

MEGJEGYZÉS A ROBERTS-FÉLE TÉTEL EGYIK ALKALMAZÁSÁHOZ [8]*

DR. TERPLÁN ZÉNÓ
tszv. egyetemi tanár
a műszaki tudományok kandidátusa

Közismert, hogy a síkban mozgó négytagú, csuklós mechanizmus hajtórúdjának pontjai a legváltozatosabb görbéket (ún. pontgörbéket) írják le mozgás közben (l. pl. 1. ábrát és [2]-t). E görbék alkalmasak arra, hogy pl. az emberi kéz változatos munkáját utánozzák, lemásolják (pl. kenyérgyúrómozgás; vagy a szénaforgató mozgása stb.), továbbá egyenesvezető, esetleg üzemszünetes mechanizmust vezéreljenek.

Grashof tételével könnyen megállapítható, milyen jellegű a síkban mozgó négytagú, csuklós mechanizmus üzeme (van-e pl. forgattyú, s milyen a hajtott tag: forgattyús, egy vagy kétoldali lengőtagos) [3]. *Roberts* már 1875-ben kimutatta [5], hogy adott négytagú mechanizmushoz mindig szerkeszthető még két olyan helyettesítő mechanizmus, amelynek határozott pontja az eredeti pontgörbét írja le. Nagy a valószínűsége annak, hogy az összesen három mechanizmus közül található olyan, amely mind működés, mind helykihasználás szempontjából megfelelő.

A *Roberts*-féle tétel alkalmazása szerkesztéssel valósítható meg legegyszerűbben. A 2. ábra *a*) részén vastag vonallal kihúzva látható az eredeti mechanizmus, amelynek hajtórúdbeli D pontja γ_D pontgörbét írja le. Ha az \overline{OC} -re $ABD \triangle$ -höz hasonló $OCM \triangle$ -et rajzolunk, akkor a háromszög M csúcspontja a másik két mechanizmus egyik helytálló pontja. Jó segítséget nyújt a szerkesztéshez a 2. ábra *b*) részén látható segédábra, amely $ABD \triangle$ -re épül fel [1]. Az \overline{AB} meghosszabbítására rajzolt a és c hosszúság O_o és C_o jelképes alappontokat adja. Ezek birtokában $O_o C_o M_o \triangle \sim ABD \triangle$ segítségével M_o , továbbá a vonalak meghosszabbításával az $ABD \triangle$ -höz ugyancsak hasonló $DEH \triangle$ és $FDG \triangle$ szerkeszthető meg. A segédábra kapott hosszúságai adják a helyettesítő mechanizmusok oldalhosszúságait.

Jól megfigyelhető, hogy a és b_1 párhuzamos és azonos nagyságú. Hasonló rokonságot találunk b_2 és c ; c és v ; c_1 és u_2 ; c_2 és v_1 ; végül a_1 és u között.

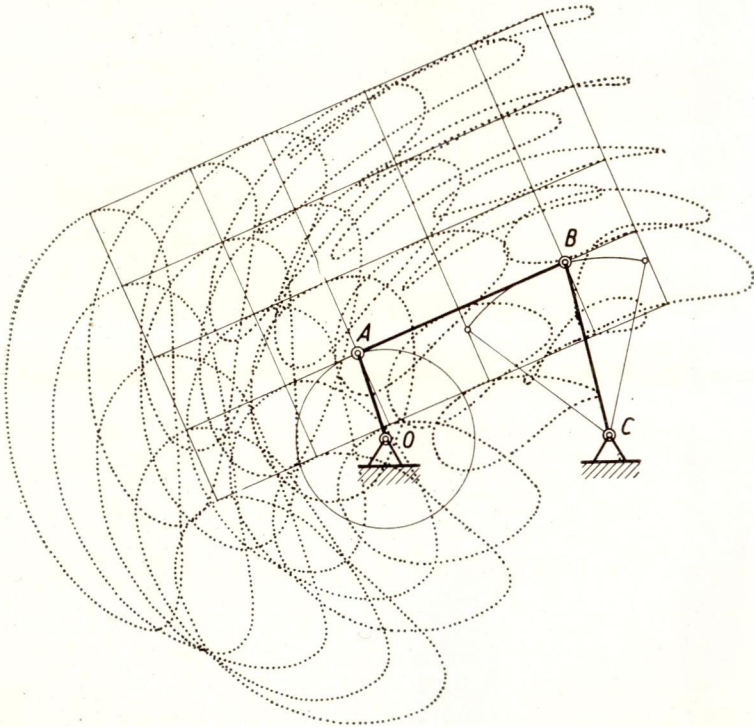
A 3. ábrán látható mechanizmusok közül — *Grashof*-törvénye szerint — az alapmechanizmus és a 2-jelű forgattyúkarral rendelkező: *egyoldalú lengőtagos*, míg az 1-es jelű: *egyoldalú kettős lengőtagos* mechanizmus.

A *Roberts*-féle tétel több bizonyítása közül *Meyer zur Capellen* levezetése [4] a legegyszerűbb. A 2. ábrát alapul véve és a mechanizmust a komplex számsíkon elképzelve [6], kereshetjük az új M pont helyzetét O -ból vagy C -ből kiindulva a mechanizmusok bármely helyzetében.

* 1960. ápr. 6-án elhangzott előadás.

a) O -ból kiindulva:

$$\begin{aligned}
 \vec{OM} &= \vec{OE} + \vec{EH} + \vec{HM} = \\
 &= a_1 e^{j(\varphi_b - \alpha)} + u_1 e^{j(\varphi_a - \alpha)} + c_1 e^{j(\varphi_c - \alpha)} = \\
 &= e^{-j\alpha} (u_1 e^{j\varphi_a} + a_1 e^{j\varphi_b} + c_1 e^{j\varphi_c}) = \\
 &= e^{-j\alpha} \left(a \frac{u}{b} e^{j\varphi_a} + u e^{j\varphi_b} + c \frac{u}{b} e^{j\varphi_c} \right) = \\
 &= \frac{u}{b} e^{-j\alpha} (a e^{j\varphi_a} + b e^{j\varphi_b} + c e^{j\varphi_c}) = \frac{u}{b} (-d) e^{-j\alpha};
 \end{aligned}$$



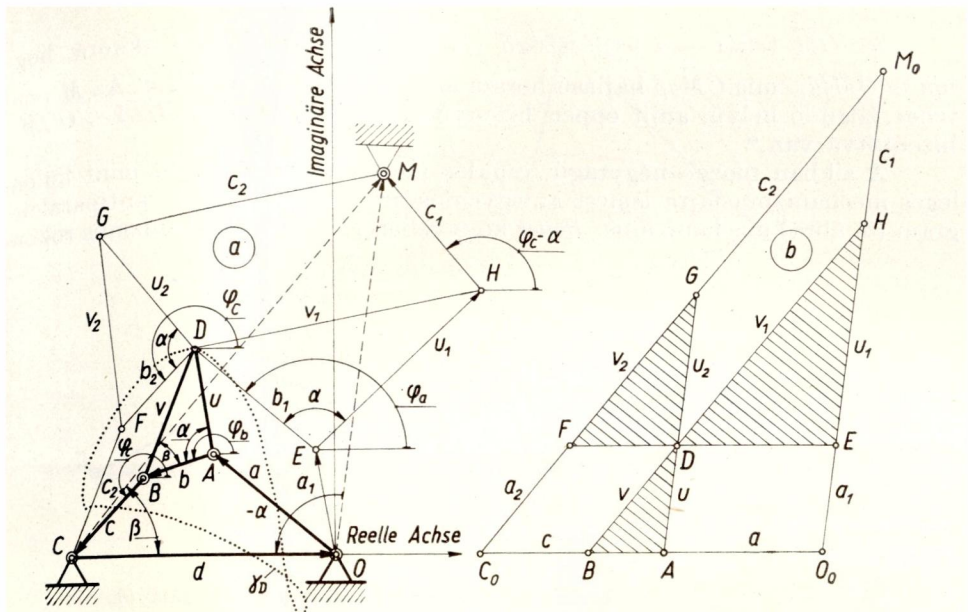
1. ábra. Síkban mozgó négytagú csuklós mechanizmus hajtórúdjára szerelt pontsor által leírt pontgörbék

mert $a_1 = u$; $b_1 = a$; $b_2 = c$; $c_1 = u_2$ és $u_1/b_2 = u/b$, azaz $u_1 = b_1 u/b = au/b$; továbbá $u_2/b_2 = u/b$, azaz $c_1 = u_2 = b_2 u/b = cu/b$. Ugyanakkor $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -\vec{d}$ alapján $ae^{j\varphi_a} + be^{j\varphi_b} + ce^{j\varphi_c} = -de^{j0} = -d$.

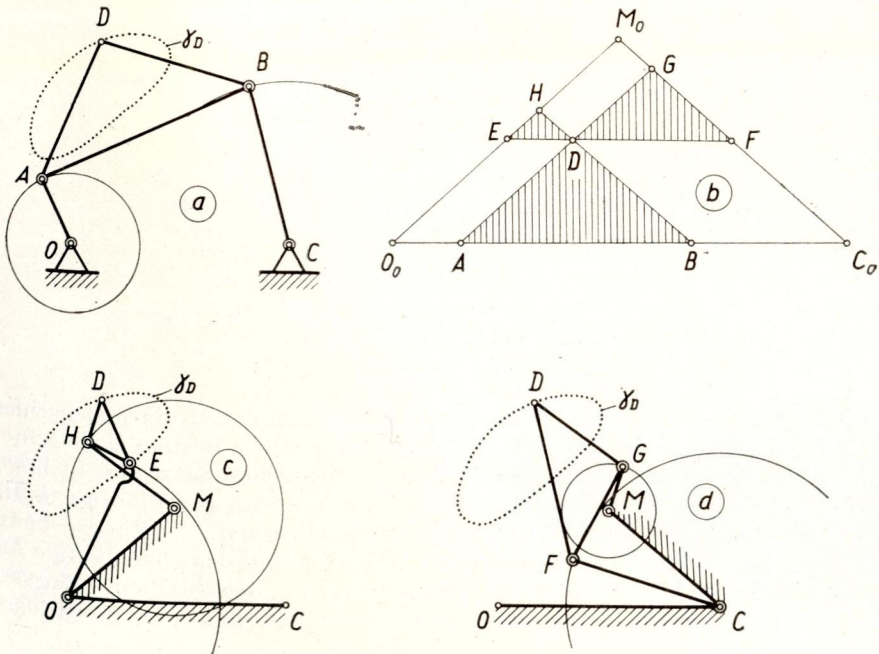
b) C -ből kiindulva az előbbiekhöz hasonló megfontolással:

$$\vec{CM} = \frac{v}{b} (-d) e^{j\beta}$$

eredményre jutunk.



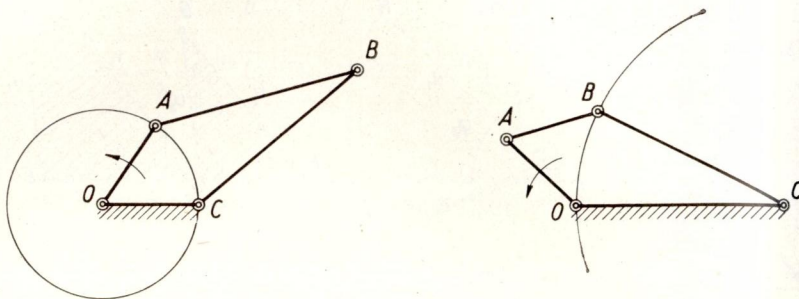
2. ábra. Síkban mozgó négytagú csuklós mechanizmus (vastag vonal) két Roberts-féle helyettesítő mechanizmussal (vékony vonalak) és a Roberts-féle segédszerkesztés



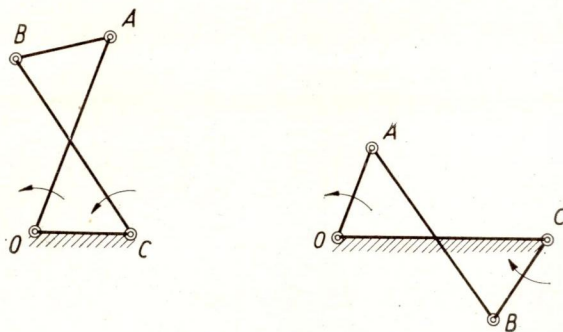
3. ábra. a) Síkban mozgó négytagú csuklós mechanizmus γ_D pontgörbével ; b) a további taghosszúságokat szolgáló Roberts-féle segédszerkesztés ; c) OM -re felépített mechanizmus γ_D -vel ; d) CM -re szerkesztett mechanizmus γ_D -vel

Az \overrightarrow{OM} tehát $-a$ hajlásszögű vektor, amelynek hossza akkora, hogy $u/b = \overline{OM}/d$, míg \overrightarrow{CM} β hajlású hossza akkora, hogy $v/b = \overline{CM}/d$. Az M pont tehát állandó helyű, amit éppen bizonyítani kellett. Ezzel $ABD\Delta \sim OCM$ bizonyítva van.*

A síkban mozgó négytagú, csuklós mechanizmusok közül mint különleges mechanizmusfajta ismert az egyenlőszárú (4. ábra) és az antiparallelogram (5. ábra) mechanizmus. *Beyer* könyvében [1] e két mechanizmus rokon



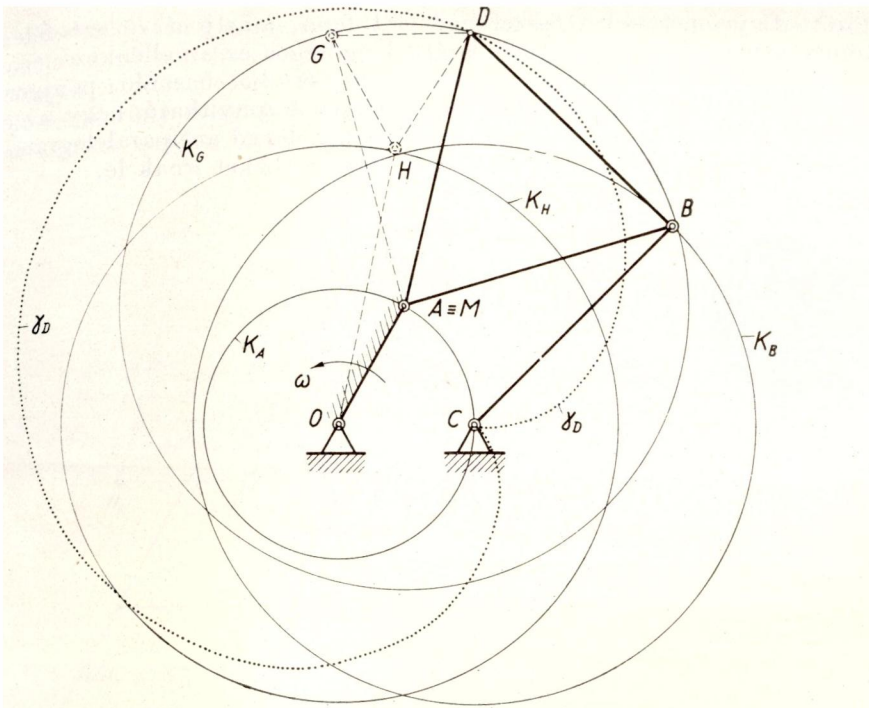
4. ábra. a) Kétforgattyús egyenlőszárú mechanizmus; b) Forgattyúkaros lengőtágos egyenlőszárú mechanizmus



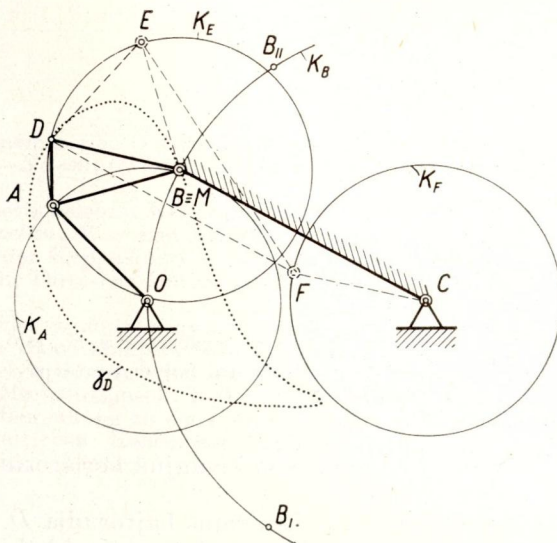
5. ábra. a) azonos és b) ellenkező értelemben forgó antiparallelogram-mechanizmus

ságáról a következőket írja: „Zwischen den Koppelkurven der gleichschenkligen Kurbelgetriebe und der Antiparallelkurbelgetriebe besteht ein beachtenswerter Zusammenhang, der mit Hilfe des Robertsschen Satzes leicht beweisbar ist. Die gleichschenklige Kurbelschwinge und das gegenläufige Antiparallelkurbelgetriebe erzeugen gleichartige Koppelkurven . . . Ebenso beweist man leicht, dass die gleichschenklige Doppelkurbel und das gleichläufige Antiparallelkurbelgetriebe gleichartige Koppelkurven . . . beschreiben.” Magyarul: A két mechanizmusfajta, mégpedig az egyenlőszárú és az antiparallelogram

* E bizonyítást az NME VI. („Mechanizmusok” tárgyköréből tartott) Tudományos Ülésszakán Dr. W. Rössner más módon megismételte és a levezetést Schmid nevéhez fűzte, szóban megemlítve, hogy a Schmid-féle levezetés megelőzte a Meyer zur Capellen által közzétett (I. e kötet Rössner-féle cikkét).

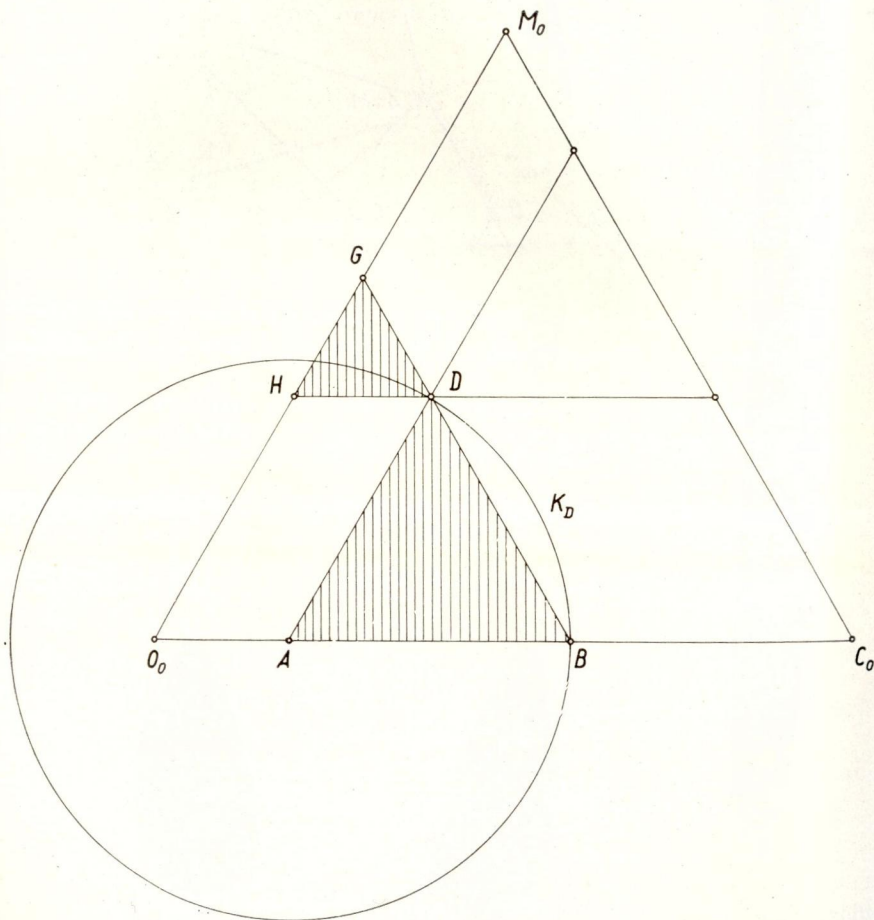


6. ábra. Kétforgattyús egyenlőszárú mechanizmus (vastag folytonos vonal) γ_D pontgörbéje. A szaggatott vonalú azonos értelemben forgó antiparalelogram-mechanizmus D pontja ugyancsak γ_D -t írja le



7. ábra. Forgattyúkaros lengőtágos egyenlőszárú mechanizmus (vastag folytonos vonal) γ_D pontgörbéje. A szaggatott vonalú ellenkező értelemben forgó antiparalelogrammechanizmus D pontja ugyancsak γ_D -t írja le

között figyelemreméltó összefüggés áll fenn, amely a *Roberts*-féle tétellel könnyen igazolható. Az egyenlőszárú lengőtagos és az ellenkező értelemben forgó antiparalelogram mechanizmus hajtórúdja hasonló pontgörbék leírására képesek . . . Hasonlóképpen könnyen bizonyítható, hogy az egyenlőszárú kétforgattyús és az azonos értelemben forgó antiparalelogram mechanizmus hajtórúdjai ugyancsak hasonló pontgörbékét írnak le.

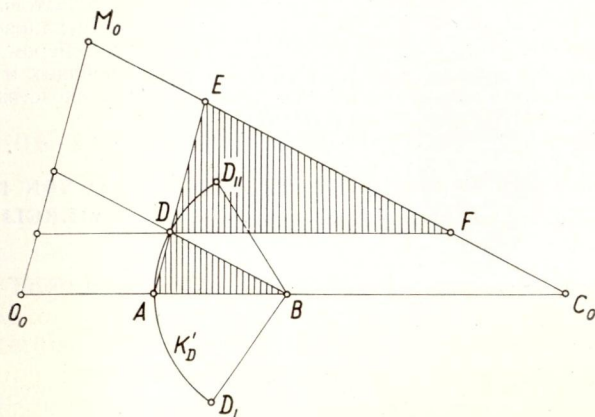


8. ábra. A 6. ábrához tartozó *Roberts*-féle segédszerkesztés, a K_D jelű körrel, amely rögzített \overline{AB} -hez D pont mértani helyét mutatja

Ha a *hasonló* kitévelt az *azonosságra* kívánjuk korlátozni, akkor a következő eredményre jutunk.

A lengőtagos egyenlőszárú mechanizmus hajtórúdja D pontjának (1. 7. ábrát) pontgörbéje azonos az ugyanolyan taghosszúságokkal kialakított ellenkező értelmű szögsebességgel mozgó antiparalelogram mechanizmus hajtórúdja D pontjának pontgörbéjével; s ugyancsak azonos pontgörbét ír le a kétforgattyús egyenlőszárú mechanizmus hajtórúdjának D pontja (1. 6. ábrát).

mint az azonos értelmű szögsebességgel hajtott antiparalelogram hajtórúdjának pontja; de éppen Roberts-tételét alkalmazva, csak akkor, ha $ABD\Delta \sim OAC\Delta$, vagyis a Roberts-féle tételnél alkalmazott harmadik forgáspont (M) egybeesik A -val vagy B -vel [7], attól függően, hogy melyik oldalon kapjuk az antiparalelogram mechanizmust.



9. ábra. A 7. ábrához tartozó Roberts-féle segédszerkesztés, a K_D' jelű körívvel, amely rögzített \overline{AB} -hez D pont mértani helyét mutatja

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az adott hosszúságú hajtórúddal mint körsugárral azonnal kijelölhető a D pont mértani helyeit kijelölő kör (l. 8. ábrát) vagyis körív (l. 9. ábrát).

IRODALOM

- [1] Beyer, R. : Kinematische Getriebesynthese. Berlin, 1953. Springer.
- [2] Hrones, J. A.—Nelson, G. L. : Analysis of the Four-bar Linkage. New York, 1951. Wiley.
- [3] Kraus, R. : Getriebelehre. Karlsruhe, 1950. Braun.
- [4] Meyer zur Capellen, W. : Bemerkungen zum Satz von Roberts über die dreifache Erzeugung der Koppelkurve. Konstruktion 8. (1956) H. 7.
- [5] Roberts, S. : On Three-bar Motion in Plan Space. Proc. Lond. Math. Soc. Bd. VII. (1875).
- [6] Terplán, Z. : Síkban mozgó négytagú csuklós mechanizmus előállítására előírt mozgásvizonyokra Bloch komplex-változós módszerével. Nehézipari Műszaki Egyetem magyar nyelvű Közleményei. II. k. Miskolc, 1958.
- [7] Terplán, Z. : Mechanizmusok. Budapest, 1959. Tankönyvkiadó.
- [8] Terplán, Z. : Bemerkung zu einer Anwendung des Roberts'schen Satzes bei ebenen Viergelenkgetrieben. Nehézipari Műszaki Egyetem idegennyelvű Közleményei. XXI. k. Miskolc, 1960.

**ЗАМЕЧАНИЕ К ПРИМЕНЕНИЮ ПОСТУЛАТА РОБЕРТСА, ДЕЙСТВУЮЩЕГО НА
ЧЕТЫРЕХЧЛЕННЫЙ МЕХАНИЗМ, ДВИГАЮЩИЙСЯ В ПЛОСКОСТИ**

др. З. ТЕРПЛАН

Резюме

Автор коротко ознакомит постулатом Робертса — в доказательстве Мейера цур Цапеллена — действующим на четырехчленные, шарнирные механизмы, двигающиеся в плоскости, потом обратит внимание на сходство, отмеченное Бейером, которое действительно между точками кривых двух особых, а именно равнобоких и антипараллелограммовых механизмов. В конце статьи определяются рамки сходства.

**BEMERKUNGEN ZUR ANWENDUNG DES SATZES VON ROBERTS
ÜBER DIE SICH IN DER EBENE BEWEGENDEN VIERGLIEDRIGEN
MECHANISMEN**

Dr. Z. TERPLÁN

Zusammenfassung

Der Verfasser beschreibt kurz den für die in der Ebene bewegten viergliedrigen gelenkigen Mechanismen gültigen *Roberts'schen* Satz mit der Beweisführung von *Meyer zur Capellen* und macht dann auf die von *Beyer* erwähnte Verwandtschaft aufmerksam, die zwischen den Punktcurven von zwei speziellen Mechanismen, den gleichschenkeligen und den Antiparallelogramm-Mechanismen besteht. Zum Schluss des Artikels werden die Grenzen der Verwandtschaft bestimmt.

**REMARKS ON THE APPLICATION OF THE ROBERTS THEOREM RELATIVE
TO FOUR-BAR MECHANISMS MOVING IN A PLANE**

Dr. Z. TERPLÁN

Summary

Brief description of the theorem of *Roberts* applicable to four-bar jointed mechanisms moving in a plane with the demonstration according to *Meyer zur Capellen* and draws the attention to the relationship mentioned by *Beyer* that exists between the point curves of two special (isosceles and antiparallelogram) mechanisms. The paper finally defines the *limits of relationship*.

**OBSERVATION SUR LE THEOREME DE ROBERTS VALABLE POUR LES
MECANISMES A QUATRE MEMBRES MOBILES EN PLANE**

Dr. Z. TERPLÁN

Résumé

Le theoreme de *Roberts* valable pour les mecanismes articulés à quatre membres mobiles en plane est décrit brièvement avec la démonstration de *Meyer zur Capellen*; l'attention est dirigée vers l'affinité mentionnée par *Beyer* qui existe entre les courbes de point de deux mecanismes spéciales — le mecanisme isoscèle et le mecanisme antiparallelogramme. Le fin de l'ouvrage donne les *limites de cette affinité*.