségi, máskor pedig az endogén pénzelmélet következtetéseit támasztja alá. Általánosságban a 2000-es évek előtt erős empirikus kapcsolat volt jellemző a pénzmennyiség-növekedés és az infláció között (Lucas 1996; Haug – Dewald 2004). Ugyanakkor több eredmény is arra utal, hogy a 2000-es évektől a kapcsolat gyengült (Hofmann 2006; Carstensen 2007; Gertler – Hofmann 2018), amit alátámaszt az is, hogy a pénzügyi válság után a jegybanki eszközvásárlási programok közvetlen hatása az inflációra nem egyértelmű a fejlett gazdaságokban (Yu 2016; Borio – Zabai 2018; Csiki 2022). Az összefüggés gyengülése magyarázható a pénzügyi rendszerek liberalizációjával, valamint a tartósan alacsonyabb inflációs közeggel is (Estrella – Mishkin 1997; De Grauwe – Polan 2005; Teles et al. 2016; Benati 2009). Ugyanakkor McCallum – Nelson (2010) megjegyzi, hogy az országok közötti átlagolás, valamint az időbeli mozgó ablakok alkalmazása az empirikus elemzések során szintén torzíthatja a kapcsolatot, és elhagyásukkal a G7 országcsoport adatain erős összefüggést mutat ki a két változó között.

Esetenként a kínálati sokkok tartósan befolyásolhatják az inflációt, ami szintén torzíthatja az összefüggést. Fornaro – Wolf (2023) a koronavírus-járvány és az energiaársokk időszakát vizsgálja, és arra a következtetésre jut, hogy a negatív kínálati sokkok tartós kibocsátáscsökkenéssel járnak. Ez ugyanakkor az infláció tartós megemelkedése mellett megy végbe, amelyet a szigorú monetáris politika önmagában nem, csak a fiskális politikával koordinációban képes kezelni (Fornaro – Wolf 2023).

Ennek fényében a jelenlegi inflációs időszakban más tényezők, például az energiaárak vagy a járvány alatt hozott intézkedések szigorának alakulása jelentősen torzíthatta az összefüggést a pénzmennyiség növekedése és az infláció között.

Mivel a mennyiségi pénzelmélet a pénzmennyiség-növekedés és az infláció között hosszú távú kapcsolatot tételez fel, az empirikus elemzés is hosszú távra tekint vissza, hogy alacsony frekvenciájú időszorkomponensekkel dolgozzon. Az ilyen típusú elemzések során az egyik, a szakirodalomban egyre nagyobb figyelmet kapó eljárás a wavelet-dekompozíció. *Mandler – Scharnagl (2014)* waveletek segítségével feltárta, hogy az eurozónában az együttmozgás a pénzmennyiség-növekedés és az infláció 8–16 éves periódusú komponensei között az 1990-es éveket követően gyengült.¹ Amerikai adatokon szintén gyengült az összefüggés a két változó között az ezredforduló után (*Scharnagl – Mandler 2015*). Ugyanakkor *Jiang et al. (2015)* szintén waveletek használatával kimutatta, hogy a fejlett országokkal szemben Kínában a pénzmennyiség-növekedés és az infláció közötti kapcsolat a 2000-es évek közepétől felerősödött.

A wavelet-dekompozíciós eljárás a hazai közgazdasági irodalomban nem terjedt el széles körben. A hazai alkalmazások közé tartozik *Uliha (2016)*, aki az olajárak és a gazdasági változók közötti összefüggéseket tárja fel Svédországban és Norvégiában. *Uliha – Vincze (2018)* számos országban vizsgálja az árfolyam és a fogyasztói árak alakulása közötti kapcsolatot, valamint *Hosszú – Lakos (2021)* a transzformációt a legjobb előrejelzési képességgel rendelkező hitel/GDP rés megállapításához használja fel. Az MNB Pénzügyi Stabilitási jelentésében a jegybank a monetáris transzmisszióhoz szükséges időt elemzi különböző régiós országokban a wavelet-transzformáció segítségével (*MNB 2023:65–66*). Jelen tanulmányhoz a tematikájában legközelebb álló hazai alkalmazás *Hajnal et al. (2023)*. A szerzők a közép-kelet-európai régiós háztartási és vállalati betéti transzmissziót elemzik wavelet-dekompozíció és hibakorrekciós modellek segítségével. Eredményeik szerint az utóbbi években a régióban, a megemelkedett inflációs környezetben a betéti transzmisszió gyengülése és a betéti kamatok átárázódásának lassulása volt jellemző, kiemelten a háztartási szegmensben (*Hajnal et al. 2023*). A tanulmány – tudomásom szerint – elsőként vizsgálja a hazai pénzmennyiség-növekedés és infláció közötti kapcsolatot wavelet-dekompozíciós eljárás segítségével.

¹ Ugyanakkor a 16 évesnél hosszabb periódusú komponensek esetében stabil, közel egy-egy arányú kapcsolatot találtak a szerzők.

3. Módszertan

3.1. A wavelet-transzformáció

Az elemzésben a wavelet-dekompozíciós eljárást alkalmazom, ami a spektrális elemzési eszköztár része. A spektrális elemzés célja az idősor felbontása különböző frekvenciájú periodikus függvények összegére, a variancia megőrzése mellett. Ennek legismertebb példája a Fourier-transzformáció, ami szinuszoid függvények segítségével végzi a felbontást. A Fourier-transzformáció hátránya, hogy elvégzéséhez az idősor stacionaritása szükséges feltétel. Ezenfelül, mivel a felbontás időben állandó, az egyes frekvenciakomponensek időbeli eloszlásáról nem ad információt. Ha esetleges strukturális törés megváltoztatja a domináns frekvenciát, az a Fourier-transzformáció segítségével nem ismerhető fel.

A wavelet-dekompozíció a Fourier-transzformáció ezen hiányosságait egészíti ki. Az eljárás és a hozzá kapcsolódó matematikai-elméleti háttér multidiszciplináris erőfeszítések eredményeként jött létre (*Daubechies 1992; Torrence – Compo 1998; Grinsted et al. 2004*). A dekompozíció lényege, hogy az idősort nem különböző frekvenciájú szinuszoid függvényekre bontja fel, hanem korlátozott hosszúságú „hullámocskák”, azaz waveletek összegével közelíti lokálisan. Ennek megfelelően a wavelet-dekompozíció mellett az idősort nem kötik stacionaritási megkötések.

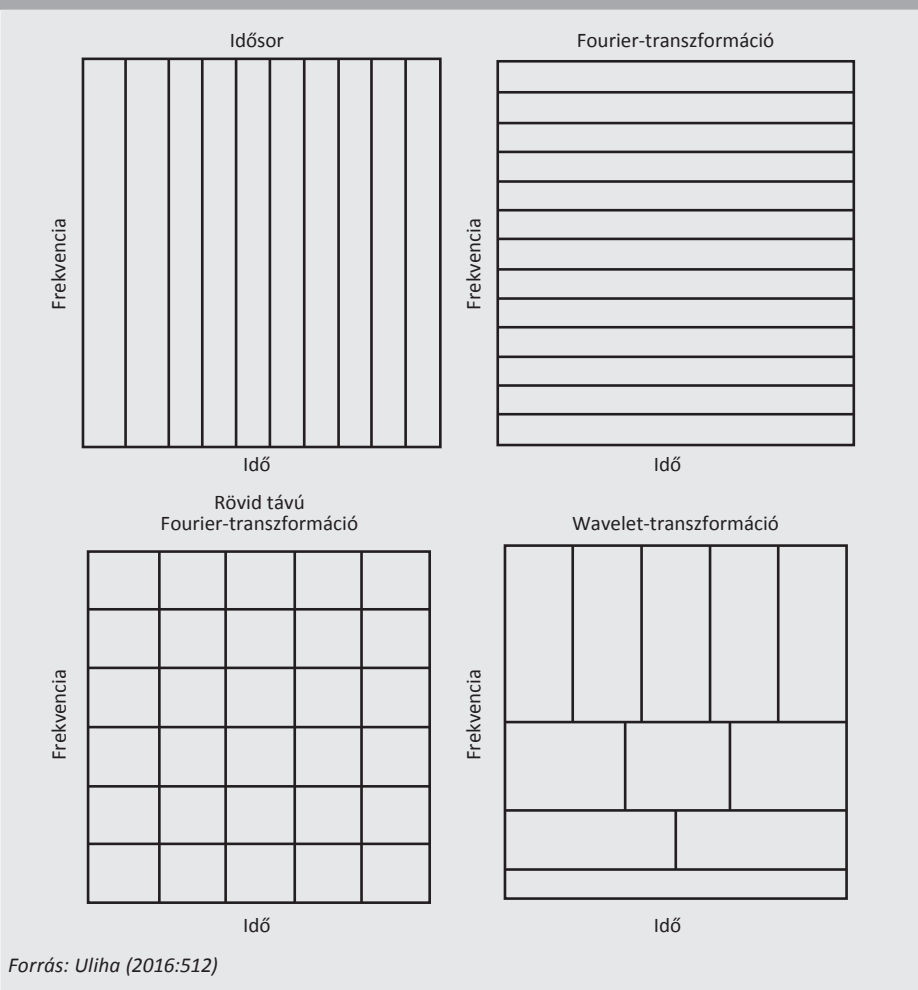
A waveletek értelmezési ablaka tetszőlegesen eltolható, valamint összenyomható és nyújtható (skalálható), így azok alkalmasak különböző frekvenciájú periodikus mozgások leírására. Az időben elnyújtottabb waveletek az idősor alacsonyabb, míg az összenyomottabb waveletek az idősor magasabb frekvenciájú komponenseinek információtartamát ragadják meg. Ha megfelelő függvényalakot (úgynevezett anya-waveletet) választunk, akkor minden négyzetesen integrálható függvény előállítható az eltoltt, összenyomott és nyújtott waveletek összegeként, azaz tetszőleges közgazdasági idősor esetében alkalmazható az eljárás. A wavelet-dekompozíció történhet diszkrét és folytonos wavelet-transzformáció segítségével. Az elemzésben a folytonos variánst alkalmaztam.²

A felbontás – az összenyomás eredményeként – skálafüggő módon változik. Ez azt jelenti, hogy az idősor magasabb frekvenciájú komponenseihez rövidebb időablakokat, az alacsonyabb frekvenciájú komponenseihez pedig hosszabb időablakokat rendel (*1. ábra*). Ez azért fontos, mert így a magasabb frekvenciájú komponenseket a lehető legjobb részletgazdagság mellett ábrázolja, miközben az alacsonyabb frekvenciájú komponensek alakulását is meg tudja jeleníteni. Ugyanakkor módszertani sajátosságok miatt a felbontás bizonyos időpontok és skálázások mellett torzított lesz. A torzító hatásoktól mentes területet cone of influence (COI)-nak

² Az elemzés során a *Gouhier et al. (2021)* által írt „biwavelet” R-programcsomagot használtam.

nevezi a szakirodalom (*Torrence – Compo 1998*). A COI-n kívüli eredményeket a szakirodalomban nem szokás figyelembe venni.

1. ábra
A különböző időfrekvencia-felbontások összehasonlítása



Két idősor között adott időpont és skála mellett egy korrelációszerű mutatószám, az úgynevezett wavelet-koherencia számolható. Ez egy 0 és 1 közötti mutató, amely lényegében a kapcsolat szorosságát adja meg a két idősor között az adott időfrekvencia-pontban. Amennyiben egy további változó hatását kiszűrve szeretnénk vizsgálni a két idősor közötti wavelet-koherencia alakulását, a parciális wavelet-koherencia segítségével tehetjük meg, melynek definíciója és értelmezése analóg a parciális korrelációval.

A wavelet-dekompozíciós elemzési keretrendszerben a korreláció előjeléhez hasonló mutató a wavelet-fáziskülönbség. Ez azt mutatja meg, hogy a két idősor adott idő-frekvencia-pontot leíró wavelete milyen vezető-követő viszonyban van egymással. Fontos, hogy a vezető-követő kapcsolat nem jelent *okozatiságot*: ha az x idősor vezeti az y -t, attól még például lehet, hogy valójában y okozza x -et, csak a hatás több mint a wavelet egy teljes periódusa alatt érvényesül.

Az elemzésben központi szerepet kap az, hogy az infláció és a pénzmennyiség-növekedés között milyen mértékű a wavelet-koherencia a különböző időpontok és frekvenciák mellett. Azt, hogy a koherencia mely pontokban különbözik szignifikánsan a zaj által generált koherenciától, Monte Carlo-szimulációk segítségével állapítottam meg. Az alkalmazott módszertan részletes kifejtése megtalálható a *Mellékletben*.

3.2. Adatok

Az empirikus elemzésben azt mutatom be, hogy hazánkban milyen erős a kapcsolat az M2 pénzmennyiség növekedése és az infláció között. Az M2 a viszonylag kis költséggel és gyorsan likviddé tehető tételeket tartalmazó monetáris aggregátum, amelynek növekedésére többen az inflációs nyomás indikátoraként tekintenek (*Hallman et al. 1991; De Grauwe – Polan 2005*).³

1999. január és 2022. szeptember közötti havi megfigyeléseket alkalmaztam. A hazai CPI inflációs adatok a Központi Statisztikai Hivataltól (KSH) származnak, az igazítatlan M2 pénzaggregátum éves alapú növekedését pedig az MNB adatai alapján számítottam ki. A két fő változó mellett további idősorokat is felhasználtam annak érdekében, hogy az eredmények robusztusságát több szempontból megvizsgáljam. Ezek közé tartozik a maginflációs mutató (KSH), az igazítatlan M1 és M3 pénzaggregátumok éves alapú növekedése (az MNB adatai alapján számítva), a negyedéves gyakorisággal megfigyelt, szezonalitással és naptárhatással igazított, évesített GDP-növekedés (KSH), valamint a napi gyakorisággal megfigyelt 3 hónapos bankközi (BUBOR) kamat és a forint-euro árfolyam (Bloomberg). A napi frekvenciájú adatokból havi átlagokat számoltam. A wavelet-dekompozíciós eljárás előkészítéseként az idősorokat sztenderdizáltam és differenciáltam.⁴

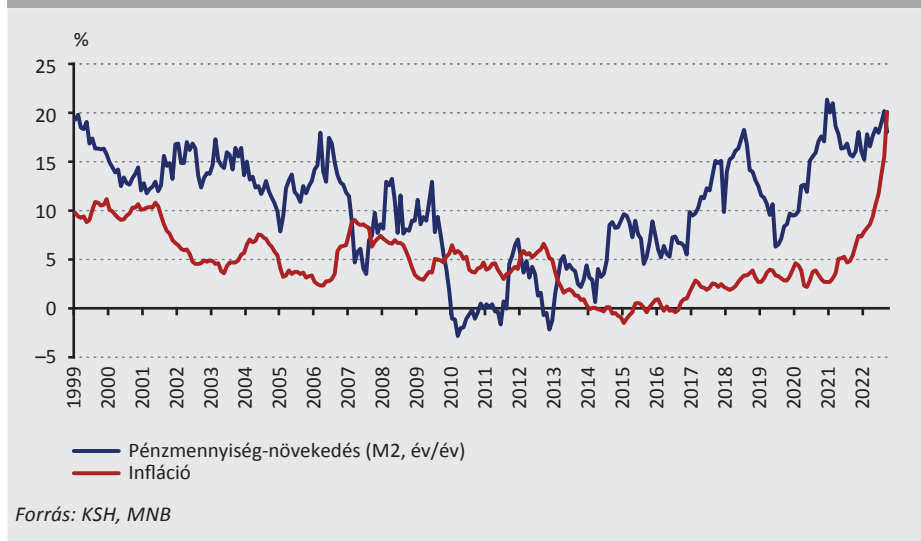
Az elemzés során vizsgált két fő idősort a 2. *ábra* mutatja be. Az ábra alapján nem fedezhető fel stabil, hosszú távú kapcsolat a két változó között. Bizonyos időszakokban a pénzmennyiség-növekedés ütemének változását az infláció megváltozása követi, néhány hónapos késéssel. Ezek közül kiemelkedő a 2019. július és 2020. december közötti időszak, amikor az M2 pénzmennyiség növekedési üteme 6,5 százalékról

³ Az M2 a monetáris pénzügyi intézményeken kívüli készpénzt, a látra szóló és folyószámla betéteket, valamint a legfeljebb 2 éves eredeti lejáratú lekötött betéteket foglalja magába.

⁴ A wavelet-módszertan lokális közelítésen alapul, így a sztenderdizációtól való eltekintés nem befolyásolná kvalitatív módon az eredményeket. A differenciálásra az inflációs idősor végén kiugró értékek és a wavelet-felbontás során alkalmazott együtthatóbecslési eljárás miatt volt szükség, ez azonban szintén nem befolyásolja az eredményeket.

20 százalék fölé gyorsult, amit követően az infláció 2021 januárjától emelkedő pályára állt. Összességében azonban a vizsgált időszak meghatározó részében a pénzmennyiség-növekedés ütemének változását az infláció nem követi, és fordított irányú kapcsolat sem olvasható le az ábráról.

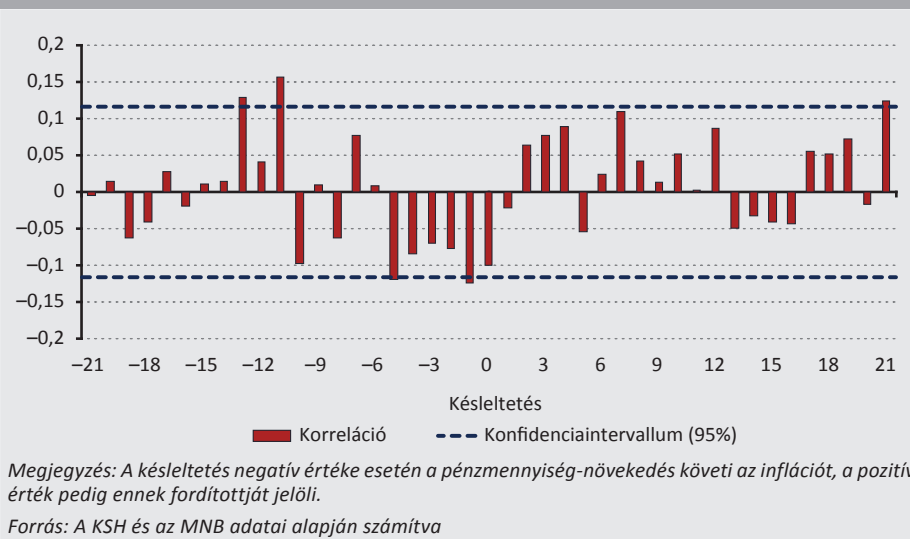
2. ábra
Az M2 pénzmennyiség éves növekedése és az infláció alakulása Magyarországon



A wavelet-dekompozíció előtt a pénzmennyiség-növekedés és az infláció között feltártam a keresztkorrelációs struktúrát, amit a 3. ábra mutat be különböző késleltetések mellett. A legtöbb késleltetés mellett a két változó közötti korreláció nem különbözik szignifikánsan 0-tól. Ugyanakkor azok mellett a késleltetés-konfigurációk mellett, amikor az infláció 13, 11, 5 vagy 1 hónappal megelőzte a pénzmennyiség-növekedést, a korreláció szignifikánsan különbözött 0-tól, csakúgy, mint akkor, amikor a pénzmennyiség-növekedés 21 hónappal megelőzte az inflációt (3. ábra). Ez arra utalhat, hogy az inflációban bekövetkező változások rövidebb távon a hitelezési folyamatok átalakulásával és így a pénzmennyiség-növekedés megváltozásával járhatnak, míg hosszabb távon a pénzmennyiség alakulása határozhatja meg az inflációt. A korrelációs mutatók azonban csak ebben a néhány esetben különböznek szignifikánsan nullától, így a kapcsolat – a környező késleltetések mellett számított korrelációkat is figyelembe véve – akár a véletlen hatása is lehet.

3. ábra

Az M2 pénzmennyiség éves növekedése és az infláció közötti korreláció különböző késleltetések mellett



4. Eredmények

4.1. Koherencia a pénzmennyiség-növekedés és az infláció között

A korrelációs struktúra alapján nincs egyértelmű bizonyíték arra, hogy van-e kapcsolat a pénzmennyiség-növekedés és az infláció között. Ennek megfelelően szükséges az elemzés folytatása a wavelet-dekompozíció segítségével. Ebben a szakaszban az így kapott eredményeket ismertetem.

A 4. ábra színskálája azt mutatja meg, hogy a két idősor között milyen erős a korrelációs együtthatóként értelmezhető wavelet-koherencia adott időpontban és skálán. A fekete körvonallal határolt területek a vörös zaj által generált koherencia-struktúrától⁵ szignifikánsan különbözően koherens waveleteket jelölik, ahol a szignifikanciát Monte Carlo-szimulációk segítségével határoztam meg.

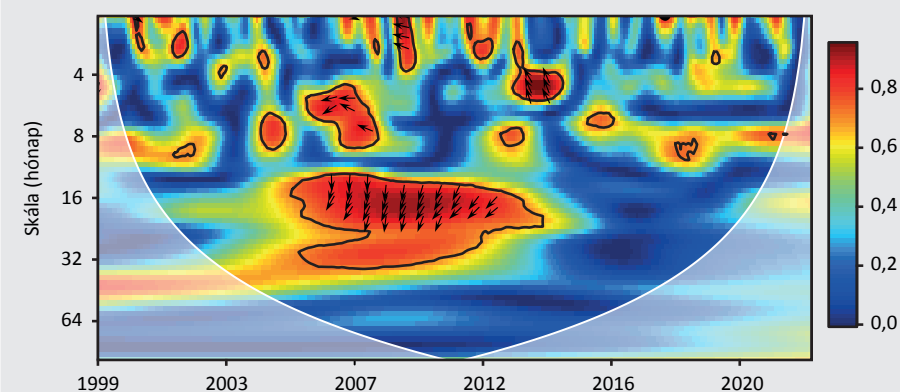
A wavelet-felbontás segítségével megállapítható, hogy a két változó között nincs hosszú távú, stabil kapcsolat. A 4. ábra alapján látható, hogy a pénzmennyiség-növekedés és az infláció rövid távú (néhány hónapos) változásai bizonyos időszakokban szignifikáns wavelet-koherenciát mutatnak, de ez a jelenség alapvetően nem stabil. A két változó körülbelül 16–32 hónapos trendjei azonban 2005 és 2013

⁵ A vörös zaj koherencia-struktúrája olyan, hogy a koherencia a frekvencia csökkenésével (a skála növekedésével) növekszik. Ezzel szemben a fehér zaj koherencia-struktúrája állandó a frekvenciák között (lásd Torrence – Compo 1998).

között szignifikánsan korreláltak voltak, a wavelet-koherencia mutató értéke ebben az időszakban és ezeken a skálákon jellemzően meghaladta a 0,8-at. A koherencia megjelenése egy gazdaságtörténeti eseménnyel is kapcsolatban lehet. 2001 óta Magyarországon is inflációs célkövetést folytat a jegybank, ami hozzájárulhatott az infláció és a pénzmennyiség-növekedés közötti kapcsolat számottevő megváltozásához.

A szignifikáns tartományokon belül a nyilak iránya a koherens waveletek közötti fáziskülönbséget mutatja meg: lefelé mutató nyíl esetén a pénzmennyiség növekedése megelőzi az inflációt, felfelé mutató nyíl esetén az infláció előzi meg a pénzmennyiség-növekedést, jobbra mutató nyíl esetén a két wavelet fázisban van, balra mutató nyíl esetén pedig a két wavelet antifázisú. A kapcsolat iránya a koherens waveletek közötti fáziskülönbség alapján a mennyiségi pénzelméletnek megfelelően alakult: a pénzmennyiség növekedési ütemének változása megelőzte az infláció megváltozását. Ugyanakkor ezt a – mintegy 16 skálát és 8 évet felölelő – tartományt leszámítva a wavelet-koherencia meglehetősen alacsony szinten alakult, és nem különbözött szignifikánsan 0-tól a vizsgált időszakban és periódusok mellett (4. ábra).

4. ábra
Az M2 pénzmennyiség éves növekedése és az infláció közötti wavelet-koherencia és fáziskülönbség



Megjegyzés: A vízszintes tengelyen az idő, a függőleges tengelyen pedig az s wavelet-skála látható (hónapokban), amely megfeleltethető az idősor azonos periódusú komponensének. A színskála azt mutatja meg, hogy a két idősor között milyen erős a korrelációs együttthatóként értelmezhető wavelet-koherencia adott időpontban és skálán. Az ábrán a fehér körvonal jelöli a COI-t, amelyen kívül a wavelet-dekompozíció eredménye torzított.

Forrás: Az MNB és a KSH adatai alapján szerkesztve

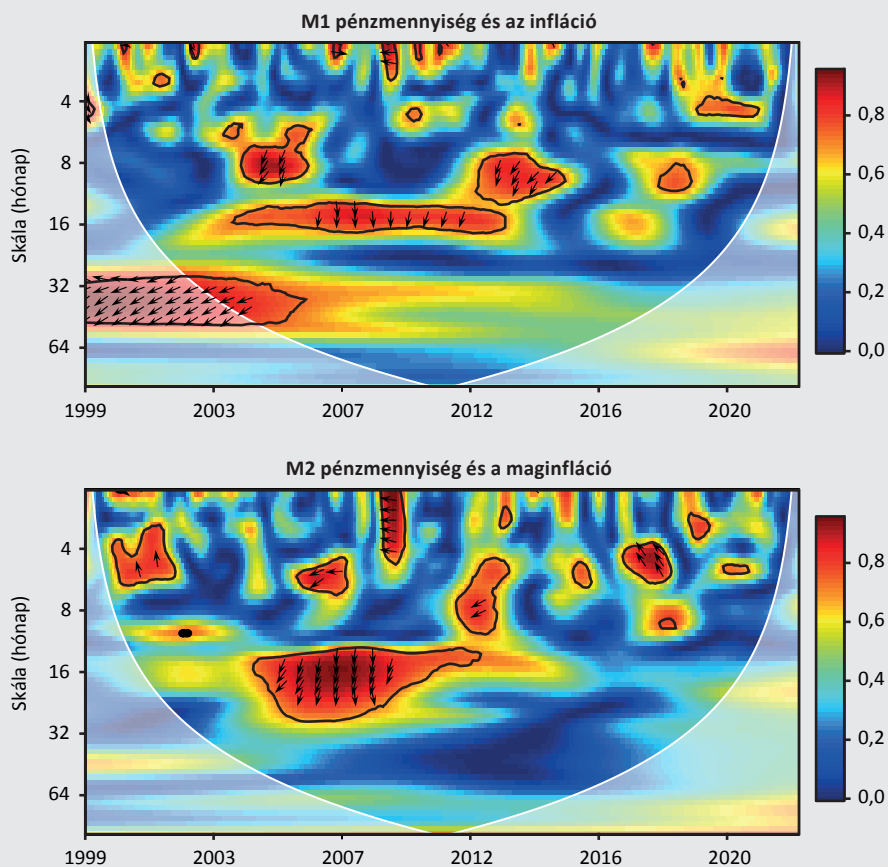
4.2. Robusztusságvizsgálat

Az eredmény robusztus mind a pénzaggregátum, mind pedig az inflációs mutató megválasztására. Az 5. ábra szemlélteti, hogy az előző alfejezet fő megállapításai kvalitatív módon nem változnak, ha az M2 aggregátum helyett az M1 aggregátum

növekedési ütemét vizsgáljuk, és akkor sem, ha az inflációs mutató helyett a maginflációt tekintjük.⁶ A korábbiakhoz hasonlóan ezekben az esetekben is jelentkeznek a rövid periódusokon az időszakos koherenciák, valamint a 16–32 hónapos skálák mellett a koherencia a 2000-es évek közepe és a 2010-es évek eleje közötti időszakban. Összességében azonban a legtöbb tartományban a wavelet-koherencia nem különbözött szignifikánsan 0-tól.

5. ábra

A különböző pénzmennyiségek éves növekedése és az infláció, valamint maginfláció közötti wavelet-koherencia és fáziskülönbség



Megjegyzés: A vízszintes tengelyen az idő, a függőleges tengelyen pedig az s wavelet-skála látható (hónapokban), amely megfeleltethető az idősor azonos periódusú komponensének. A színskála azt mutatja meg, hogy a két idősor között milyen erős a korrelációs együtthatóként értelmezhető wavelet-koherencia adott időpontban és skálán. Az ábrán a fehér körvonal jelöli a COI-t, amelyen kívül a wavelet-dekompozíció eredménye torzított.

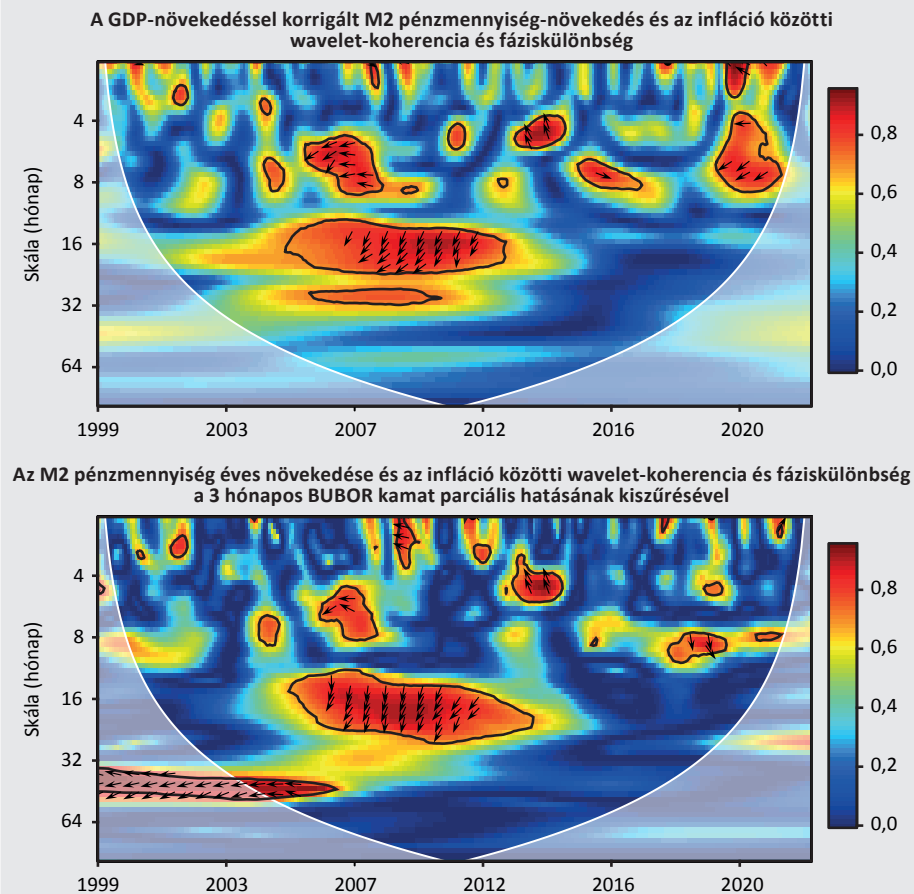
Forrás: Az MNB és a KSH adatai alapján szerkesztve

⁶ Az M1 mellett az M3 pénzaggregátum segítségével is elvégeztem a robusztusságvizsgálatot, a fő eredmények ebben az esetben sem változtak.

4.3. Kitekintés: Kihagyott magyarázó változók nyomában

További változók hatását is megvizsgáltam az eredményekre. A nagymértékű gazdasági növekedés jelentős pénzkeresletet és így nagy pénzmennyiség-növekedést generálhat. Mivel a kihagyott változó torzíthatná az eredményeket, az elemzést elvégeztem a GDP-növekedéssel korrigált pénzmennyiség-növekedéssel is.⁷ A korrekciót gördülő GDP-növekedés segítségével végeztem. A fő megállapítások ebben az esetben nem változtak.

6. ábra
A GDP-növekedés és a kamatszint hatása az eredményekre



Megjegyzés: A vízszintes tengelyen az idő, a függőleges tengelyen pedig az s wavelet skála látható (hónapokban), ami megfeleltethető az idősor azonos periódusú komponensének. A színskála azt mutatja meg, hogy a két idősor között milyen erős a korrelációs együtthatóként értelmezhető wavelet-koherencia adott időpontban és skálán. Az ábrán a fehér körvonal jelöli a COI-t, amelyen kívül a wavelet-dekompozíció eredménye torzított.

Forrás: Az MNB, a KSH és a Bloomberg adatai alapján szerkesztve

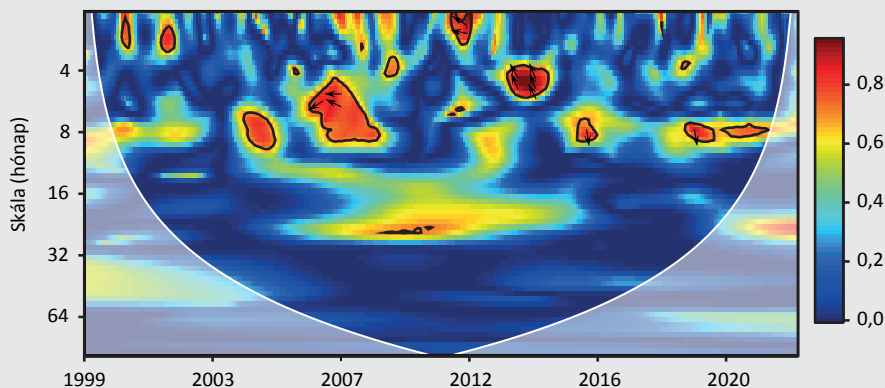
⁷ Azaz a pénzaggregátum növekedési üteméből kivontam a GDP-növekedés ütemét.

Emellett a kamatszint alakulása befolyásolhatja egyszerre az inflációt és a pénzmennyiség-növekedést, így szintén endogenitási problémákhoz vezethet. Ennek megfelelően további robusztusságvizsgálatként a két változó közötti kapcsolat wavelet-elemzését megismételtem a 3 hónapos BUBOR kamat parciális hatásának kiszűrésével is. A kamat hatásának kiszűrését a parciális korreláció analógiájára parciális wavelet-koherencia számításával végeztem.⁸ Ez szintén az eredeti eredményekhez hasonló koherencia-hőtérképet eredményezett (6. ábra).

Az árfolyam alakulására szűrve azonban további következtetéseket vonhatunk le.⁹ Ha figyelembe vesszük az árfolyam alakulását, akkor láthatjuk, hogy a változók 16–32 hónapos skálái közötti koherencia a 2000-es évek közepe és a 2010-es évek eleje közötti időszakban szinte teljes mértékben eltűnik. A parciális wavelet-koherencia alakulását bemutató 7. ábra alapján látható, hogy a korábbi ábrákhoz képest az a tartomány, amelyben a waveletek koherensek voltak, a forint-euro árfolyam mozgásának parciális hatását kiszűrve lényegében sehol sem különbözik szignifikánsan 0-tól (7. ábra). Ez alapján arra következtethetünk, hogy a két változó közötti koherencia részben az árfolyammozgásnak volt betudható a 2010-es évek eleji időszakban. Ennek következtében az elemzés fő megállapítása, miszerint nincs tartós, hosszú távú kapcsolat a pénzmennyiség-növekedés és az infláció között, erősebb alátámasztást nyer.

7. ábra

Az M2 pénzmennyiség éves növekedése és az infláció közötti wavelet-koherencia és fáziskülönbség a forint-euro árfolyam parciális hatásának kiszűrésével



Megjegyzés: A vízszintes tengelyen az idő, a függőleges tengelyen pedig az s wavelet-skála látható (hónapokban), amely megfeleltethető az idősor azonos periódusú komponensének. A színskála azt mutatja meg, hogy a két idősor között milyen erős a korrelációs együtthatóként értelmezhető wavelet-koherencia adott időpontban és skálán. Az ábrán a fehér körvonal jelöli a COI-t, amelyen kívül a wavelet-dekompozíció eredménye torzított.

Forrás: Az MNB, KSH és Bloomberg adatai alapján szerkesztve

⁸ A parciális wavelet-koherencia bemutatása megtalálható a *Mellékletben*.

⁹ Az árfolyam parciális hatását szintén parciális wavelet-koherencia számításával szűrtem ki.

Az előbbiek arra utalnak, hogy a korábban látott kapcsolat mögött a 2000-es évek közepén a jelentősre duzzadt devizahitelezés állhatott. A devizahitelezés érzékeny a forint árfolyamának alakulására, mivel a forint erősödése ceteris paribus a devizaalapú hitelek törlesztőrészletének csökkenése irányába hat. Ennek következtében egyrészt a szigorú monetáris politika által fenntartott árfolyamszint a hitelezésen keresztül bővítette a pénzmennyiséget, másrészt a kamatkülönbözet és a relatíve stabil árfolyam miatt a devizahitelezés vonzóbb volt, mint a forint konstrukciók, így a lakosság ebben a struktúrában több hitelhez jutott (*Bethlendi et al. 2005; Kolozsi et al. 2015*). Ez a fogyasztás ceteris paribus növelésén keresztül kereslet oldali inflációs nyomást eredményezett. A szigorú monetáris kondíciók ellenére a hazai gazdaságban összességében emelkedett az infláció, amit az importált infláció, valamint a megbomlott fiskális egyensúly is támogatott. Az erős forint ebben az időszakban hozzájárult a gazdaság túlfűtöttségéhez, ami a kapcsolat látszatát eredményezte a két vizsgált változó között.

5. Konklúzió

Az elemzés rávilágított arra, hogy hazánkban a pénzmennyiség-növekedés és az infláció alakulása között nincs stabil kapcsolat, ami konzisztens a szakirodalom azon ágával, amely amellet érvel, hogy a 2000-es évek óta nem fedezhető fel egyértelmű kapcsolat a két változó között (*Gertler – Hofmann 2018; Csiki 2022*). Az eredmény számos robusztussági teszt is alátámasztja. Ezek közül kiemelt az árfolyam parciális hatásának vizsgálata. A 2000-es évek közepétől kezdődő néhány évben a két változó középtávú trendjei közötti együttmozgás megszűnt az árfolyam hatásának kiszűrésével, ami arra utal, hogy a vizsgált időszak egy részében az árfolyam alakulása mozgathatta mindkét vizsgált változót.

Hazai kontextusban *Komáromi (2007)* érvel amellet, hogy a monetáris bázisnak nincs közvetlen információtartalma a várható inflációra nézve. A jelen elemzés a monetáris bázison túl a gazdaságban lévő teljes pénzmennyiség és az infláció közötti kapcsolatot is megkérdőjelezi. Ugyanakkor a tanulmány fontos korlátja, hogy bár több frekvencián vizsgálja az idősorok közötti koherenciát, az alacsonyabb frekvenciák közötti kapcsolat értelmezése a szűk COI miatt csak korlátozottan lehetséges.

Az infláció és a pénzmennyiség-növekedés közötti kapcsolat hiányának okaira részben rávilágítottam, a további okokra azonban a különböző pénzelméletek nyújthatnak magyarázatot. Ennek megfelelően későbbi elemzések témája lehet a hazai pénzügyi innovációk, a pénzügyi szabályozás, valamint a munkaerőpiac teljes foglalkoztatottsághoz való viszonyának hatása a pénzmennyiség és az infláció közötti összefüggésre. A kapcsolat mélyebb megértését emellet még, a wavelet-dekompozíció felül további – például hibakorrekciós modelleken alapuló – megközelítések alkalmazása is segítheti.

Felhasznált irodalom

- Ábel István – Lehmann Kristóf – Tapaszi Attila (2016): *A pénz és a bankok ellentmondásos kezelése a makroökonómiában*. Hitelintézeti Szemle, 15(2): 33–58. <https://hitelintezetiszemle.mnb.hu/letoltes/abel-istvan-lehmann-kristof-tapaszi-attila.pdf>
- Ábel István (2019): *Pénz és kamat: A monetáris politika megújítása*. Budapesti Gazdasági Egyetem, Budapest. <https://doi.org/10.29180/Penz-es-kamat.2019>
- Aguiar-Conraria, L. – Soares, M.J. (2014): *The continuous wavelet transform: Moving beyond uni- and bivariate analysis*. Journal of Economic Surveys, 28(2): 344-375. <https://doi.org/10.1111/joes.12012>
- Alvarez-Plata, P. – García-Herrero, A. (2008): *To Dollarize or De-Dollarize: Consequences for Monetary Policy*. DIW Berlin Discussion Paper No. 842, BVA Working Paper No. 0921. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1428828>
- Békési László – Köber Csaba – Kucsera Henrik – Várnai Tímea – Világi Balázs (2016): *Az MNB makrogazdasági előrejelző modellje*. MNB Working Papers 2016/4, Magyar Nemzeti Bank. <https://www.mnb.hu/letoltes/mnb-wp-2016-4.pdf>
- Benati, L. (2009): *Long-Run Evidence on Money Growth and Inflation*. ECB Working Paper No. 1027, European Central Bank. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1345758>
- Berger, H. – Karlsson, S. – Österholm, P. (2023): *A Note of Caution on the Relation Between Money Growth and Inflation*. IMF Working Paper No. 2023/137, International Monetary Fund. <https://doi.org/10.5089/9798400244834.001>
- Bethlendi András – Czeti Tamás – Krekó Judit – Nagy Márton – Palotai Dániel (2005): *A magánszektor devizahitelezésének mozgatórugói*. MNB Háttér tanulmányok 2005/2, Magyar Nemzeti Bank. <https://www.mnb.hu/letoltes/ht2005-2v.pdf>
- Borio, C. – Zabai, A. (2018): *Unconventional monetary policies: a re-appraisal*. In: Conti-Brown, P. – Lastra, R. M. (eds.): *Research Handbook on Central Banking*, Edward Elgar Publishing, pp. 398–444. <https://doi.org/10.4337/9781784719227.00026>
- Carstensen, K. (2007): *Is core money growth a good and stable inflation predictor in the euro area?* Kiel Working Paper No. 1318, Kiel Institute for the World Economy. <http://hdl.handle.net/10419/17842>
- Cazelles, B. – Chavez, M. – de Magny, G.C. – Guégan, J.-F. – Hales, S. (2007): *Time-dependent spectral analysis of epidemiological time-series with wavelets*. Journal of the Royal Society Interface, 4(15): 625–636. <https://doi.org/10.1098/rsif.2007.0212>

- Cohen, E.A. – Walden, A.T. (2010): *A Statistical Study of Temporally Smoothed Wavelet Coherence*. IEEE Transactions on Signal Processing, 58(6): 2964–2973. <https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2043139>
- Csiki Máté (2022): *Az eszközvásárlások, a pénzmennyiség és az infláció kapcsolata a 2007 és 2022 közötti időszakban a Federal Reserve példáján keresztül*. Pénzügyi Szemle, 67(2): 252–273. https://doi.org/10.35551/PSZ_2022_2_6
- Daubechies, I. (1992): *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (PA), US. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970104>
- De Grauwe, P. – Polan, M. (2005): *Is Inflation Always and Everywhere a Monetary Phenomenon?* Scandinavian Journal of Economics, 107(2): 239–259. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9442.2005.00406.x>
- Estrella, A. – Mishkin, F.S. (1997): *Is there a role for monetary aggregates in the conduct of monetary policy?* Journal of Monetary Economics, 40(2): 279–304. [https://doi.org/10.1016/S0304-3932\(97\)00044-5](https://doi.org/10.1016/S0304-3932(97)00044-5)
- Fornaro, L. – Wolf, M. (2023): *The scars of supply shocks: Implications for monetary policy*. Journal of Monetary Economics, forthcoming. <https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2023.04.003>
- Ge, Z. (2008): *Significance tests for the wavelet cross spectrum and wavelet linear coherence*. Annales Geophysicae, 26(12): 3819–3829. <https://doi.org/10.5194/angeo-26-3819-2008>
- Gertler, P. – Hofmann, B. (2018): *Monetary facts revisited*. Journal of International Money and Finance, 86: 154–170. <https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2018.04.006>
- Gouhier, T.C. – Grinsted, A. – Simko, V. (2021): *Package ‘biwavelet’: Conduct Univariate and Bivariate Wavelet Analyses (Version 0.20.21)*. <https://cran.r-project.org/web/packages/biwavelet/biwavelet.pdf>. Letöltés ideje: 2023. december 14.
- Grinsted, A. – Moore, J.C. – Jevrejeva, S. (2004): *Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series*. Nonlinear Processes in Geophysics, 11(5/6): 561–566. <https://doi.org/10.5194/npg-11-561-2004>
- Hajnal Gábor – Hosszú Zsuzsanna – Ozoróczy Ákos Attila – Dancsik Bálint (2023): *Betéti kamattranszmisszió becslése a közép-kelet-európai országokban wavelet-transzformáció és hibakorrekciós modell segítségével*. Elbírálás alatt az MNB-tanulmányok sorozatban.
- Hallman, J.J. – Porter, R.D. – Small, D.H. (1991): *Is the Price Level Tied to the M2 Monetary Aggregate in the Long Run?* American Economic Review, 81(4): 841–858. <https://www.jstor.org/stable/2006645>

- Haug, A.A. – Dewald, W.G. (2004): *Longer-Term Effects of Monetary Growth on Real and Nominal Variables, Major Industrial Countries, 1880-2001*. Working Paper No. 382, European Central Bank. <https://doi.org/10.2139/ssrn.569629>
- Hofmann, B. (2006): *Do monetary indicators (still) predict euro area inflation?* Discussion Paper Series 1: Economic Studies, No. 18/2006, Deutsche Bundesbank. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2785244>
- Hosszú Zsuzsanna – Lakos Gergely (2021): *Egyváltozós hitel/GDP rések korai előrejelző képessége*. MNB-tanulmányok 142, Magyar Nemzeti Bank. <https://www.mnb.hu/letoltes/mnb-mt-142-vegleges.pdf>
- Hudgins, L. – Friehe, C.A. – Mayer, M.E. (1993): *Wavelet transforms and atmospheric turbulence*. Physical Review Letters, 71(20): 3279–3282. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.3279>
- Jiang, C. – Chang, T. – Li, X.L. (2015): *Money growth and inflation in China: New evidence from a wavelet analysis*. International Review of Economics & Finance, 35: 249–261. <https://doi.org/10.1016/j.iref.2014.10.005>
- Kolozsi Pál Péter – Banai Ádám – Vonnák Balázs (2015): *A lakossági deviza-jelzáloghitelek kivezetése: időzítés és keretrendszer*, Hitelintézeti Szemle, 14(3): 60–87. <https://www.mnb.hu/letoltes/3-kolozsi-banai-vonnak-1.pdf>
- Komáromi András (2007): *A monetáris bázis hatása a pénzmennyiségekre – Van-e információtartalma a jegybankpénz mennyiségének?* MNB-Szemle, 2(1): 31–37. <https://www.mnb.hu/letoltes/szemle-2007jun-komaromi.pdf>
- Levy Yeyati, E. (2006): *Financial dollarization: Evaluating the consequences*. Economic. Economic Policy, 21(45): 62–118. <https://doi.org/10.1111/j.1468-0327.2006.00154.x>
- Liu, Y. – San Liang, X. – Weisberg, R.H. (2007): *Rectification of the Bias in the Wavelet Power Spectrum*. Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 24(12): 2093–2102. <https://doi.org/10.1175/2007JTECHO511.1>
- Lucas Jr., R.E. (1996): *Nobel Lecture: Monetary Neutrality*. Journal of Political Economy, 104(4): 661–682. <https://doi.org/10.1086/262037>
- MNB (2023): *Pénzügyi Stabilitási Jelentés, 2023. május*. Magyar Nemzeti Bank. <https://www.mnb.hu/letoltes/penzugyi-stabilitasi-jelentes-2023-majus.pdf>
- Mandler, M. – Scharnagl, M. (2014): *Money Growth and Consumer Price Inflation in the Euro Area: A Wavelet Analysis*. Bundesbank Discussion Paper No. 33/2014, Deutsche Bundesbank. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2797012>

- McCallum, B.T. – Nelson, E. (2010): *Money and Inflation: Some Critical Issues*. In: Friedman, B. M. – Woodford, Mi (eds.): *Handbook of Monetary Economics*, 3, pp. 97–153. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53238-1.00003-X>
- Mitchell, W.L. – Wray, R. – Watts, M. (2019): *Macroeconomics*. Red Globe Press, London, UK.
- Scharnagl, M. – Mandler, M. (2015): *The relationship of simple sum and Divisia monetary aggregates with real GDP and inflation: a wavelet analysis for the US*. Beiträge zur Jahrestagung des Vereins für Socialpolitik 2015: Ökonomische Entwicklung – Theorie und Politik – Session: Monetary Modelling, No. E23-V3, Deutsche Zentralbibliothek für Wirtschaftswissenschaften, Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft. <http://hdl.handle.net/10419/112879>. Letöltés ideje: 2023. június 23.
- Teles, P. – Uhlig, H. – Valle e Azevedo, J. (2016): *Is quantity theory still alive?* *The Economic Journal*, 126(591): 442–464. <https://doi.org/10.1111/eoj.12336>
- Torrence, C. – Compo, G.P. (1998): *A Practical Guide to Wavelet Analysis*. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(1): 61–78. [https://doi.org/10.1175/1520-0477\(1998\)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0477(1998)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2)
- Torrence, C. – Webster, P.J. (1999): *Interdecadal Changes in the ENSO–Monsoon System*. *Journal of Climate*, 12(8): 2679–2690. [https://doi.org/10.1175/1520-0442\(1999\)012<2679:ICITEM>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0442(1999)012<2679:ICITEM>2.0.CO;2)
- Uliha Gábor (2016): *Az olajár és a makrogazdaság kapcsolatának elemzése folytonos wavelet transzformáció segítségével*. *Statisztikai Szemle*, 94(5): 505–534. <https://doi.org/10.20311/stat2016.05.hu0505>
- Uliha Gábor – Vincze János (2018): *Exchange rates and prices: a continuous wavelet perspective*. Discussion Paper no. MT-DP-2018/33, Institute of Economics, Centre for Economic and Regional Studies, Hungarian Academy of Sciences. <http://real.mtak.hu/88774/1/MTDP1833.pdf>
- Veleda, D. – Montagne, R. – Araujo, M. (2012): *Cross-Wavelet Bias Corrected by Normalizing Scales*. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 29(9): 1401–1408. <https://doi.org/10.1175/JTECH-D-11-00140.1>
- Vogel, R.C. (1974): *The Dynamics of Inflation in Latin America, 1950-1969*. *American Economic Review*, 64(1): 102–114. <https://www.jstor.org/stable/1814885>
- Yu, E. (2016): *Did quantitative easing work?* *Economic Insights*, Federal Reserve Bank of Philadelphia, 1(1): 5–13. <https://ideas.repec.org/a/fip/fedpei/00002.html>

Melléklet: A wavelet-transzformáció matematikai háttere

Kiindulópontként definiáljuk az anya-waveletet. Egy $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ négyzetesen integrálható függvény akkor lehet anya-wavelet, ha teljesíti a következő alapfeltételt (Daubechies 1992):

$$0 < C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (1)$$

ahol $\Psi(\omega)$ jelöli $\psi(t)$ Fourier-transzformáltját, azaz $\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt$. Itt ω a szögfrekvenciát jelöli, amiből a Fourier-frekvencia előállítható az $f = \frac{\omega}{2\pi}$ képlet alapján. Ugyanakkor az anya-wavelet azonosítása során az (1) kritérium mellett a függvény lecsengésének ütemére is gyakran tesznek további megkötéseket. Egy megfelelő ütemben lecsengő anya-wavelet-függvény esetében az alapfeltétellel ekvivalens feltétel, hogy $\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ teljesüljön. Ez azt jelenti, hogy a függvény néhányszor oszcillál, és éltűnik.

A waveletek $\psi_{\tau,s}$ családja a ψ anya-wavelet időbeli eltolásával és skálázásával áll elő.¹⁰ Az időbeli eltolás τ -val azt jelenti, hogy a wavelet a t időpontban az anya-wavelet $t - \tau$ időponti értékét veszi fel, míg a skálázás s -sel azt jelenti, hogy a wavelet az anya-wavelet (eltolt) értékének s -szeresét veszi fel. Ha tehát $|s| > 1$, akkor ez egy megnyújtás, ellenkező esetben pedig összenyomás.

Legyen most $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Ekkor az x folytonos wavelet-transzformáltja a ψ anya-wavelet-re nézve az alábbi módon áll elő:

$$W_{x,\psi}(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{s} \right) dt, \quad (2)$$

ahol $*$ a komplex konjugálást jelöli. A wavelet időbeli pozícióját τ , a skálázás mértékét pedig s adja meg. Ezáltal a wavelet-transzformáció az idősort az idő- és a skáladimenzióban is lokalizálja. Ez ugyanakkor jelentős redundanciával jár, mivel egy n megfigyelésből álló idősort n darab, egyenként n elemű idősorra bont fel.

Belátható, hogy az idősorban számos olyan időpontra nincsen megfigyelés, ahová az anya-wavelet eltolását a (2) képlet alkalmazása előírja. A legtöbb alkalmazásban ilyenkor az idősor elejét és végét nullákkal töltik fel („zero padding”), elemzésemben én is így jártam el.¹¹ A „zero padding” ugyanakkor az értelmezhető idősor szélein torzítást okoz. Ennek mértéke nagyban függ a skálától, hiszen minél nagyobb s , annál hosszabb idősorra van szükség a $W_{x,\psi}(\tau, s)$ wavelet-transzformált előállításához. A határvonalat, amin belül a torzítás nem jelentkezik, cone of influence (COI)-nak

¹⁰ Az elemzés során az „anya-wavelet” kifejezés alatt mindig egy olyan függvényt értünk, ami teljesíti az (1) egyenletben szereplő alapfeltételt, míg „wavelet” alatt ennek az eltolt és skálázott formáját.

¹¹ Másik lehetőség az idősor körkörös összekapcsolása, azaz az idősort a végén „újratekdeni az elejéről”.

nevezi a szakirodalom (*Torrence – Compo 1998*).¹² A COI-n kívüli eredményeket a szakirodalomban nem szokás figyelembe venni.

A redundancia miatt általános esetben a wavelet-transzformáció invertálása nem egyértelmű. Ugyanakkor a transzformáció energiamegőrző tulajdonsággal bír, így, ha az anya-wavelet valós értékű, akkor az eredeti idősor is visszakapható a transzformáltból az $x(t) = \frac{2}{c_\psi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty W_{x,\psi}(\tau, s) \psi_{t,s}(t) d\tau \right] \frac{ds}{s^2}$ képlet segítségével. Ha a wavelet komplex értékű, de analitikus, azaz $\Psi(\omega) = 0$ minden $\omega < 0$ esetében (tehát a negatív frekvenciákon a Fourier-transzformáltja eltűnik), $x(t)$ pedig valós értékű, akkor az invertálás szintén elvégezhető az úgynevezett Morlet-képlet segítségével (*Aguiar-Conraria – Soares 2014*):

$$x(t) = 2\Re \left[\frac{1}{K_\psi} \int_0^\infty W_{x,\psi}(\tau, s) \frac{1}{s^{3/2}} ds \right], \quad (3)$$

ahol \Re a komplex szám valós részét jelöli, és $K_\psi := \int_0^\infty \frac{\Psi^*(\omega)}{\omega} d\omega$. A (3) egyenlet alapján lehetővé válik az x idősoron a frekvenciaszűrés elvégzése is, ekkor az egyenletben szereplő integrálást a skálák egy kiválasztott részalmazán végezzük el.

Eddig nem esett szó a ψ anya-wavelet függvényalakjáról. Az elemzés során a nemzetközi szakirodalmat követve a Morlet anya-wavelet-et alkalmaztam, aminek függvényformája a következő:

$$\psi_{\omega_0}(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (4)$$

ahol ω_0 egy paraméter.¹³ A szakirodalomban leggyakrabban alkalmazott a $\omega_0 = 6$ érték (például *Torrence – Compo 1998*; *Aguiar-Conraria – Soares 2014*; *Scharnagl – Mandler 2015*). A paraméter ezen értéke mellett egyrészt a skála és a szögfrekvencia között egyszerű az átváltás, mivel ekkor $\omega \approx \frac{1}{s}$, másrészt a wavelet ekkor éri el az optimális tradeoff-pontot az időbeli és skálabeli felbontás gazdagságát illetően (*Aguiar-Conraria – Soares 2014*). A Morlet általános esetben egy komplex értékű, analitikus anya-wavelet, így a wavelet-transzformáltból egyértelműen visszakapható az eredeti idősor a (3) egyenlet alapján, valamint az idősor frekvenciák szerinti szűrése (ún. band-pass szűrés) is lehetséges. Mivel ψ a szakirodalomban fellelhető szinte minden alkalmazásban azonos, a továbbiakban a $W_{x,\psi}$ jelölés helyett az egyszerűbb W_x jelölést alkalmazom.

A wavelet-hatványspektrum a következő módon számítható ki a folytonos wavelet-transzformáltból:

$$WPS_x(\tau, s) = \frac{1}{s} |W_x(\tau, s)|^2, \quad (5)$$

¹² A COI függvényformájáról szintén lásd *Torrence – Compo (1998)*.

¹³ A (4) egyenletben definiált függvényalak nem teljesíti az (1) egyenletben állított alapfeltételt, azonban $5 \leq \omega_0$ esetén az eltérés elhanyagolhatóan kicsire csökken.

ahol $|\cdot|$ az abszolút érték operátort jelöli. A wavelet-hatványspektrum az x idősor lokális varianciáját ragadja meg. A hatványspektrum $\frac{1}{s}$ taggal történő korrekciója azért szükséges, hogy a lokális variancia a magas frekvenciákon ne legyen torzított, azaz ne becsülje alul a fizikai értelemben vett varianciát (Liu et al. 2007).

Mivel a Morlet anya-wavelet általános esetben komplex értékű, felbontható valós és képzetes részre. A valós rész az idősor lokális amplitúdóját adja meg az $AMP_x(\tau, s) = \sqrt{WPS_x(\tau, s)}$ képlet alapján. A képzetes rész arra vonatkozóan tartalmaz információt, hogy az egyes waveletek milyen fázisban vannak. Ez a fázisszög segítségével írható le: $\phi_x(\tau, s) = \text{Arctan}\left(\frac{\Im(W_x(\tau, s))}{\Re(W_x(\tau, s))}\right)$, ahol \Im a képzetes részt jelöli.

Legyen most $x(t), y(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Ekkor a kereszt wavelet-transzformáció az alábbi módon definiálható (Hudgins et al. 1993):

$$W_{x,y} = W_x W_y^* \quad (6)$$

ahol W_x és W_y az x és y idősorok wavelet-transzformáltjai. A WPS hatványspektrum analógiájára kiszámítható a lokális kereszt spektrum, ami a két idősor közötti lokális kovarianciát írja le. A spektrum korrekciójára ebben az esetben is szükség van (Veleda et al. 2012):

$$WCS_{x,y}(\tau, s) = \left| \frac{1}{s} W_{x,y}(\tau, s) \right| \quad (7)$$

A korrelációs mutató definícióját követve definiálható az úgynevezett wavelet-koherencia mutató, a következő alakban:

$$R_{x,y}(\tau, s) = \frac{S(WCS_{x,y}(\tau, s))}{[S(WPS_x(t, s)) S(WPS_y(t, s))]^{1/2}}, \quad (8)$$

ahol S egy simító operátor az idő- és a skáladimenzióban.¹⁴ A (8) képlet alapján számítva $0 \leq R_{x,y}(\tau, s) \leq 1$, míg simítás nélkül $R_{x,y}(\tau, s)$ azonosan 1 lenne minden időpontban és skála mellett.¹⁵

Kettőnél több változó esetén – a parciális korrelációhoz hasonló módon – parciális wavelet-koherencia számítható. Ehhez először érdemes bevezetni a komplex wavelet-koherencia fogalmát. Ez utóbbit a következő alakban írjuk fel:

$$\rho_{x,y}(\tau, s) = \frac{S\left(\frac{1}{s} W_{x,y}(\tau, s)\right)}{[S(WPS_x(t, s)) S(WPS_y(t, s))]^{1/2}} \quad (9)$$

¹⁴ A simító operátor függvényformájával kapcsolatban lásd például Torrence – Webster (1999), valamint Cazelles et al. (2007).

¹⁵ Ha valahol a (8) egyenlet nevezője 0, ott $R_{x,y}$ -t 0-nak tekintjük.

azaz a (9) egyenlet annyiban különbözik a (8) egyenlettől, hogy számlálójában általános esetben komplex szám szerepel. Ekkor a komplex parciális koherenciát a következő képlet adja meg (Aguiar-Conraria – Soares 2014):

$$\varrho_{x,y-z}(\tau, s) = \frac{\varrho_{x,y}(\tau, s) - \varrho_{x,z}(\tau, s) \varrho_{y,z}^*(\tau, s)}{\sqrt{(1-R^2_{x,z}(\tau, s))(1-R^2_{y,z}(\tau, s))}}, \quad (10)$$

ahol $\varrho_{x,y-z}$ jelöli a $z(t) \in L^2(\mathbb{R})$ idősor hatásának kiszűrésével számolt parciális koherenciát x és y között. Ez alapján a (valós értékű) parciális wavelet-koherencia:

$$R_{x,y-z}(\tau, s) = |\varrho_{x,y-z}(\tau, s)|. \quad (11)$$

A fázisszög általánosítása a kétváltozós esetre az alábbi módon írható fel (Grinsted et al. 2004):

$$\phi_{x,y}(\tau, s) = \text{Arctan}\left(\frac{\Im(W_{x,y}(\tau, s))}{\Re(W_{x,y}(\tau, s))}\right), \quad (12)$$

így $\phi_{x,y} = \phi_x - \phi_y$. Ennek következtében a (12) egyenletben definiált mutatót wavelet-fáziskülönbségnek is nevezik.¹⁶ A mutató $-\pi$ és π között vehet fel értéket, és azt mutatja meg, hogy a két idősor adott skálájú wavelete az adott időpontban milyen vezető-követő viszonyban van egymással. $\phi_{x,y} = 0$ esetén a két wavelet tökéletesen együttmozog, $\phi_{x,y} \in (0, \frac{\pi}{2})$ esetén x és y fázisban van (azaz a csúcsaik egybeesnek), és x vezet y idősort, $\phi_{x,y} \in (0, -\frac{\pi}{2})$ esetén szintén fázisban van a két változó, és y vezet x idősort. Ha $\phi_{x,y} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, akkor a két idősor nincs fázisban (azaz a csúcsaik nem esnek egybe), és y vezet, míg $\phi_{x,y} \in (-\frac{\pi}{2}, -\pi)$ esetén x a vezető. Ha $\phi_{x,y} = \pi$ vagy $-\pi$, akkor a két változó antifázisban van (azaz a csúcsaik éppen ellentétesek). A fáziskülönbség időbeli különbséggé is konvertálható a következőképpen:

$$\Delta T_{x,y}(\tau, s) = \frac{\phi_{x,y}(\tau, s)}{\omega(s)}. \quad (13)$$

Ez Morlet anya-wavelet mellett megközelítőleg $s\phi_{x,y}(\tau, s)$, vagyis a fáziskülönbség és a skála szorzata. Fontos, hogy a vezető-követő kapcsolat nem jelent okozatiságot: ha x vezet y idősort egy adott időpont és skála mellett, attól még például lehet, hogy valójában y okozza x -et, csak a hatás több mint egy teljes periódus alatt érvényesül.

A hatványspektrum (és a koherencia) szignifikanciájának tesztelésére Monte Carlo-szimulációkat alkalmaztam. Bár több tanulmány is foglalkozik a wavelet-együtthatók és a wavelet-koherencia aszimptotikus eloszlásával (például Ge 2008; Cohen – Walden 2010), az analitikus sűrűségfüggvény mindig az anya-wavelet alakjától

¹⁶ Más tanulmányok a simított kereszttranszformált argumentumát tekintik a fázisszögnek, azaz a (12) egyenletben simítást is végeznek az S operátorral. Ekkor általános esetben nem áll fenn a $\phi_{x,y} = \phi_x - \phi_y$ reláció (Aguiar-Conraria – Soares 2014).

függ, így nem általánosítható. Ezenfelül az aszimptotikus eloszlásokat szintén Monte Carlo-szimulációval állítják elő, így az eljárás közvetlen alkalmazása kézenfekvő. Az idősorokra $ARIMA(p, i, q)$ modellt illesztettem, és a becsült együtthatók segítségével, valamint a sztenderd normális eloszlásból húzva új idősorokat állítottam elő, majd ezekre szintén kiszámítottam a wavelet-transzformáltat és a hatvány-, illetve keresztspektrumot, így felépítve az aszimptotikus eloszlás közelítését (Torrence – Compo 1998).¹⁷

¹⁷ A szakirodalomban bevett gyakorlatot követve a fáziskülönbségeket csak a szignifikánsan koherens időpontok és skálák mellett számítottam ki. A fáziskülönbségek szignifikanciatesztjét nem végeztem el, mivel eloszlásuk mindig egyenletes $-\pi$ és π között, így nem állapíthatóak meg a próba kritikus értékei (Ge 2008).