

A nemteljesítésiráta-idősorok stacionaritásának gyakorlati kérdései banki elemzők számára*

Szigel Gábor  – Gyűrűs Boldizsár István 

Az IFRS 9 számviteli sztenderd, várható veszteségalapú értékvesztés-képzésének megjelenésével a banki gyakorlatban is elkerülhetetlenné vált olyan modellek használata, amelyek a banki default-ráták és egyes makrováltozók (GDP, munkanélküliség stb.) közötti kapcsolatot vizsgálják. Ezekben a modellekben a default-ráta-idősorok stacionaritása az egyik legkritikusabb tényező. Ezért tanulmányunkban olyan, szemléletes, a gyakorlatban és kevésbé ideális körülmények között is alkalmazható tanácsokat kívánunk megfogalmazni a banki szakemberek számára, amelyek segítenek eldönteni, hogy egy rövid, de a stacionaritás-teszteken megbukó default-ráta-idősort milyen körülmények esetén használhatnak mégis egyszerű, OLS-alapú regressziós modellekben. Amellett érvelünk, hogyha a default-rátára vonatkozó előrejelzésekkel szemben elvárás, hogy konzervatívak legyenek, akkor a nemstacionárius default-ráta-idősorok szerepeltetése az OLS-modellekben nem feltétlenül problémás.

Journal of Economic Literature (JEL) kódok: C22, C53, G21, G32

Kulcsszavak: default-ráták, stacionaritás, idősoelemzés

1. Bevezetés

Nem magától értetődő, hogy miért szükséges a default-ráta¹-idősorok stacionaritását általánosságban vizsgálni. Elvégre, ha valaki egy konkrét default-ráta-idősort akar felhasználni egy modellhez, akkor ellenőrzi a stacionaritást a megfelelő tesztekkel, és ennek megfelelően jár el: például, ha arra jut, hogy az idősor nem

* A jelen kiadványban megjelenő írások a szerzők nézeteit tartalmazzák, ami nem feltétlenül egyezik a Magyar Nemzeti Bank hivatalos álláspontjával.

Szigel Gábor: OTP Bank Nyrt., vezető tanácsadó. E-mail: Gabor.Tamas.Szigel@otpbank.hu

Gyűrűs Boldizsár István: OTP Bank Nyrt., tőkeszámitási szakértő. E-mail: Boldizsar.Istvan.Gyurus@otpbank.hu

A tanulmányban foglaltak kizárólag a szerzők saját véleményét tükrözik, és nem tekinthetők semmilyen módon az OTP Bank álláspontjának. A szerzők köszönetet mondanak Popov Atanáznak (OTP Bank) munkájuk támogatásáért.

A magyar nyelvű kézirat első változata 2023. június 16-án érkezett szerkesztőségünkbe.

DOI: <https://doi.org/10.25201/HSZ.22.4.107>

¹ Default-rátán a hitelportfóliók nemteljesítési rátáját értjük ebben az elemzésben. Ennek során végig a bázeli megközelítésből indulunk ki, ami szerint a default-ráta azt mutatja meg, hogy egy adott hitelportfólióban lévő kitétségek közül mennyinél jelentkezik nemteljesítési (default) esemény – 90 napot meghaladó késedelem vagy egyéb, a nemteljesítést valószínűsítő esemény, pl. az adós elleni csődeljárás stb. – a következő 12 hónapban. Fontos továbbá tisztázni a default-ráták és a nemteljesítési valószínűség közötti különbséget: utóbbin egy valószínűségi változót szokás érteni, amelynek konkrét jövőbeli értékei még nem ismertek. Ezzel szemben a default-ráta már ismert értékeket, a nemteljesítési valószínűség realizációját jelenti.

stacionárius, akkor nem használja OLS-regresszió² célváltozójaként, és ha ezután alternatív modellezési megközelítésekkel sem tudja az idősort megfelelően felhasználni, akkor új adatokat keres, vagy egyszerűen nem publikál az adott kutatási témában.

A banki gyakorlatban ez a fajta szabadság azonban nem mindig áll rendelkezésre. Az IFRS 9 számviteli szabályozás vagy a kötelező stressztesztelési gyakorlatok a hitelintézeteket az egyes kockázati paraméterek (nemteljesítés valószínűsége: PD, nem teljesítéskori veszteségráta: LGD) ún. előretekintő kiigazítása érdekében arra „kényszeríti”, hogy kvantitatív kapcsolatot találjanak a saját hitelportfólióik default-rátái és makrogazdasági változók idősorai között. Ilyen körülmények között a bankoknak gyakran kell beérni a modellépítéshez kevésbé ideális körülményekkel, mint például viszonylag rövid, 10–15 évre visszatekintő default-ráta-idősorokkal, illetve (ettől nem függetlenül) egymásnak ellentmondó és/vagy az éves frissítések során kiszámíthatatlanul változó (inkonzisztens) eredményű (nem eléggé robusztus) stacionaritástesztekkel.

Tanulmányunkban egyfajta gyakorlati útmutatót kívánunk nyújtani olyan banki szakembereknek, akik az IFRS 9 értékvesztési modellekhez, stressztesztetekhez vagy IRB³-modellekhez használnának fel olyan default-ráta-idősorokat, amelyeknél nincs egyértelmű bizonyíték azok stacionaritására (vagy ellenkezőjére).

Témafelvetésünk olyan értelemben nem precedens nélküli, hogy a nemzetközi szakirodalomban igen kiterjedt viták folytak egyes, gyakran használt makrogazdasági mutatók, főleg a GDP-idősorok stacionaritásáról (például: *Christiano – Eichenbaum 1990; Rapach 2002; Ozturk – Kalyoncu 2007*). Ugyanakkor a default-ráta-idősorokra nem készült még ilyen elemzés tudomásunk szerint.

A tanulmány az alábbi felépítést követi: a *második fejezetben* bemutatjuk a default-rátákat használó banki modellezési feladatok kontextusát. A *harmadik fejezet* áttekinti a stacionaritás fogalmát. A *negyedik fejezetben* megvizsgáljuk, hogy elméleti megfontolások alapján a default-ráta-idősorok tekinthetők-e stacionáriusnak. Az *ötödik fejezetben* Monte Carlo-szimulációkkal illusztráljuk, hogy rövid, default-rátaszerű idősorokon a leggyakrabban használt stacionaritás- (valójában: egységgyök-) tesztek gyakran adnak félrevezető eredményeket, végül a *hatodik fejezetben* bemutatjuk, hogy a nem stacionárius idősorokra is használható alternatív modellezési technikák miért adhatnak kevésbé (és akár nem is kielégítő mértékben) konzervatív eredményeket. Végül összegezzük a gyakorlati tanulságokat.

² Ordinary Least Squares, vagyis a regressziós hibatagok négyzetösszegének minimalizálásán alapuló paraméterbecslési eljárás.

³ Internal Ratings-Based

2. Modellezés default-ráta-idősorokkal a banki gyakorlatban

A bankok többnyire előrejelzési céllal használnak kvantitatív modelleket a hitelportfóliók nemteljesítési rátáira. Ezek logikája az, hogy megvizsgálják, milyen kapcsolat látszott a múltban a default-ráták és egyes más változók (leginkább makrogazdasági változók) között, majd az utóbbiakra előrejelzéseket készítenek (vagy vesznek át máshonnan), és ezekből levezetik a default-rátára vonatkozó predikcióikat.

A hitelintézetek legalább négy okból próbálják megbecsülni a default-rátákat különböző külső és belső tényezők függvényében:

- belső használatra: üzleti tervezéshez, menedzsment-döntések támogatására,
- az IFRS 9 szerinti várható veszteség alapú értékvesztés-képzés számítására,
- prudenciális (felügyeleti igényre készülő) stressztesztek futtatásához,
- hosszú távú átlagos (ciklusokon átívelő, ún. TTC⁴) PD-k visszabecsléséhez (pl. IRB szerinti tőkekövetelmény-számításhoz).

A belső célú felhasználás során a default-ráta előrejelzéséhez használt modellekkel szemben az egyetlen elvárás, hogy azok a valóságban jól működjenek, és ne vezessék félre a döntéshozókat.

A többi esetben azonban a bank által készített előrejelzéseket külső szereplők, például a könyvvizsgálók és a felügyelet is értékeli. Utóbbiak részéről alapvető elvárás, hogy a bankok robusztus statisztikai kapcsolatot találjanak a default-ráták, illetve a külső gazdasági környezetet leíró (makro) változók között [ennek IFRS 9-et érintő elemeiről lásd még például: *Háda (2019)*, az IRB-modelleket érintő elemeiről pedig *Nagy – Bíró (2018)*]. Például az Európai Bankhatóság (EBA) által lefolytatott stressztesztek során a bankoknak egy előre meghatározott makropálya (*ESRB 2023*) mentén kell kiszámítani veszteségeiket, valamint az IFRS 9 szerinti értékvesztés megbecslésénél is több makrogazdasági scenárióra számszerűsíteni kell⁵ a várható veszteségeket és azok egyik fő paraméterét, a nemteljesítési valószínűséget.

Noha az egyértelműnek látszik, hogy van kapcsolat a banki hitelportfóliók default-rátája és a gazdasági környezet mutatói között, ez a kapcsolat többnyire nem elég robusztus, illetve időben és struktúráktól függetlenül nem állandó, vonatkozik rá

⁴ Through-the-Cycle, vagyis ciklusokon átívelő, hosszú távú átlag.

⁵ Itt meg kell jegyezni, hogy maga az IFRS 9 sztenderd, illetve annak az európai jogba való átültetése nem írja elő explicit módon, hogy a bankok kvantitatív modelleket használjanak az előretekinthető veszteségek kiszámítására. Ugyanakkor a banki-könyvvizsgálói gyakorlatban messzemenőleg elterjedté vált az ilyen modellek alkalmazása és számonkérése. Noha tehát az IFRS 9 sztenderdnek betű szerint akár egy olyan előretekinthető korrekciós modell is megfelelne, amely szerint az előretekinthető PD egyenlő a legutolsó megfigyelt default-rátával, ha a következő évre nem várunk gazdasági recessziót, és a PD = a legutolsó megfigyelt default-ráta 150 százaléka, ha igen – a valóságban ennél statisztikailag jóval megalapozottabb modelleket várnak el a könyvvizsgálók és felügyelet.

a „Lucas-kritika”⁶, ahogy erre *Simons és Rolwes (2009)* is felhívta a figyelmet. Ezt a 2020–2021-es Covid-válság-epizód is bizonyította: noha Magyarország 2020-ban a 2008-as válság utánival összemérhető GDP-visszaesést szenvedett el, a 2020–2021-ben megtapasztalt banki default-ráták – köszönhetően a válság eltérő jellegének és a különböző kormányzati válaszoknak is – meg sem közelítették a Lehman-összeomlás után tapasztaltakat.

Ugyanakkor az említett könyvvizsgálói és felügyeleti elvárások mégis kikényszerítik, hogy a bankok a múltbeli default-ráta-idősoraik és a makrogazdasági indikátorok között hosszú távú, állandó kapcsolatokat számszerűsítsenek, és azokat alkalmazzák az előrejelzéseikben. Noha az ilyen modellek gyengeségeit korrigálhatják ún. „modelleken kívüli kiigazításokkal” (overlay), egy múltbeli idősorokra építő „alapmodell” használatától többnyire így sem tekinthetnek el. Ezekhez leggyakrabban valamiféle egyszerű, OLS-alapú regressziós becslést alkalmaznak (noha már egyéb módszerek is rendelkezésre állnak, ezekről lásd röviden: 3.5. *alfejezet*).

3. A stacionaritás fogalma és szükségessége OLS-regressziókban

Ebben a fejezetben röviden bemutatjuk, hogy mit jelent az idősorok stacionaritása, illetve miért van rá szükség az OLS-módszerrel becsült regressziókban. Mivel ennek a témának a kifejtése bőven megtalálható ökonometriával foglalkozó tankönyvekben (például: *Békés – Kézdi 2019*), ezért csak a legszükségesebbek ismertetésére szorítkozunk.

3.1. A stacionaritás fogalma

Egy idősort, pontosabban egy azt generáló folyamatot akkor tekinthetünk stacionáriusnak, ha eloszlási tulajdonságai nem változnak az idővel. Ezt a gyakorlatban leegyszerűsítően úgy szokták alkalmazni, hogy az a folyamat stacionárius, amelynek várható értéke és varianciája időben állandó („gyenge stacionaritás”).⁷ A stacionárius folyamatokkal generált megfigyelések tehát a véletlen ingadozásoknak köszönhetően rövid távon eltérhetnek ugyan a folyamat hosszú távú átlagától, de ahhoz előbb-utóbb visszatérnek, ezt hívják az „átlaghoz való visszahúzásnak” (mean reversion).

⁶ A Lucas-kritika – *Robert Lucas (1976)* szerint – eredetileg azt állítja, hogy a közpolitikák hatásainak becslését nem lehetséges kizárólag múltbeli adatokban megfigyelt makrogazdasági összefüggésekre (ökonometriai modellekre) alapozni, mivel az egyének döntéseit befolyásoló struktúrák nem állandók és kiszámíthatatlanok, ezért ezek a modellek hosszabb távon nem adnak megbízható előrejelzéseket. Lucas a cikkben ugyan megengedi, hogy az ilyen ökonometriai modellek rövid távon jól teljesíthetnek az előrejelzésekben, ugyanakkor azt is megemlíti, hogy még ez sem feltétlenül igaz, ha a mögöttes struktúrák és a gazdasági szereplők ösztönzői hirtelen és jelentősen változnak meg.

⁷ Valójában a „gyenge stacionaritás” pontos definíciója, hogy a folyamat várható értéke és egymástól bármely tetszőleges távolságra levő eleme közötti autokovariancia állandó.

3.2. Mitől lesznek a folyamatok nemstacionáriusok?

A folyamatokat és a leképződésüket jelentő idősorokat az alábbi okok fennállása teheti nemstacionáriussá:

- *Determinisztikus trend:* a folyamat egy időtől függő, állandó trendet követ, például hosszú távon folyamatosan nő, vagy csökken. Az ilyen folyamatoknak a várható értéke biztosan nem állandó. Például: a tőzsdeindexek nem stacionáriusak, mert hosszú távon általában nőnek.
- *Sztochasztikus trend, véletlen bolyongás:* a folyamat véletlenszerű trendet követ, amelyet a folyamat egymást követő elemei közötti 1-nél nagyobb vagy egyenlő autoregresszív együtttható okoz. Például: egyedi részvények árfolyama jól jellemezhető véletlen bolyongással, hiszen a mai árfolyam mindig közel lesz a tegnapi árfolyamhoz, de nem tudjuk, hogy hol lesz az árfolyam hosszabb távon. Az ilyen folyamatnak a varianciája időben előrehaladva folyamatosan nő, és a várható értéke sem független a folyamat elemeinek korábbi realizációjától (tehát nem állandó).
- *Szezonális:* a folyamat várható értéke szezonális időbeli tényezőktől függ. Például a fagyalteladások szezonálisak, mivel a nyári melegben az emberek több fagyaltot fogyasztanak.
- *Strukturális törés:* a strukturális törés a folyamat eloszlásának megváltozását okozza, ami érintheti akár a várható értéket, akár az eloszlás más jellemzőit, tehát azok végül nem lesznek állandók. Például: a gyertyák eladási volumene az elektromos világítás elterjedése előtt és után.

3.3. Ciklikus ingadozást követő változók és a stacionaritás

A ciklikusság – amit azért vizsgálunk részletesebben, mert témánk tárgya, a default-ráták is jellemzően ciklikusak – első ránézésre sok szempontból hasonlónak tűnik a szezonálitáshoz: mindkettő esetében egymást váltják olyan időszakok, amikor a változó az adott időszakra (tél/nyár vs. válság/nem válság) jellemző értékeket vesz fel. Ugyanakkor fontos hangsúlyozni, hogy a ciklikusság – szemben a szezonálitással – önmagában nem jelenti azt, hogy egy folyamat nem stacionárius: a ciklikusságot mutató idősorok (például a GDP növekedési üteme) várható értéke és szórása megfelelően hosszú távra előretekintve lehet állandó, mivel a ciklusok hossza nem állandó és így nem is kiszámítható⁸, szemben a szezonálitással. A ciklikusságnak pont az a lényege, hogy a folyamat az egyes kilengések után mindig „visszahúzza az átlagához”.

⁸ A közgazdasági irodalomban korábban felmerült, hogy a gazdasági ciklusoknak valamiféle „természeti törvénynek” kellene engedelmessé válniuk és közel szabályos időközönként követni egymást (pl. Kondratyev-ciklus), de ezt a modern közgazdasági gondolkodás nagyrészt elutasítja.

3.4. A stacionaritás-problémák OLS-regressziókban: a hamis regressziók

Egy folyamat stacionaritási tulajdonságai nem önmagukban érdekesek, hanem akkor, ha az azzal generált idősort regressziós modellek segítségével előrejelzésre akarjuk használni. A nemstacionárius idősorok használata OLS-regressziós modellekben „hamis korrelációhoz” (*spurious correlation*) vezet, amint az jól ismert legalább az 1970-es évek óta *Granger és Newbold (1974)* cikkéből.

Hamis korrelációról akkor beszélhetünk, ha a változók a megfigyelési időszakban valós ok⁹ nélkül, tulajdonképpen csak véletlenül mozognak együtt. Ez leginkább az alábbi esetekben állhat elő:

- ha a változók *determinisztikus trendet* követnek (pl. mindkettő folyamatosan nő): ezek a hamis regresszió legkézenfekvőbb példái (pl. a Föld átlaghőmérséklete és Magyarország GDP-je az elmúlt 30 évben);
- ha a változók *sztochasztikus trendet* követnek, pl. mindkettő véletlen bolyongás (random walk). Bár ez kevésbé intuitív, a már fentebb hivatkozott *Granger és Newbold (1974)* cikke megmutatta, hogy véletlenszerűen generált véletlen bolyongások között is nagy valószínűséggel található regresszió, mivel a perzisztens véletlenszerű változások is tudnak látszólag azonos irányba mutató trendeket eredményezni;
- ha a változók *szezonálisak* (például a fagyalteladások és vízbefulladások száma);
- ha a változókat generáló folyamatokban *strukturális törés* (perzisztens változás) van (például a gyertyagyártás és az ígáslovak száma is csökkent az elmúlt 100–150 évben a bekövetkezett technológiai fejlődésnek köszönhetően, noha a kettő között már középtávon sincs kapcsolat).

A hamis együttmozgások nem használhatók jól előrejelzésre, hiszen az általuk megragadott kapcsolat a változók között a valóságban nem létezik, ezért az az előrejelzési horizonton sem fog várhatóan érvényesülni. Az ilyen regressziók az OLS-bebecsléseknél a magas R^2 és erősen autokorrelált hibatagok (jóval 1 alatti Durbin-Watson-statisztikákkal) egyidejű jelenlétével azonosíthatók. Az autokorrelált hibatagok legfontosabb következménye, hogy a regressziós együttthatók (béták) t-statisztikáinak felülbecsléséhez vezetnek: ilyenkor a p-értékek is megbízhatatlanokká válnak, így az a statisztika, ami alapján meg kellene ítélnünk, hogy az adott magyarázó változó hatása a célváltozóra statisztikailag szignifikánsnak bizonyul-e, megbízhatatlanná válik.

Fontos hangsúlyozni ugyanakkor, hogy annak eldöntése, hogy két változó között hamis vagy valódi együttmozgás áll fenn, nem történhet csak statisztikai paraméterek

⁹ Tehát anélkül, hogy azok között vagy közvetlen ok-okozati kapcsolat, vagy legalább valamiféle stabil indirekt (pl. azonos gyökérokra visszavezethető) kapcsolat lenne.

értékelésével, hanem mindig meg kell vizsgálni hozzá az elméleti megfontolásokat: van-e a két változó között közvetlen ok-okozati kapcsolat, vagy akár visszavezethető-e mindkét változó mozgása ugyanarra a gyökérokra. Ha igen, akkor ilyen elméleti megfontolások alapján a két változó együtt mozgása valószínűsíthetően valódi.¹⁰

3.5. Alternatív modellezési megközelítések nemstacionárius idősorokra

Vannak olyan modellezési megközelítések a nemteljesítési valószínűség és a makrováltozók kapcsolatának becslésére, amelyekben a stacionaritással kapcsolatos problémák könnyebben elkerülhetők. Például a PD adósszintű becslése logisztikus regresszióval, amelyben mind az adós tulajdonságaira, mind a makrováltozókra kontrollálunk, eleve kikerülhető a portfóliószintű default-ráta-idősorok használata, így nem merül fel azok stacionaritási problémája sem (ráadásul ebben az esetben a becslőfüggvény nem OLS).

Továbbá nemstacionárius, de azonos szinten integrált – vagyis kointegrált – változókra adható konzisztens becslés OLS-módszerrel is.

A szerzők tudatában vannak, hogy ilyen alternatív megközelítésekkel maga az egész problémakör kikerülhető – ugyanakkor ezek a megoldások többnyire jóval több adatot vagy egyéb feltételek teljesülését igénylik, ezért alkalmazásukra nincsen minden esetben mód. Ezért a portfóliószintű default-ráták stacionaritásának vizsgálata a banki gyakorlatban (egy ideig még) továbbra is aktuális marad.

4. A default-ráták stacionaritása elméleti megfontolások alapján

4.1. A default-ráta-idősorok stacionárius tulajdonságai

A portfóliószintű nemteljesítési (default)-ráta idősorok – pontosabban az azokat generáló portfóliószintű nemteljesítési valószínűség (probability of default, PD) mint valószínűségi változó – a közgazdasági elmélet alapján számos olyan tulajdonsággal rendelkeznek, mint a stacionárius folyamatok is:

- *hosszú távon állandó várható érték*: a banki gyakorlatban és az IFRS 9 számviteli sztenderd megközelítése szerint is a banki hitelportfóliók nemteljesítési valószínűsége egy hosszú távú, ciklusokon átívelő várható érték (TTC PD) körül mozog (1. ábra). Ez tehát azt jelentené, hogy a folyamat várható értéke állandó, igaz, ennek van egy feltétele is: az adott hitelportfólió strukturális tulajdonságai (portfólió-összetétel, külső szabályozás és környezet stb.) változatlanok. Ez fontos korlát, amire a 4.3. alfejezetben hamarosan kitérünk;

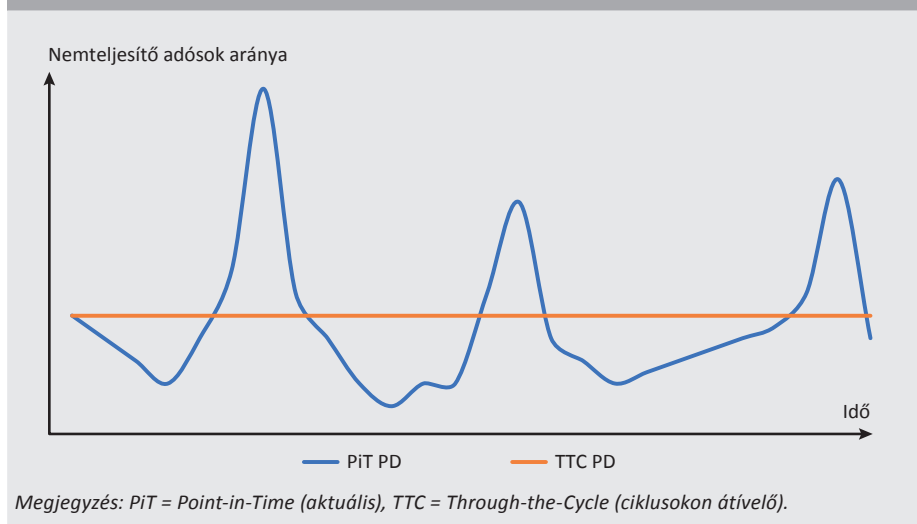
¹⁰ Noha az is igaz, hogy még ilyen esetben is az együtt mozgás erőssége lehet gyengébb, mint amit a regressziós eredmények sugallnak.

- **átlaghoz való visszahúzás:** a válságidőszakok magas default-rátái vagy a konjunkturális időszakok alacsony nemteljesítési értékei után a default-ráta a gazdasági ciklus alakulásának függvényében előbb-utóbb visszalendül a hosszú távú átlag felé;
- **időbeli függetlenség:** mivel a TTC PD-től való eltérést elméletileg alapvetően a gazdasági ciklus ingadozásai mozgatják, amelyekben a sokkoki jelentős részben külsőnek és véletlenszerűnek tekinthető (pl. Covid-járvány, orosz-ukrán háború stb.), ezért előretekintve a nemteljesítési-ráta várható értéke és szórása nem függ a jelenlegi vagy múltbeli megfigyelésektől. Ezért a valóságban a PD ciklikussága nem olyan szabályos, mint például egy sinus-görbe, sőt jellemzőbb, hogy hosszan tartó „nyugalmass időszakokat” követ egy-egy rövidebb válságperiódus (1. ábra). Ez a ciklusosság azonban nem determinisztikus, mint például a szezonális változók esetében. Bár a gazdaság ciklusai miatt a folyamat szomszédos megfigyelései között van korreláció (az ideai default-ráta általában hasonló lesz a tavalyihoz), ennek mértéke és iránya nem állandó és nem is független a ciklusban való aktuális pozíciótól. És persze itt is fontos hangsúlyozni, hogy még ha a gazdasági ciklusok miatt van is korreláció az éves default-ráták szomszédos elemeiben, ez egészen addig, amíg ez a korreláció együtttható 1-nél kisebb, nem jelenti azt, hogy a folyamat nem stacionárius.

Összességében tehát a default-ráta-idősorok ciklikus jellegű változók, amelyeknél érvényesül az átlaghoz való visszahúzás és bizonyos feltételek mellett – állandó

1. ábra

A TTC és a PiT PD absztrakciója



portfólió-összetétel és szabályozási környezet – a megfelelően hosszú időre előre tekintve állandó várható érték, amelyek stacionárius tulajdonságok.

Mindemellett a portfóliószintű PD-k esetében egyértelműen kizárható számos olyan tulajdonság is, amely a 3.2. *alfejezetben* bemutatottak szerint nem-stacionáriussá tesz idősorokat:

- mivel a PD korlátos (0–1 között alakul¹¹), eleve nem követhet determinisztikus trendet,
- ez a korlátosság a sztochasztikus trend jelenlétét is kizárja,
- nem szezonális: mivel a PD a bázeli definíció szerint eleve a 12 hónapra vonatkozó nemteljesítési valószínűséget jelenti, ezért éven belüli szezonális definíció szerint nem lehet benne.

4.2. A default-ráta-idősorok ciklikussága és a stacionaritás

A default-ráta-idősorok ciklikusak, amint azonban a 3.3. *alfejezetben* utaltunk rá, a ciklikusság önmagában nem zárja ki a stacionaritást. Itt olyan probléma elméletileg felmerülhetne, hogy a default-rátákat más, azzal valós ok-okozati kapcsolatot nem mutató, de ugyanúgy ciklikus változóval próbálunk magyarázni. A banki modellezési gyakorlatban ez a veszély többnyire nem fenyeget: a 2. *fejezetben* bemutatott modellezési célokra a hitelintézetek általában a gazdasági ciklust leginkább reprezentáló – tehát magát a gyökérokot mérő – indikátorokat, így például a GDP-növekedést, a munkanélküliséget stb. használják.¹²

4.3. Strukturális törések a default-ráta-idősorokban és a stacionaritás

A portfóliószintű default-ráták esetében van egy olyan mechanizmus, amely a mögöttes folyamat stacionaritását veszélyeztetheti: az esetleges strukturális változások. A default-ráták idősoraiban strukturális töréseket többek között az alábbi jelenségek okozhatnak:

- *Adatgyűjtési folyamat vagy definíciók változása:* ezek a legnyilvánvalóbb esetei a strukturális törésnek, jó példa rájuk a default definíciójának megváltozása.¹³ Bár ezeket meg lehet próbálni statisztikai módszerekkel korrigálni, de ez az idősor

¹¹ Sőt a valóságban a PD ingadozása jellemzően még ennél is szűkebb, például lakáshiteleknel jellemzően 0–5 százalék közötti intervallumban szokott maradni.

¹² Ugyanakkor itt fokozott óvatosság is szükséges, mivel számos olyan makrogazdasági indikátor létezik, amelyik ciklikus, de mégsem tekinthető a gazdasági ciklus legjobb reprezentációjának. Például a GDP egyes komponensei, esetleg azok GDP-hez viszonyított aránya nem feltétlenül mutatja jól a gazdasági környezetben az összképet. Például az export/GDP mutató változása – bár historikus tapasztalat lehet, hogy jobb időszakokban nő vagy csökken – valójában nem feltétlenül ragadja meg jól a gazdaság állapotát, mivel romolhat úgy is, hogy például a GDP nő, de úgy is, ha csökken.

¹³ Például az *Európai Bankhatóság EBA/GL/2016/07. számú irányelve* által bevezetett új default-definíció, ami 2017-ben okozott töréseket a default-idősorokban azon bankoknál, ahol az új definíciót nem tudták visszamenőlegesen alkalmazni.

egyreszeinek újrabecsléseivel jár, ami szükségszerűen további bizonytalanságot visz a modellezésbe.

- **Banki hitelezési feltételek változása:** ha egy bank megváltoztatja az üzleti stratégiáját (vagy a szabályozás változása kényszeríti ki belőle ilyet), és például visszavonul a kockázatosabb ügyfélszegmensekből, azzal megváltoztatja az adott hitelportfólió TTC PD-jét (a várható értéket).
- **Külső környezet változása:** a fentiek mellett elképzelhető számos olyan további változás is, ami még azonos banki viselkedés mellett is szintén megváltoztatja egy-egy hitelportfólió TTC PD-jét, például: kormányzati ösztönzők (erkölcsi kockázat – „moral hazard” – növekedése, ami nemfizetésre ösztönzi az adósokat vagy ellenkezőleg: adósmentő programok, amelyek csökkentik a nemfizetési rátát), jogszabályi környezet változása (az adósok fizetési hajlandóságát változtató szabályok, pl. az „elsétálás jogának” bevezetése vagy felfüggesztése, bírósági döntések hatása) vagy egyéb, kulturális változások (például: a fogyasztók tanulása).

Ha ezek a változtatások gyakran és hatásuk irányát tekintve kvázi véletlenszerűen történnek, az nem okoz változást hosszú távon előretekintve a portfólió PD-jének várható értékében, tehát a stacionaritás továbbra is fennállhat. Ha azonban egy default-ráta-idősorban csak 1–2 jelentősebb strukturális törés van, akkor az idősort generáló folyamat várható értéke értelemszerűen nem lesz állandó, tehát az nem is tekinthető stacionáriusnak.

Összességében tehát a default-ráta-idősorok pusztán elméleti érvek alapján akkor tekinthetők stacionáriusnak, ha a jelentős strukturális törések jelenlétét a múltbeli adatokban nagy bizonyossággal kizárhatjuk (vagy hatásukat képesek vagyunk legalább megbízhatóan kiszűrni).

5. A stacionaritás tesztelésének megbízhatósága a default-ráta-idősorok esetében

Noha az előző fejezetekben bemutatottak szerint elméleti-közgazdasági megfontolások alapján és az idősort generáló folyamat – strukturális törések kiszűrése – vizsgálatával nagyjából eldönthető, hogy egy default-ráta-idősor tekinthető-e (annyira) stacionáriusnak, ami a „hamis regressziók” elkerüléséhez elegendő, a modellezési dokumentációkkal kapcsolatos alapvető elvárás, hogy tartalmazniuk kell formálisan is a felhasznált idősorok stacionaritástesztjét. Utóbbi célra a legelterjedtebbek az olyan egységgyök-tesztek, mint az Augmented Dickey–Fuller-teszt (ADF) vagy a Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin-teszt (KPSS) és még néhány egyéb. Ugyanakkor ezek a tesztek – ahogy ebben a fejezetben először egy rövid irodalom-összefoglalóval, majd saját Monte Carlo-szimulációkon keresztül is bemutatjuk – rövidebb

idősorokon nem adnak megbízható eredményeket, és könnyen vezethetnek stacionárius folyamatok nemstacionáriusként történő azonosításához.

Ez azért probléma, mert a banki default-ráta esetében – főleg a kelet-közép-európai régióban – rövid idősorok állnak rendelkezésre: a bankok jellemzően csak a Bázel II. 2000-es évek közepén történt megjelenését követően kezdték el strukturáltan gyűjteni a default-adatokat, ezért ezeknek az idősoroknak a hossza 2023-ban a legjobb esetben is legfeljebb 15 év. Ráadásul erre az időszakra csak egyetlen teljes gazdasági ciklus esett (a Lehman-összeomlás és a globális pénzügyi válság, illetve az azt követő kilábalás – főleg, mivel a Covid-időszak adatai gyakran nem használhatóak megfelelően).

5.1. Rövid idősorok tesztelésének kihívásai

A szakirodalomban közismert probléma, hogy a stacionaritástesztek rövid idősorokon nem adnak megbízható eredményt. *Arltová és Fedorová (2016)* Monte Carlo-szimulációk segítségével bemutatta, hogy a legtöbb stacionaritásteszt 50 vagy annál kevesebb megfigyelésből álló idősor esetén félrevezető eredményt ad, vagyis nemstacionáriusnak mutat stacionárius folyamatokat. A legmegbízhatóbbnak a – fordított null-hipotézissel¹⁴ dolgozó – KPSS-teszt bizonyult. Ugyanakkor a szerzők azt is vizsgálták, hogy az eredményeket hogyan befolyásolja, ha a szimulációhoz használt alapfolyamatban van autokorreláció (0 és 1 közötti értékek mellett több szimulációt is futtattak). Az eredmények azt mutatták, hogy az autokorreláció növekedése rontotta a tesztek megbízhatóságát is: 0,5 fölötti autokorreláció esetén a KPSS-tesztet kivéve valamennyi teszt megbízhatósága drasztikusan romlani kezdett, 0,7-es érték fölött pedig még a KPSS-teszt is megbízhatatlanná vált. Ez esetünkben azért is külön problematikus, mert az empirikus tapasztalatok – amelyekre az 5. és 6. fejezetekben példát is hozunk – azt mutatják, hogy az éves frekvenciájú default-ráta-idősorok szomszédos elemei között viszonylag magas, jellemzően 0,5–0,7 körüli nagyságrendű a korreláció.

A stacionaritás kis mintákon való tesztelésére születtek különböző alternatívák: egyes szerzők, például *Jönsson (2006)* a KPSS-tesztre, *Otero és Smith (2003)*, valamint *Cheung és Lai (1995)* az ADF-tesztre dolgoztak ki kis mintákra jobban alkalmazható kritikus értékeket, amelyeknél kisebb a valószínűsége annak, hogy a teszt tévesen nem-stacionáriusná nyilvánít egy stacionárius folyamatot. Ugyanakkor ennek ára, hogy ezen tesztverziók a fordított irányú hibát (stacionárius folyamat nemstacionáriussá nyilvánítása) is nagyobb valószínűséggel követik el – ráadásul ezek a kritikus érték-táblázatok nem is váltak általánosan elterjedté. *Cochrane (1991)* ráadásul arra is rámutat, hogy az autokorrelált folyamatok esetén – mint

¹⁴ Míg a legtöbb, a stacionaritás tesztelésére használt teszt, pl. az ADF-teszt nullhipotézise az, hogy az adott idősorban jelen van egységgyök (vagyis az nem stacionárius), addig a KPSS-teszt nullhipotézise az, hogy az idősor stacionárius.

amilyenek többnyire a default-ráta-idősorok is – a tesztek eredménye véges mintákon félrevezető lehet. Összességében tehát nem sikerült megtalálni a „bölcsek követ” a stacionaritás rövid idősorokon való teszteléséhez, ami nem is meglepő, hiszen az alapprobléma pontosan abból fakad, hogy egyszerűen nincsen elegendő megfigyelésünk arról, hogy az idősort generáló folyamat állandó várható értékkel és egyéb eloszlás-tulajdonságokkal rendelkezik-e.

Azt, hogy a megfigyelések száma hogyan hat a stacionaritástesztek eredményére, a 2. ábrán szemléltetjük: itt a Moody's Ba¹⁵ vállalati ratingosztályában megfigyelt default-ráta-idősort mutatjuk be 1920 és 2006 között¹⁶, majd kiszámítottuk az idősor minden pontjára (az elejétől számított) ADF-teszt szerinti t-statisztikát¹⁷. Ha ez a szám a $-2,6$ -os, kritikus értéknél kisebb, akkor 10 százalékos konfidenciaszinten igazolható az idősor stacionaritása. Mint látható, az idősor elején, egészen az első kb. 20 megfigyelésig a t-statisztika nagyobb a kritikus értéknél, tehát itt az ADF-teszt nemstacionáriusnak mutatja a folyamatot. Ezt az eredményt az idősor vizuális szemrevételezése is valamelyest megerősíti: az 1930-as évekig a default-rátába egy emelkedő trend könnyen belelátható. Hosszabb távon azonban ezt a default-ráta-idősort az ADF-teszt már stabilan stacionáriusnak azonosítja 10 százalékos szignifikanciaszinten (sőt az 1970-es évektől már 1 százalékos szignifikanciaszinten is). Az tehát, hogy milyen hosszú a folyamatra vonatkozó megfigyelések időszaka, jelentősen befolyásolja a teszt eredményét.

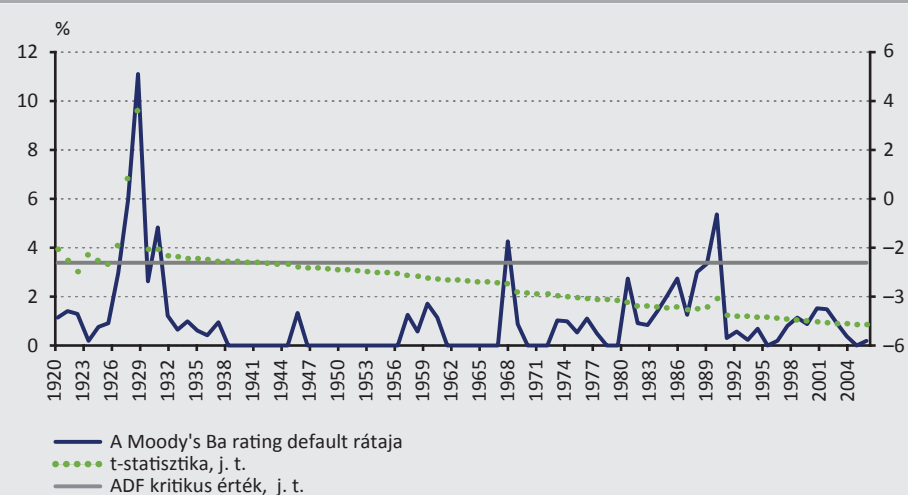
¹⁵ Azért a Ba ratingosztályt választottuk, mert itt – szemben a magasabb ratingosztályokkal – viszonylag sok, nullától eltérő default-ráta-megfigyelés volt az évek során, ami jellemzőbb – a külső hitelminősítő ügynökségek által minősített cégekhez képest kisebb méretű, sérülékenyebb ügyfeleket tartalmazó –banki hitelportfóliókra.

¹⁶ Moody's (2007:20–21): Exhibit 21 – Annual Issuer-Weighted Corporate Default Rates by Letter Rating, 1920–2006.

¹⁷ Konstanssal számolt eredmények. A differenciák lag-jeinek kiválasztásakor az alábbiak szerint jártunk el: megvizsgáltuk a teljes idősoron, hogy mely lag-ek voltak a regresszióban szignifikánsak legalább 10 százalékos szinten, és a nem-szignifikáns lag-eket kihagytuk a regresszióból. A vizsgált idősor esetében egyik lag sem szignifikáns, így valójában az ADF-teszt a sima Dickey–Fuller-tesztre redukálódik. Megjegyzendő, hogy a lag-ek szerepeltetése esetén a t-statisztikák ugyanolyan határozott csökkenő tendenciát mutatnak (igaz, kicsit magasabb szinteken), sőt 2006-ra az 1-től 6 lag szerepeltetéséig valamennyi teszt-specifikáció stacionáriusnak igazolja vissza az idősort.

2. ábra

A Moody's Ba ratingosztályához tartozó default-ráták 1920 és 2006 között, valamint ezen idősor t-statisztikája az ADF-teszt szerint



Megjegyzés: A t-statisztika x tengely értékeihez tartozó pontjai a t. időpontban azt mutatják, hogy mekkora az ADF-teszt t-statisztikája az idősor elejétől a t. megfigyelésig terjedő szakaszon (a differenciák lag-jeinek számával kapcsolatban lásd még a 17. lábjegyzetet). A kritikus értékeket T=25 értékre konstanssal és trend nélkül számítottuk 10 százalékos szignifikanciaszint mellett. Bár a kritikus érték változik a megfigyelésszám függvényében, ez olyan kicsi mértékű, hogy az illusztráció mondanivalóját nem befolyásolja.

Forrás: Számítások a Moody's (2007) adatai alapján

5.2. A saját Monte Carlo-szimulációs gyakorlatok eredményei

A szakirodalomban a stacionaritásteszték kismintás megbízhatatlansága általános-ságban nem újdonság, ugyanakkor az ezt bemutató vizsgálatok jellemzően nem default-rátaszerű (hanem többnyire valami normális eloszláson alapuló) folyamatokra készültek. A default-rata-idősorok azonban több szempontból is különleges eloszlást követnek: egyrészt korlátosak (hiszen egy portfólió default-rátája nem eshet a 0–100 százalék közötti sávon kívül), másrészt többnyire ciklikus (válság/nem válság) epi-zódokra bonthatók. Mindezek miatt biztosan nem követhetnek normális eloszlást.

Ezért ebben az alfejezetben Monte Carlo-szimulációkkal megvizsgáljuk az ADF- és a KPSS-teszték megbízhatóságát olyan folyamatokra, amelyek kifejezetten default-rátaszerűek. A más szerzők, például Arltová és Fedorová (2016) munkájához képest két újdonságot vezetünk be:

- Egyrészt az ADF- és a KPSS-teszteket egyszerre fogjuk alkalmazni a generált idősorokra, hogy lássuk, ez összességében növeli-e a tesztek megbízhatóságát („legalább az egyik helyesen ismeri fel a folyamatot”). Azért ezt a két tesztet választottuk ki, mert a banki gyakorlatban is ezek a legelterjedtebbek, illetve ezek

eltérő nullhipotézissel dolgoznak, így jobban kiegészíthetik egymást (lásd 14. lábjegyzet).¹⁸

- Másrészt a szimulációt kifejezetten default-rátaszerű – tehát korlátos, 0–1 közé eső, illetve ciklikus tulajdonságokkal is rendelkező – folyamatokra is kipróbáljuk.

Összesen nyolcféle folyamatot fogunk megvizsgálni: négy nem default-rátaszerűt és négy default-rátaszerűt.

A nem default-rátaszerű folyamatokat egyfajta „kontrollcsoportként” és a szakirodalmi eredményeket is reprodukálандó vizsgáljuk. Négy ilyen folyamatot használunk:

1. folyamat: *Stacionárius, nem autokorrelált, normális eloszlású;*
2. folyamat: *Véletlen bolyongás (random walk) – nem stacionárius;*
3. folyamat: *Stacionárius, erősen ($\rho = 0,7$) autokorrelált;*
4. folyamat: *Stacionárius, nagyon erősen ($\rho = 0,9$) autokorrelált.*

Default-rátaszerű folyamatokból az alábbi négyet vizsgáljuk meg:

5. folyamat: *Korlátos, nem autokorrelált, ciklikus stacionárius:* véletlenszerűen váltakozó válság és nem válság állapotokban különböző (ciklikus) várható értékű folyamat, amely a 0–1 sávban mozog;
6. folyamat: *Korlátos, autokorrelált, átlaghoz visszahúzó stacionárius:* autoregresszív, véletlenszerűen érkező válságsokkokat tartalmaz, és van benne egy hibakorrekciós elem, ami annál jobban húzza vissza az átlaghoz a folyamatot, minél nagyobb volt az eltérés tőle az előző megfigyelésnél. A 0–1 sávban mozog;
7. folyamat: *Magyarországi vállalati csődrátából véletlen húzással (bootstrapping) generált, nem autokorrelált folyamat:* ennek során a 6.1. alfejezetben részletesebben bemutatott hazai csődrátá-idősor éves megfigyeléseiből húztunk véletlenszerűen, így generálva ezzel összefüggő default-rátaszerű sorozatot, amely ciklikus és a 0–1 sávban mozog (viszont törvénytelenül nem autokorrelált);

¹⁸ Ráadásul a tesztet bemutató Arltová és Fedorová (2016) eredeti (korábban már hivatkozott) cikkben a teszt alkotói azt is leírják, hogy az KPSS-tesztnél annál nagyobb a nullhipotézis elvetésének valószínűsége („overrejection”), minél messzebb van a folyamatban lévő (pozitív) autokorreláció a nullától.

8. folyamat: A Moody's Ba ratingosztályának historikus default-rátáinak fix hosszúságú szakaszaiból álló sorozatok (autokorrelált): ennek során a korábban már bemutatott Moody's Ba default-ráta-idősor különböző hosszúságú szakaszait vizsgáljuk meg, véletlenszerűen meghatározott időpontokban. Ennek a módszernek az előnye, hogy mivel a szakaszok hosszúsága fix és a Moody's default-ráta-idősor a közepesen autokorrelált ($\rho = 0,5$), ezért a generált idősorok is autokorreláltak maradnak.

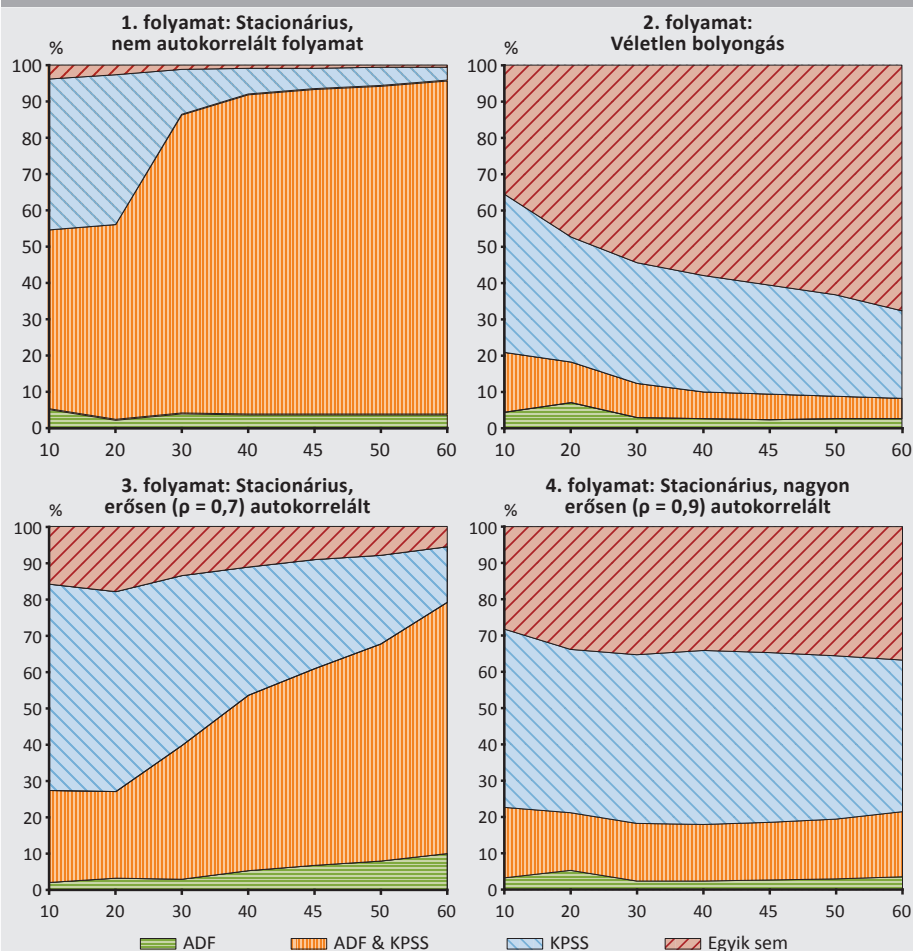
A folyamatok pontos, képletszerű definícióját a *Melléklet* tartalmazza. A Monte Carlo-szimuláció során minden folyamatnál 100 000 idősort generáltunk (kivéve a 8. folyamatot, ahol a historikus Moody's idősor fix szakaszait használtuk, itt csak kevesebb idősort tudtunk vizsgálni, lásd: *Melléklet*). Ezek után – a Python beépített „statsmodels.tsa.stattools” programcsomagjával – kiszámoljuk mindegyik szimulációra az ADF- és KPSS-tesztstatisztikákat, ezeket összevetjük a 10 százalékos szignifikanciaszinthez tartozó kritikus értékekkel (lásd *Dickey – Fuller 1979* és *Kwiatkowski et al. 1992*), majd ezek alapján megállapítjuk, hogy a generált idősorok hány százaléka lesz stacionárius:

- csak az ADF szerint,
- csak a KPSS szerint,
- mindkettő szerint, vagy
- egyik szerint sem.

Az eredményeket a nem-default-rátaszerű idősorokra a 3. ábra mutatja. Ezek összevágának a szakirodalommal: az ADF-teszt rövid, 10–20 megfigyelésből álló idősoroknál nagyon megbízhatatlanul ismeri fel a stacionárius idősorokat, gyakran ad hamis negatív eredményt. Bár a KPSS-teszt ekkora mintán is stacionáriusnak ismeri fel a stacionáriusan generált idősort, viszont a nem stacionáriusan generált véletlen bolyongást is könnyen stacionáriusnak nyilvánítja (vagyis valójában – az ADF-hez hasonlóan kis mintán a saját nullhipotézisét könnyebben fogadja el), így ez sem segít. Ráadásul, ha a stacionárius folyamat erősen autokorrelált (ami a default-ráta-idősorokra jellemző), akkor mind az ADF-, mind a KPSS-teszt pontossága romlik, kifejezetten erősen ($\rho = 0,9$) autokorrelált folyamatoknál pedig ez még a minta elemszám bővülésével sem javul.

3. ábra

A nem default-rátaszerű folyamatok ADF- és KPSS-tesztjeinek eredményei különböző hosszúságú idősorok esetében



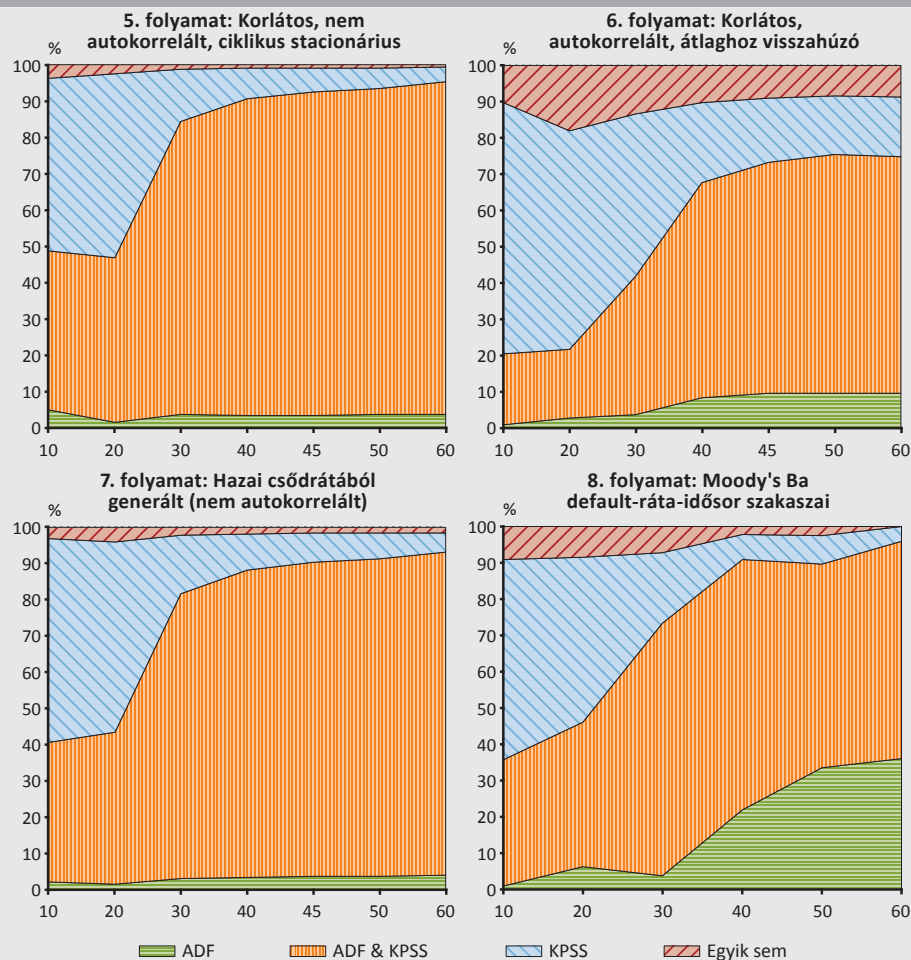
Megjegyzés: Az ábra azt mutatja, hogy a vízszintes tengely szerinti hosszúságú idősorokra a generált 100 000 idősor hány százaléka „megy át” a stacionaritásteszteken. A jelmagyarázat kódolása a következő: „ADF” = csak az ADF-teszt szerint stacionárius, „ADF&KPSS” = mindkét teszt szerint stacionárius, „KPSS” = csak a KPSS-teszt szerint stacionárius, „Egyik sem” = egyik teszt szerint sem stacionárius.

A 4. ábrán azt láthatjuk, hogy a default-rátaszerűen generált – tudottan stacionárius – folyamatok esetében is nagyjából hasonló eredményeket kapunk, mint a nem default-rátaszerű esetekben. A nem autokorrelált default-rátaszerű folyamatok (az 5. és a 7. folyamat) eredményei nagyon hasonlítanak a normális eloszlással generált nem autokorrelált folyamatéra: 10–20 megfigyelésnél az ADF-teszt az esetek nagyobb részében téves negatív eredményt ad, ezt követően javul a pontossága; az autokorrelált default-rátaszerű folyamatok esetében (6. és 8. folyamat) pedig az ADF-teszt teljesítménye még rosszabb: ezekben az esetekben a teszt még magasabb

elemszám esetén sem azonosítja helyesen az idősor stacionaritását. Bár a KPSS-teszt az esetek túlnyomó részében felismeri stacionáriusnak ezeket a default-rátaszerű folyamatokat, ennek értékét csökkenti, hogy ennél a tesztnél a másodfajú hiba (nemstacionárius idősor stacionáriusként való felismerése) nagyobb. Ráadásul az erősebben autokorrelált folyamatok esetében, mint a 6. és 8. folyamat, a KPSS is viszonylag nagy arányban jelzi tévesen nemstacionáriusnak a generált idősorokat.

4. ábra

A default-rátaszerű folyamatok ADF- és KPSS-tesztjeinek eredményei különböző hosszúságú idősorok esetében



Megjegyzés: Az ábra azt mutatja, hogy a vízszintes tengely szerinti hosszúságú idősorokra a generált 100 000 idősor (kivéve a 8. folyamatot, ahol csak annyi „szimulációt” tudunk futtatni, ahány szakasz az adott elemszámban a Moody's idősorából rendelkezésre állt) hány százaléka „megy át” a stacionaritás-teszteken. A jelmagyarázat kódolása a következő: „ADF” = csak az ADF-teszt szerint stacionárius, „ADF&KPSS” = mindkét teszt szerint stacionárius, „KPSS” = csak a KPSS-teszt szerint stacionárius, „Egyik sem” = egyik teszt szerint sem stacionárius.

Összességében tehát az ADF-teszt a default-rátaszerű idősorok esetében sem alkalmas kismintás, 10–20 megfigyelésből álló sorozatok stacionaritásának azonosítására, és hasonló mondható el a KPSS-tesztről: bár ez jó eséllyel stacionáriusnak fog felismerni egy valóban erős autokorrelációval nem rendelkező stacionárius folyamatot, de egyrészt a nem stacionárius folyamatokat is annak azonosítja, másrészt erősen autokorrelált folyamatok esetében – mint amilyenek a default-ráta-idősorok a gyakorlatban – még a stacionárius idősort is hajlamos tévesen azonosítani.

Mindezek miatt tehát, ha egy legfeljebb 10–20 megfigyelésből álló default-ráta-idősorunk megbukik a stacionaritásteszteken, még egyáltalán nem biztos, hogy az azt generáló folyamat valóban nem stacionárius.

5.3. Az idősor mintaelemszámának növelése magasabb frekvenciájú megfigyelésekkel

Az előzőekben láttuk tehát, hogy a stacionaritástesztek megbízhatósága – főleg az ADF-teszté, a KPSS-é kevésbé – javul a megfigyelések számának növelésével. Ezzel összhangban a banki (PD-)modellezésben gyakran használt technika, hogy a megfigyelések számát úgy növelik meg, hogy az éves megfigyelési frekvencia helyett negyedéves frekvenciára állnak át: tehát például a default-rátát nem 2007-re, 2008-ra, stb. nézik, hanem 2007Q1-re, 2007Q2-re stb. (ahol természetesen a 2007Q1-es adat is 12 havi visszatekintő default-rátát, tehát a megelőző 12 hónap alatt bedőltek arányát mutatja). Ezzel a módszerrel növelhető az idősorok „hossza”, hiszen ekkor például a 2007–2019 közötti időszakból nem 13 megfigyelési pontunk lesz, hanem 52.

Bár a szakirodalom szerint (például *Pierse – Snell 1995*) az adatfrekvencia növelése eleve sem csodaszer (és sokkal kevésbé hatékony, mint a mintavételi időszak hosszának növelése)¹⁹, a default-rátáknál felmerül ezzel a módszerrel egy további komoly probléma is. Mivel a default-rátát (a nemteljesítés bekövetkezését) 12 hónapos időtávon kell mérni, és különféle gyakorlati problémák miatt ennél rövidebb időtávon nem is igazán lehetséges²⁰, ezért a „negyedévesített” default-ráta-idősorok szomszédos elemei 75 százalékban egymással átfedő időszakból származnak majd, így a közöttük lévő autokorreláció is emelkedik. Ahogy az 5.2. *alfejezetben* bemutattott szimulációban is láttuk, minél erősebb autokorrelációt mutat egy stacionárius folyamat, annál nagyobb valószínűséggel lesznek megbízhatatlanok a stacionaritási tesztek is (különösen a KPSS).

¹⁹ Mivel az időszak hosszának növelésekor az átlaghoz való visszahúzás a stacioner folyamatoknál jobban érvényesül. Ugyanez a cikk azt is bizonyítja, hogy a megfelelően hosszú időszakból történő mintavételkor az alkalmazott megfigyelési frekvencia nem befolyásolja jelentősen az egységgyök-tesztek eredményeit.

²⁰ Számos ilyen probléma vethető fel: a nemteljesítések éven belüli szezonálitása, vagy például hogy a nemteljesítés egyik fajtája, a 90 napos késedelembe esés az újonnan folyósított hitelek esetében, ha az ügyfél fizetési fordulónapja úgy esik, negyedéven belül akár elő sem fordulhat.

Az empirikus eredmények azt mutatják, hogy az éves frekvenciájú default-ráta-idősorokon már önmagában is magas az autokorreláció mértéke, de az adatok negyedéves frekvenciára váltása után ez még magasabb lehet: a 6. fejezetben bemutatásra kerülő csődráta-idősorban az autokorreláció éves frekvencián 0,76, míg negyedéves frekvencián már 0,98! Banki tapasztalataink is azt mutatják, hogy az éves frekvenciájú default-ráta-idősorok autokorreláltsága 0,6–0,8 között, míg negyedéves frekvencián már 0,9–0,99 között szóródik. Ez utóbbi tartományban pedig még az 50–60 elemű mintanagyság esetén is romlik a tesztek megbízhatósága, az ADF-é kisebb, a KPSS-teszté drasztikusabb mértékben, ahogy arra fentebb már utaltunk.

Összességében tehát a default-ráta-idősorok negyedévesítése 15–20 évnyi hosszú idősor esetben nem feltétlenül oldja meg a stacionaritásteszték kis elemszámú mintákon mutatott megbízhatatlanságának problémáját: amit az elemszámok növekedésével nyerünk, azt könnyen el is veszíthetjük a folyamatba így belevitt addicionális autokorreláción.

6. Az alternatív módszerekkel készült előrejelzések problémái

A kismintás default-ráta-idősorok esetleges tévesen történő nemstacionáriusság minősítése leginkább akkor okozhat problémát, ha emiatt olyan modellezési megközelítést választunk alternatívaként, ami összességében rosszabb előrejelzéseket ad. A banki modellezők annak érdekében, hogy továbbra is OLS-becsléseket használhassanak, gyakran választják a nemstacionáriusnak minősített célváltozók differenciálását, és a modell differenciákra való felírását. Ez a gyakorlat igen elterjedt, könnyű rá példákat is említeni (*Balatoni – Pitz 2012; Gál 2019*), és sok esetben valóban indokolt és helyes is.

Ugyanakkor egyes esetekben a túlzott differenciálás félrevezető és a nemstacionáriusnak minősített célváltozó szintjére felírt modellhez képest kifejezetten értelmetlen modelleredményekhez is vezethet. Ezt és a mögöttes mechanizmust *Cochrane (2018)* is bemutatta: a fő probléma, hogy a differenciákra felírt modell jellemzően sokkal gyengébb kapcsolatot fog mutatni a cél- és a magyarázóváltozók között, mivel ilyen esetekben a modell implicit módon nemcsak a változók közötti együttmozgást (és ideális esetben ok-okozati kapcsolatot) próbálja megragadni, hanem a célváltozónak a magyarázóváltozó változására adott időbeli lefutását (impulzusválaszát) is.

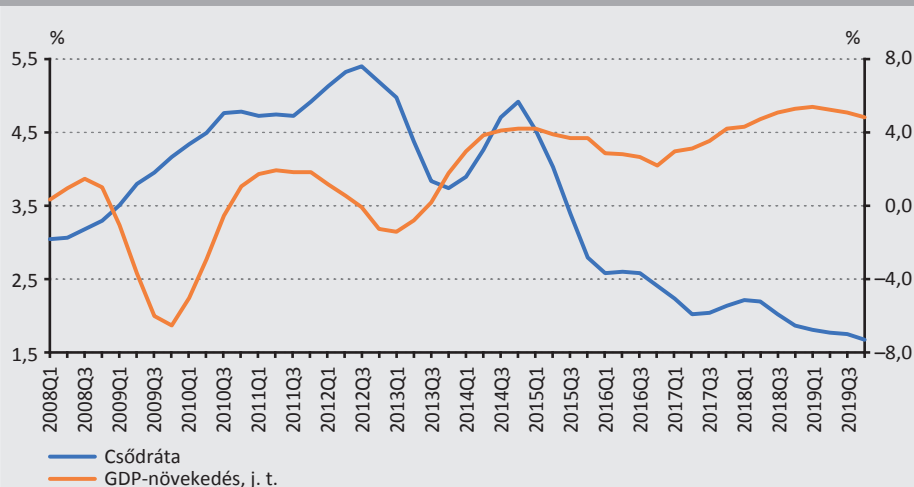
Mindez a default-ráta előrejelzésére szolgáló PD-modellekre úgy fordítható le, hogy default-ráták differenciáira felírt modellekben jellemzően sokkal gyengébb lesz a kapcsolat ezek, illetve a magyarázó makrováltozók között, ami akár azt is eredményezheti, hogy az előrelizett PD-k szinte teljesen érzéketlenek lesznek a gazdasági mutatók változásaira. Mindez különösen akkor lehet problémás, ha a konzervatív előrejelzést megkívánó – felügyeleti, auditori elvárásokat teljesíteni igyekvő – célokra, például stressztesztelésre készül. Ebben a fejezetben mi is bemutatunk erre egy szemléletes példát.

6.1. Egy példa az alternatív módszerek által okozott kihívásokra

Példánkban a magyarországi vállalatok nyilvánosan is elérhető 12-havi csődrátáját – amely hasonlatos a banki portfóliók default-ráta-idősoraihoz, viszont velük szemben nyilvánosan is elérhető – próbáljuk magyarázni a 12-havi GDP-növekedésével, negyedéves frekvencián. Annak érdekében, hogy a PD-modellezés magyarországi banki feltételeit szimuláljuk, feltételezzük, hogy a csődráták csak 2008Q1 és 2019Q4 között állnak rendelkezésre (mivel a magyarországi bankok hitelportfólióira is ez a jellemző rendelkezésre állási időszak).²¹ Összességében tehát a példában egy alig teljes gazdasági ciklusból lesz adatunk. A két felhasznált idősrőről az 5. ábra ad áttekintést.

5. ábra

A vállalati csődráta és a GDP növekedése Magyarországon 2008–2019 között



Forrás: MNB, Makroprudenciális indikátorok

Azt, hogy a csődráta szintje nem lesz stacionárius, már a tesztek elvégzése előtt sejt-hetjük abból, hogy az egy inkább lefelé mutató trendet követ a kiválasztott időszak-ban. Az ábra alapján az is valószínűsíthető, hogy a regresszió fog találni kapcsolatot a csődráta és a GDP-növekedés között, hiszen előbbi a 2008–2013 közötti válság és kilábalás alatt magas, utóbbi pedig ugyanezen időszakban alacsony volt, 2016 után pedig fordítva. Ugyanakkor ezt a kapcsolatot alapvetően a 2008 utáni válságepi-zód tapasztalata fogja dominálni, ami az előrejelzési célokra való használhatóságát

²¹ A valóságban a csődráták 1996Q1 és 2022Q4 között elérhetők. A 2020 és 2022 közötti, Covid- és poszt-Covid-időszakot azért hagytuk ki, mert ez igen rendkívüli időszak volt, amikor a GDP hirtelen nagyot zuhant, majd pattant vissza, miközben a csőd- és default-ráták – a meghozott rendkívüli kormányzati és szabályozói intézkedéseknek köszönhetően – alig változtak. Ennek az időszaknak a kezelése egyelőre még igen problematikus a banki PD-modellezésben is.

korlátozhatja, hiszen a következő válság nem biztos, hogy olyan lesz, mint a 2008 utáni volt (ahogy a Covid-válság valóban nem is olyan volt).

Ha elvégezzük az ADF-teszteket a csődráta idősorán, akkor annak szintje nem bizonyul stacionáriusnak (t-statisztika: $-1,04$, az egységgyök jelenléte csak 73 százalékos valószínűséggel utasítható el), a csődráta első differenciája azonban stacionárius (t-statisztika: $-2,03$, az egységgyök jelenléte 96 százalékos valószínűséggel elutasítható).²² (Megjegyzendő, hogy a GDP-növekedést az ADF-teszt egyértelműen stacionáriusnak mutatja már a 2008–2019-es időszakon, illetve annál hosszabb távon is).

A csődráta szintjére és első differenciájára felírt lineáris²³ regressziós modell legfontosabb paramétereit az 1. táblázat mutatja: bár mindkét típusú célváltozót (10 százalékos szinten) szignifikánsan magyarázza a GDP változása, a szintekre felírt modellben a kapcsolat erősségét kifejező béta együttható $0,2$, míg a differenciák esetében egy nagyságrenddel kisebb, csupán $0,02$. Összességében persze egyik modell sem túl jó (alacsony R^2 , bár szignifikáns F-statisztika, illetve alacsony Durbin–Watson statisztikák jellemzik őket, különösen a szintre felírt modellt), ugyanakkor a példa bemutatásának nem is célja a konkrét esetre használható legjobb modell megtalálása, hanem csupán annak szemléltetése, milyen következményekkel jár a stacionaritás-problémák differenciálással való kezelése. Ráadásul a banki gyakorlatban előfordulnak olyan helyzetek, amikor hasonló mennyiségű adatból és feltételek mellett kell előrejelzéseket készíteni.

1. táblázat

OLS-regressziós eredmények a csődráta szintjére és a differenciájára felírt modellek esetében

Modell-szám	Célváltozó	Magyarázó változó	Konstans	Béta (GDP-növekedés)	R^2
1.	Csődráta	konstans, éves GDP-növekedés	$0,04^{***}$	$-0,21^{***}$	$0,27$
2.	d_Csődráta	konstans, éves GDP-növekedés	nem szignifikáns	$-0,02^*$	$0,06$

Megjegyzés: Magyarázó változóként próbálkoztunk a GDP differenciáltjának használatával is, de az nem bizonyult szignifikánsnak. A regressziós paramétereknél *** az 1 százalékos szinten szignifikáns, az * a 10 százalékos szinten szignifikáns megbízhatóságot jelenti.

Bár a két modell közül módszertanilag a differenciára felírt változat tűnik helyesebbnek, hiszen abban egy stacionárius(nak tűnő) változót használunk célváltozóként, ugyanakkor ez a modell valójában alig mutat kapcsolatot a GDP változása és az ágazati csődráták között: e modell szerint egy -1 százalékos éves GDP-növekedéssel

²² Mindkét teszt esetében a lag-ek maximális száma 7 volt.

²³ Megjegyzendő, hogy módszertanilag helyesebb lenne a csődráta valamiféle logisztikus transzformáltját használni, hogy a célváltozó az előrejelzésben ne vehessen fel 0-nál kisebb vagy 1-nél nagyobb értékeket, de itt ezzel az együtthatók könnyebb értelmezhetősége érdekében nem foglalkozunk.

járó recesszió esetén a csődráta mindössze 0,02 százalékponttal emelkedne (egy negyedév alatt, 0,08 százalékponttal egy év alatt).

Ezt az érzéketlenséget remekül szemlélteti, ha megvizsgáljuk, hogy a két „versengő” modell hogyan teljesített volna a 2019 után bekövetkezett valós makrokörnyezetben, vagyis a Covid-válság alatt. Ehhez „tökéletes előrelátást” feltételezzük, vagyis azt, hogy a valós, bekövetkezett GDP-adatokat egy évvel korábban már ismertük volna előrejelzés formájában. Az eredményeket a 2. táblázat foglalja össze. Mint látható, egyik modell sem teljesített volna különösebben jól: a szintre felírt modell jelentősen kilengette és alaposan felül is becsülte volna a csődrátát a Covid-válság első két évében (a visszapattanás évében is!), miközben az a valóságban alig emelkedett. Ugyanakkor a 2022-es csődrátát viszonylag jól eltalálta volna. A differenciára felírt modellben viszont a csődráta alig mozdult volna el a mindenkor aktuális tényadatokhoz képest, és bár ez az előrejelzés összességében 2020–2021-ben így egész közel is járt volna a valósághoz – ez valójában csak annak köszönhető, hogy a csődráta a valóságban ugyanolyan érzéketlen volt ebben az időszakban a külső környezetre, mint maga a differenciára felírt modell.

2. táblázat

A két modell csődráta-előrejelzésének összevetése

Negyedév	A modell által a csődrátára egy évvel korábban adott előrejelzés (%)		A valós csődráta (%)	GDP-növekedés (%)
	Szintre felírt	Differenciára felírt		
2019Q4	–	–	1,7	4,9
2020Q4	4,9	1,7	1,4	–4,5
2021Q4	2,4	1,3	1,7	7,2
2022Q4	3,0	1,1	2,9	4,6

Megjegyzés: A differenciákra felírt modell esetében az előrejelzést minden évre az aktuális csődráta bázisáról indítottuk, és a GDP-pálya negyedéves frekvenciájának megfelelő tényadatai – azokat „tökéletes előrelátást” feltéve előrejelzésekként kezelve – alapján készítettük.

Ugyanakkor érdemes a kérdést onnan is megvizsgálni, hogy konzervatívabb megközelítésű külső szereplők elvárásait melyik modell előrejelzései elégítették volna ki jobban: például a 2020-as év –4,5 százalékos recesszióját „tökéletes előrelátással” anticipálva a differenciákra felírt modell a csődrátát a 2019-es tényadathoz képest nem feltételezte volna emelkedni, míg a szintekre felírt modell egy igen konzervatív, a Lehman-összeomlás utáni időkre emlékeztető értéket vetített volna előre. Vélelmezhető, hogy azok az érintettek, akik célfüggvényében a „rosszabb időkre” való felkészülés (pl. felügyelet, könyvvizsgálók, prudens működést biztosító banki funkciók) nagyobb súllyal esik latba, nehezen fogadták volna el a differenciára felírt modell előrejelzéseit, ami a csődráták változatlanágát jelezte előre – és a szintekre felírt modell eredményeit preferálták volna (még ha – amint az utólag bebizonyosodott – tévesen is). Nehéz elképzelni, hogy például egy EBA-stressztesztben

– amelyben a GDP-növekedésre vonatkozó 3 éves stressz-szenáriók első éve a példában szereplő GDP-pályákhoz viszonylag hasonlatos szokott lenni – a differenciára felírt modell előrejelzéseit a kompetens hatóság egy bank részéről elfogadta volna.

Összességében tehát a konkrét esetben hiba lett volna a szintekre felírt modellel csupán azért elvetni, mert annak célváltozója megbukik a stacionaritásteszteken, hiszen:

- a rövid idősor miatt eleve nagy a valószínűsége, hogy a teszt a csődrátát generáló folyamatot illetően téves ítéletet hozott, és a folyamat valójában stacionárius (bár a strukturális törés jelenlétét itt most részletesen nem vizsgáltuk),
- közgazdasági megfontolások alapján kell ok-okozati kapcsolatnak lenni a csődrátá szintje és a gazdasági növekedés között,
- a modell alternatívája egy, a külső gazdasági környezetre teljesen érzéketlen megoldás lett volna.

Fontos hangsúlyozni azonban azt is, hogy attól, hogy a szintekre felírt modellel a stacionaritás-problémák ellenére lehetett volna előrejelzésre használni, az eredmények interpretációjában ezen modelltechnikai problémákat transzparensen ki is kellett volna domborítani: vagyis a példában szereplő esetben azt, hogy a modell túlnyomórészt a 2008-as válságtapasztalatokat tükrözi vissza, ami az adott környezetben nem biztos, hogy releváns (és mint a ténylegesen bekövetkezett értékekből láttuk: valóban nem is volt az).

7. Következtetések és gyakorlati tanácsok

Tanulmányunkban azt vizsgáltuk meg, hogy a hitelportfóliók default-ráta-idősorai – pontosabban az azokat generáló folyamat – elméleti, közgazdasági megfontolások alapján mennyire tekinthetők stacionáriusnak, illetve a szokásos stacionaritástesztek mennyire megbízhatók az ilyen idősorokra a gyakorlatban rendelkezésre álló rövidebb (legfeljebb 15–20 évet felölelő) mintákra.

Azt találtuk, hogy a default-ráta-idősorok abban az esetben feltételezhetők stacionáriusnak, ha nincsen bennük strukturális törés, tehát például a default-definíció, a hitellezési feltételek, a jogszabályi környezet, illetve egyéb ösztönzők olyan változása, ami a portfóliószintű nemteljesítési valószínűségeket tartósan és jelentősen eltolja.

Bár ezek a feltételek a valóságban gyakran teljesülnek többé-kevésbé, mégis a – sok esetben rövid, legfeljebb 15–20 évet felölelő – default-ráta-idősorok esetében nem ritka, hogy megbuknak a különböző stacionaritásteszteken. Elemzésünkben bemutattuk, hogy ez nem meglepő: a különböző megközelítésű tesztek egyaránt viszonylag megbízhatatlanul működnek kis mintaelemszám, valamint a vizsgált

folyamatban meglévő magas fokú autokorreláltság esetén. Mivel a default-ráta-idő-sorok, illetve az azokat generáló folyamatok leginkább éppen ilyenek, ezért kisebb, 30 alatti megfigyelésszám esetén igen valószínű, hogy a tesztek tévesen mutatják őket nemstacionáriusnak.

A nemstacionárius változók modellezése OLS-regressziókban könnyen vezethet hamis regressziókhoz, ezért abban az esetben, ha a célváltozó nem stacionárius, gyakran szoktak alternatív modellezési megközelítéseket, leginkább a nemstacionárius változó első rendű differenciájára felírt modelleket alkalmazni. A default-rátákat használó banki modellek (stresszteszt és IFRS 9 előretekinthető korrekció modellek) esetében azonban ezek az alternatív megközelítések könnyen oda vezethetnek, hogy a modell statisztikailag ugyan szignifikáns, de mégis igen gyenge kapcsolatot fog kimutatni a hitelportfóliók PD-je és a makrogazdasági indikátorok között. Az ilyen modellek nehezen használhatók konzervatív megközelítéseket igénylő gyakorlatokhoz (például stresszteszteléshez), mivel nagyrészt érzéketlennek mutatják a banki portfóliókat a külső gazdasági feltételek romlására.

Ezért elemzésünk végkövetkeztetéseként a következőket tanácsoljuk a banki modellezési szakembernek:

- Mivel a különböző nullhipotézisű tesztek (ADF és KPSS) kis mintákon hajlamosak a nullhipotézisükhöz húzni, ezért rövid idősoroknál akkor fogadják el a tesztek eredményét, ha azok egyirányba mutatnak (tehát legalább az egyik a saját nullhipotézise ellen megy).
- A default-ráta-idősorok stacionaritásának megítélésében azonban ne csak a stacionaritástesztek eredményeire támaszkodjanak, ha az idősor az egyik vagy másik típusú teszten megbukik, hanem mérlegeljék, hogy az idősor mögötti folyamatok indokolhatják-e esetleg mégis az idősor stacionaritását.
- Ennek során különös figyelmet kell szentelni a strukturális törések jelenlétének az idősorban: ha ilyenek nincsenek, akkor elméleti megfontolások alapján lehet feltételezni, hogy a default-ráta-idősor stacionárius, még akkor is, ha megbukik a stacionaritásteszteken (vagy a különböző tesztek eredménye egymásnak ellentmondó, esetleg időben inkonzisztens).
- Ha a default-ráta modellezésének célja konzervatív megközelítést kíván meg (például stresszteszteknél), akkor egyáltalán nem ördögötől való a default-ráták szintjeire OLS-regressziós modelleket használni, még akkor sem, ha ezek megbuknak a stacionaritásteszteken. Különösen, ha ennek alternatívája egy olyan, a differenciákra felírt modell, amely nagymértékben érzéketlen a külső környezet változására.

- Ugyanakkor az így készült előrejelzések interpretációjakor transzparensen be kell mutatni, hogy ezek a modelltechnikai bizonytalanságok és a meghozott döntések milyen módon torzíthatják az előrejelzéseket.

Felhasznált irodalom

- Arltová, M. – Fedorová, D. (2016): *Selection of Unit Root Test on the Basis of Time Series Length and Value of AR(1) Parameter*. Statistika, 96(3): 47–64. <https://doaj.org/article/ca92920816ef46e0b9e874642271805e>
- Balatoni András – Pitz Mónika (2012): *A működőtőke hatása a bruttó nemzeti jövedelemre Magyarországon*. Közgazdasági Szemle, 59(1): 1–30. <https://www.kszemle.hu/tartalom/cikk.php?id=1284>
- Békés Gábor – Kézdi Gábor (2021): *Data Analysis for Business, Economics and Policy*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108591102>
- Cheung, Y.-W. – Lai, K.S. (1995): *Lag Order and Critical Values of the Augmented Dickey-Fuller Test*. Journal of Business & Economic Statistics, 13(3): 277–280. <https://doi.org/10.2307/1392187>
- Christiano, L.J. – Eichenbaum, M. (1990): *Unit roots in real GNP: Do we know, and do we care?* Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 32, 7–61. [https://doi.org/10.1016/0167-2231\(90\)90021-C](https://doi.org/10.1016/0167-2231(90)90021-C)
- Cochrane, J.H. (1991): *A critique of the application of unit root tests*. Journal of Economic Dynamics and Control, 15(2): 275–284. [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(91\)90013-Q](https://doi.org/10.1016/0165-1889(91)90013-Q)
- Cochrane, J.H. (2018): *A Brief Parable of Over-Differencing*. February 11. <https://www.johnhcochrane.com/research-all/a-brief-parable-of-overdifferencingnbs>. Letöltés ideje: 2023. május 29.
- Dickey, D.A. – Fuller, W.A. (1979): *Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root*. Journal of the American Statistical Association, 74(366a): 427–431. <https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10482531>
- ESRB (2023): *Macro-financial scenario for the 2023 EU-wide banking sector stress test*. European Systemic Risk Board, 2023. január 31. https://www.esrb.europa.eu/mppa/stress/shared/pdf/esrb.stress_test230131~c4980ac646.en.pdf. Letöltés ideje: 2023. május 29.
- Gál Zoltán (2019): *Az FDI szerepe a gazdasági növekedés és a beruházások területi differenciálódásában Magyarországon*. Közgazdasági Szemle, 67(6): 653–686. <https://doi.org/10.18414/KSZ.2019.6.653>

- Granger, C.W.J. – Newbold, P. (1974): *Spurious regressions in Econometrics*. Journal of Econometrics, 2(2): 111–120. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(74\)90034-7](https://doi.org/10.1016/0304-4076(74)90034-7)
- Háda Attila (2019): *Bankfelügyelők az IFRS9-átállás nyomában*. Hitelintézeti Szemle, 18(4): 77–111. <https://doi.org/10.25201/HSZ.18.4.77111>
- Jönsson, K. (2006): *Testing Stationarity in Small and Medium-Sized Samples when Disturbances are Serially Correlated*. Working Paper No. 20, Department of Economics, Lund University. <https://lup.lub.lu.se/search/files/5598406/2061568>. Letöltés ideje: 2023. augusztus 24.
- Kwiatkowski, D. – Phillips, P.C.B. – Schmidt, P. – Shin, Y. (1992): *Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?* Journal of Econometrics, 54(1–3): 159–178. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(92\)90104-Y](https://doi.org/10.1016/0304-4076(92)90104-Y)
- Lucas, R.E. (1976): *Econometric policy evaluation: A critique*. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 1, pp. 19–46. [https://doi.org/10.1016/S0167-2231\(76\)80003-6](https://doi.org/10.1016/S0167-2231(76)80003-6)
- Moody's (2007): *Corporate Default and Recovery Rates, 1920–2006*. Special comment, Moody's Investors Service – Global Credit Research, February. <https://www.moody.com/sites/products/DefaultResearch/2006400000429618.pdf>. Letöltés dátuma: 2023. szeptember 11.
- Nagy Gábor – Bíró Gergely (2018): *Az IRB PD paraméterbecslés PIT- és TTC-problematikája a felügyeleti felülvizsgálatok tükrében*. Gazdaság és Pénzügy, 5(3): 258–285.
- Otero, J. – Smith, J. (2003): *The KPSS Test with Outliers*. Computational Economics, 29, 59–67. <https://doi.org/10.1007/s10614-005-9008-0>
- Ozturk, I. – Kalyoncu, H. (2007): *Is Per Capita Real GDP Stationary in the OECD Countries? Evidence from a Panel Unit Root Test*. Ekonomski Pregled, 58(11): 680–688. <https://mpira.uni-muenchen.de/9635/>
- Pierse, R.G. – Snell, A.J. (1995): *Temporal aggregation and the power of tests for a unit root*. Journal of Econometrics, 65(2): 333–345. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(93\)01589-E](https://doi.org/10.1016/0304-4076(93)01589-E)
- Rapach, D.E. (2002): *Are Real GDP Levels Nonstationary? Evidence from Panel Data Tests*. Southern Economic Journal, 68(3): 473–495. <https://doi.org/10.1002/j.2325-8012.2002.tb00433.x>
- Simons, D. – Rolwes, F. (2009): *Macroeconomic Default Modeling and Stress Testing*. International Journal of Central Banking, 5(3): 177–204.

Melléklet: A Monte Carlo-szimulációban használt folyamatok formális definíciója

A szimulációban használt folyamatok:

1. *Stacionárius, nem autokorrelált ($\rho = 0$) folyamat*

$$y_t \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$$

2. *Véletlen bolyongás, nemstacionárius egységgyök ($\rho = 1$) folyamat*

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_0 \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$$

3–4. *Stacionárius, de erősen autokorrelált ($\rho = 0,7$ és $\rho = 0,9$) folyamat*

$$y_{t+1} = \rho y_t + \varepsilon_t$$

$$y_0 \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$$

$$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}\left((1 - \rho)\mu; \sqrt{1 - \rho^2}\sigma\right)$$

ahol $\mathcal{N}()$ minden esetben a normális eloszlást jelöli.

5. *Korlátos, nem-autokorrelált, rezsimváltós stacionárius folyamat*

$$y_t = \begin{cases} \mathcal{N}(\mu * 0,8; \sigma), & Rnd_t > p \\ \mathcal{N}(\mu * 2,4; \sigma), & Rnd_t \leq p' \end{cases}$$

ahol a generált érték korlátos a 0,003–1 intervallumon,

$$y_0 \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma),$$

ahol $\mathcal{N}()$ minden esetben a normális eloszlást jelöli, Rnd_t egy, a t. időpontra véletlenszerűen generált számot 0 és 1 között, p a válságév bekövetkezésének valószínűsége (értéke fixen $p = 12,5\%$). Ebben a folyamatban tehát kétféle állapot van: válságév, amikor a folyamat egy „válság várható érték” körül ingadozik és a nem válság év, amikor a folyamat a „nem válság várható érték” körül ingadozik. A válság és nem válság várható értékekre alkalmazott multiplikátorokat, illetve a válság valószínűségét úgy választottuk meg, hogy a folyamat várható értéke μ , szórása pedig σ .

A μ értékét 5 százalékra állítottuk (ami egy fogyasztási hitel default-rátára nem irreális), így a 0,003–1-es korlát az esetek többségében nem effektív, az eloszlást csak elhanyagolható mértékben torzítja. Az alsó korlát értékét azért nem nullára, hanem 0,3 százalékra állítottuk, mert a Bázeli tőkeszabályozás IRB-megközelítésében is van egy nullától eltérő minimum PD.

6. Korlátos, autokorrelált, hibakorrekciós stacionárius

$$Valsag_d_t = \begin{cases} 0, & Rnd_t > p \\ 1, & Rnd_t \leq p \end{cases}$$

$$y_t = \begin{cases} 3 * y_{t-1} + \mathcal{N}(0; \sigma) + (y_{t-1} - \mu * 0,8)/3, & Valsag_d_t - Valsag_d_{t-1} = 1 \\ y_{t-1} + \mathcal{N}(0; \sigma) + (y_{t-1} - \mu * 0,8)/3, & Valsag_d_t - Valsag_d_{t-1} \neq 1 \end{cases}$$

ahol $Valsag_d$ a válság dummyt jelöli és a generált érték korlátos a 0,003–1 intervallumon.

$$y_0 \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma),$$

ahol $\mathcal{N}()$ minden esetben a normális eloszlást jelöli, Rnd_t egy, a t . időpontra véletlenszerűen generált számot 0 és 1 között, p a válságév bekövetkezésének valószínűsége (értéke fixen $p = 12,5\%$). Ebben a folyamatban a válságállapot hatása némileg különbözik az előző folyamatétól: ha az adott időszakban úgy következik be válság, hogy az előző időpontban nem volt, akkor a generált sorozatelemben egy háromszoros megugrás következik be (ez megfelel a válság és nem-válság várható érték hányadosának). Ha viszont nincsen változás a válságstátuszban, akkor a folyamat kiindulásként az előző megfigyelési értékét kapja. Ezt két tag egészíti ki: a normál hibatag, illetve egy „hibakorrekciós tag”, ami annál erősebben „húzza vissza” a sorozat aktuális értékét a nem válság várható értékhez, minél nagyobb volt annak korábbi eltérése ettől az átlagtól. Ez a „hibakorrekciós tag” akadályozza meg, hogy a folyamat véletlen bolyongás legyen. A μ értékét itt is 5 százalékra állítottuk, így a 0,003–1-es korlát az esetek többségében nem effektív, az eloszlást csak elhanyagolható mértékben torzítja. Az alsó korlát értékét azért nem nullára, hanem 0,3 százalékra állítottuk, mert a Bázeli tőkeszabályozás IRB-megközelítésében is van egy nullától eltérő minimum PD.

Ennél a folyamatnál talán felmerülhet, hogy elsőre nem intuitívan stacionárius – viszonylag rövid, pl. 1 000 elemű Monte Carlo-szimulációkkal azonban bizonyítható, hogy a várható értéke és szórása hosszú távon állandó.

7. Magyarországi historikus céges csődrátából véletlen húzással (bootstrapping) generált, nem autokorrelált folyamat

A 3. táblázatba foglalt magyarországi éves vállalati csődráták 1996–2022 között megfigyelt összesen 27 értéke közül véletlenszerűen, visszatevéses módszerrel húzzuk az egyes megfigyeléseket.²⁴

3. táblázat					
Magyarországi éves vállalati csődráták 1996 és 2022 között					
Év	Csődráta (%)	Év	Csődráta (%)	Év	Csődráta (%)
1996	2,9	2005	2,8	2014	4,9
1997	2,5	2006	3,1	2015	2,8
1998	2,3	2007	3,0	2016	2,4
1999	2,2	2008	3,3	2017	2,1
2000	2,5	2009	4,2	2018	1,9
2001	2,7	2010	4,8	2019	1,7
2002	2,6	2011	4,9	2020	1,4
2003	3,0	2012	5,2	2021	1,7
2004	2,8	2013	3,8	2022	2,9

Forrás: MNB (2023) Jelentés a pénzügyi stabilitásról, 2023. május, Makroprudenciális indikátorok, M11. ábra (<https://www.mnb.hu/letoltes/melleklet-abrai-2023-majus.xlsx>)

8. A Moody's Ba ratingosztályának historikus default-rátáinak fix hosszúságú szakaszaiból álló sorozatok (autokorrelált)

Vesszük a 2. ábrán is bemutatott Moody's Ba ratingosztályának historikus default-ráta-idősorát, majd kiválasztjuk belőle az összes adott hosszúságú (10, 20, 30, 40, 50, 60 megfigyelés hosszú) szakaszt az összes lehetséges kombinációban. Mivel a leghosszabb, 60 elemszámú szakaszból a 87 megfigyelésből álló idősorban csak 27 van, ezért a többi hosszúságú szakasznál is – a statisztikai konzisztencia biztosítása érdekében – véletlenszerűen csak ennyi darab szakaszt választottunk ki.

²⁴ Megjegyzés: ennek a folyamatnak egy olyan verzióját is legeneráltuk, ahol a Moody's Ba ratingosztályának a tanulmányban bemutatott default-ráta-idősorából húztunk véletlenszerűen. Ennek eredményei a hazai csődrátára alkalmazott bootstrappinghoz igen hasonlóak voltak.