

SKÁLÁZÁS ÉS MULTIPLIKATÍV RENORMÁLÁS ALKALMAZÁSA A SZILÁRDTESTFIZIKÁBAN*

SÓLYOM JENŐ

MTA Központi Fizikai Kutató Intézet, Budapest

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS	126
2. PRIMITÍV SKÁLÁZÁS, SKÁLATÖRVÉNYEK A KONDO-PROBLÉMÁBAN	132
2.1. A primitív skálázás alap gondolata	132
2.2. A Kondo-probléma Anderson-féle skálatörvényei	133
2.3. Korrekciók az Anderson-féle skálatörvényekhez	135
2.4. A skálázás gráftechnikai megfogalmazása	140
3. A RENORMÁLÁSI TRANSZFORMÁCIÓ WILSON-FÉLE MEGFOGALMAZÁSA	143
3.1. Általános renormálási transzformáció	143
3.2. A kritikus jelenségek Wilson-féle elmélete	144
3.3. A Kondo-probléma megoldása	147
4. MULTIPLIKATÍV RENORMÁLÁS	148
4.1. Renormálhatóság és a multiplikatív renormálási csoport	148
4.2. A kritikus jelenségek leírása a renormálási csoport Lie-egyenletei segítségével	151
4.3. A kritikus jelenségek leírása a Callan—Symanzik-egyenlettel	156
5. AZ ÚJ RENORMÁLÁSI ELJÁRÁS	159
5.1. Az új eljárás leírása	159
5.2. Egyszerű példa: a röntgen-abszorpciók él szingularitásának meghatározása	162
6. A KRITIKUS JELENSÉGEK LEÍRÁSA	167
6.1. A levágás-skálázás és tömegrenormálás	167
6.2. A kritikus exponensek meghatározása	169
6.3. Az anomális dimenziók meghatározása	172
6.4. Korrekciók a skálaviselkedéshez	175
6.5. A fajhó vizsgálata	176
6.6. Korrekciók az átlagtér-elméletre négydimenziós rendszerekben	180
6.7. Anizotrop modellek vizsgálata	181
6.8. Elsőrendű mágneses átalakulások értelmezése	185
6.9. Az átalakulás rendjének változása nyomás alatt	190
6.10. További fejlemények	194
7. AZ ÚJ ELJÁRÁS KAPCSOLATA A TÖBBI RENORMÁLÁSI MÓDSZERREL	195
8. AZ EGYDIMENZIÓS ELEKTRONGÁZ VIZSGÁLATA	196
8.1. A modell és fizikai jelentősége	196
8.2. A renormálási csoport alkalmazása az invariáns csatolások meghatározására	201
8.3. A válaszfüggvények vizsgálata, a rendszer alapállapotának meghatározása	205
8.4. A többváltozós vertexek meghatározása	209
8.5. Az általános, öt csatolású eset vizsgálata	213
8.6. Egydimenziós elektrongáz-modell kétfajta levágási energiával	220
8.7. További fejlemények	222
9. GYENGÉN CSATOLT LÁNCOK RENDSZERÉNEK VIZSGÁLATA	224
9.1. A modell és renormálhatóságának vizsgálata	224
9.2. A lehetséges fázisátalakulások vizsgálata	230
9.3. Kapcsolat másfajta közelítések eredményeivel	233

* Érkezett 1977. ápr. 18. Doktori értekezés.

10. ÖSSZEFOGLALÁS	233
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	235
FÜGGELÉK	236
IRODALOM	242

1. Bevezetés

A fizika legkülönbözőbb területein gyakran találkozunk olyan fizikai rendszerekkel illetve folyamatokkal, melyek valamilyen értelemben hasonlóak, s azonos törvényekkel írhatók le, a rendszereket illetve folyamatokat jellemző paraméterek értékének különbözősége ellenére. Ilyen értelemben szokás például a hidrodinamikában az áramlások hasonlóságáról beszélni, ha a Reynolds-szám megegyezik. A statisztikus fizikából, a fázisátalakulások elméletéből véve egy egyszerű példát, a van der Waals-féle

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT \quad (1.1)$$

állapotegyenletet a kritikus pontra jellemző p_k kritikus nyomás, V_k kritikus térfogat és T_k kritikus hőmérséklet segítségével dimenziótlanított alakban írva fel, a reális gázok közös állapotegyenlete

$$\left(p' + \frac{3}{V'^2}\right)\left(V' - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} T', \quad (1.2)$$

ahol

$$p' = \frac{p}{p_k}, \quad V' = \frac{V}{V_k} \quad \text{és} \quad T' = \frac{T}{T_k}. \quad (1.3)$$

Ebben az alakban egy hasonlósági törvény áll előttünk, az azonos dimenziótlan p' , V' és T' értékkel rendelkező rendszerek ugyanolyan állapotegyenletnek tesznek eleget, viselkedésük hasonló, noha kritikus paramétereik különbözőek.

A hasonlósági törvény, illetve hasonlósági transzformáció helyett a skálatörvény és skálatranszformáció kifejezést szokás használni a szilárdtestfizikai és statisztikus mechanikai alkalmazásokban, ezért az értekezésben is ezt a kifejezést használom. A skálázásnak az lehet a haszna, hogy a vizsgálandó rendszert egy skálatranszformáció segítségével egy olyan rendszerre képezzük le, melynek viselkedését könnyebb meghatározni, mint az eredeti rendszerét. Ekkor, a hasonlóság felhasználásával az eredeti rendszer viselkedése is meghatározható. Ez a skálázási eljárás az utóbbi időben igen hasznosnak bizonyult a statisztikus fizika több problémájának a vizsgálatában, elsősorban a fázisátalakulások leírásában. *Kadanoff* (1966) javasolta először, hogy a mágneses rendszerek kritikus jelenségeit a mágneses cella méretének átskálázásával, nagyobb blokkok bevezetésével próbálják megérteni. Ezt az ötletet öntötte később *Wilson* (1971) olyan matematikai formába, hogy az konkrét számolások elvégzését is lehetővé tette. Azóta a szilárdtestfizika sok egyéb területén is alkalmazásra került a módszer. Az értekezésben ezekkel a problémákkal, illetve a skálázás egy új megfogalmazásával és annak alkalmazásaival foglalkozom.

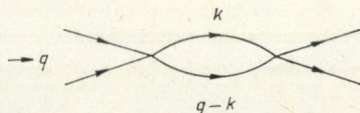
A szilárdtestfizikai és statisztikus fizikai alkalmazásoknál a skálázással majdnem azonos jelentésben használatos a renormálás kifejezés is. A renormálás és renormálási csoport a terek kvantumelméletében régóta ismert és alkalmazott eljárás. A tér-elméletben is az az eljárás lényege, hogy az eredetileg megfogalmazott problémát

bizonyos szabályok szerint egy másik problémára képezzük le, s az így kapott problémát oldjuk meg. A skálázás szokásos alkalmazásaival szemben itt a renormálás célja nem egyszerűen az, hogy könnyebben megoldható elméletet kapjunk, hanem az, hogy matematikailag kezelhető elméletet kapjunk. A térelméletben ugyanis gyakran az eredeti rendszer paramétereivel számolva divergens járulékok jelennek meg, s a renormálás célja ezeknek a divergenciáknak az eltávolítása. A kvantumelektrodinamika az egyik legismertebb térelmélet, ahol a perturbációs számítás magasabb rendjeiben a sajátenergiás és vertex korrekciókban divergens járulékok jelennek meg, melyek a direkt perturbációs számítást lehetetlenné teszik. Hamarosan világossá vált azonban az is, hogy ezek a divergenciák jól izolálhatók, s beolvaszthatók mint az elektron töltésének és tömegének megváltozása. Az így kapott „renormált” töltéssel és tömeggel számolva, már minden mennyiség végesnek adódik. Az ilyen elméleteket a térelméletben renormálható elméletnek nevezik. Dyson (1949) munkája után, melyben a renormálás programját megadta, Stueckelberg és Peterman (1953), majd Gell-Mann és Low (1954) mutatott rá arra, hogy a végtelenek eltávolításán túl még további véges renormálásokat is el lehet végezni a normálási pont megválasztásában levő önkényesség következtében. Ezek a renormálások, mint transzformációk, csoportot alkotnak, az ún. renormálási csoportot. Mivel a hullámfüggvényben és a töltésben szorzófaktoroként jelentkeznek a hatásuk, multiplikatív renormálási csoportról szokás beszélni.

Blank, Boncs-Brujevics és Sirkov (1957) azt is felismerték, hogy a multiplikatív renormálási csoport létezése a Green-függvényekre felírható Dyson-egyenlet általános tulajdonsága, s ezért a renormálási csoport transzformáció a problémák egy igen széles osztályára alkalmazható, ott is, ahol nincs szükség végtelenek eltávolítására. A multiplikatív renormálási csoport, éppen, mert igen általános transzformációs tulajdonságnak felel meg, első látásra tartalmatlanak tűnik, mely új információt nem hordoz. Bizonyos feltételek mellett azonban a renormálási csoportot fel lehet használni arra, hogy magasabb rendű gráfok járulékát meghatározzuk azok konkrét kiszámítása nélkül, csak néhány alacsony rendű gráf és a renormálási transzformáció ismeretében. A térelméletben Gell-Manntól és Lowtól származik a renormálási csoport felhasználása a perturbációs számítás megjavítására. Ezeknek az eredményeknek és a renormálási csoport térelméleti alkalmazásának igen jó leírása található Bogoljubov és Sirkov (1959) könyvében. A szilárdtestfizikában az első ilyen jellegű alkalmazás Boncs-Brujevics munkája. Ő a töltésárnyékolás esetét vizsgálta ezzel a módszerrel (Boncs-Brujevics és Tyablikov 1961). Az értekezésben a renormálási csoport egy újfajta megfogalmazása segítségével szilárdtestfizikai problémákat fogok vizsgálni, s a renormálási csoport transzformáció mindig eszköz lesz arra, hogy a perturbációs számítás alacsony rendű közelítésén jóval túlmenjünk.

A térelméletben a divergenciák megjelenésének és a renormálás szükségességének az egyik oka az, hogy minimális hossz hiányában az impulzusintegrálok a végtelenig veendők, s a nagy impulzusok tartományából adódóan divergálnak el az integrálok. Ez az úgynevezett ultraibolya divergencia.

Tipikus példaként nézhetjük a



másodrendű vertexkorrekciót. Feltéve, hogy a szabad propagátor $(m^2 + k^2)^{-1}$ alakú, ennek a vertexnek a járuléka egy d dimenziós tér esetén

$$\int_0^\infty \frac{d^d k}{(m^2 + k^2)(m^2 + (q - k)^2)}. \quad (1.4)$$

Ez az integrál konvergens, ha a tér egy-, két- vagy háromdimenziós, $d=4$ esetén logaritmikus divergenciát kapunk, míg $d>4$ esetén ennél erősebb divergenciát. A szokásos térelméleti problémákban $d=4$, s ez a logaritmikus divergencia az, mely a renormálással eltávolítandó.

A szilárdtestfizikában egészen más a helyzet. Kristályos anyagoknál a kristályszerkezetből adódóan a lehetséges impulzusok a Brillouin-zónán belül helyezkednek el, s az impulzusintegrálást csak a Brillouin-zóna határáig kell elvégezni. Nem kristályos anyagoknál az impulzus nem jó kvantumszám, de bizonyos közelítésekben használható. A lehetséges impulzusállapotoknak itt is van természetes felső határa, mely az atomok közötti minimális távolság reciprokának felel meg. A térelmélet ultraibolya divergenciái így a szilárdtestfizikában nem fordulnak elő. Ezzel szemben igen gyakran találkozunk infravörös divergenciákkal, melyek a kis impulzusú tartományból származnak. Az (1.4) formulára visszagondolva, most egy véges Λ impulzusig kell csak integrálnunk, de az az eset érdekelhet, amikor a tömegnek megfelelő m és a külső impulzus, q nullához tart. Ilyenkor az alsó határnál jelennek meg a divergenciák, mégpedig $d=4$ esetén logaritmikusan, az egy-, két- és háromdimenziós esetben hatványjellegű divergenciával, míg $d>4$ esetén az integrál konvergens. A térelmélettel szemben pontosan ellentétes viselkedést kapunk.

A négydimenziós eset kitüntetettsége a szabad propagátor alakjából, illetve a diszperziós görbe kvadratikus jellegéből következik. Könnyen belátható, hogy lineáris diszperzió esetén a $d=2$ eset lesz logaritmikusan divergens, és ez választja el a divergens és nem divergens eseteket. Klasszikus rendszereknél tehát két dimenzióban is várhatunk a fenti négydimenziós esethez hasonló logaritmikus viselkedést. Kvantummechanikai rendszereknél, ahol a Green-függvényes technikából ismert módon nemcsak impulzus-, hanem frekvencia-integrálokat is el kell végeznünk, ez a kritikus dimenziószám a térbeli dimenziószámánál eggyel nagyobb, a frekvencia-integrálnak megfelelően. Kvantummechanikai rendszereknél tehát egy, illetve három térbeli dimenzió esetén várjuk logaritmikus divergenciák felléptét. A logaritmikus problémák a további tárgyalásban megkülönböztetett szerepet fognak játszani.

A szilárdtestfizikában az infravörös divergenciát tartalmazó problémák közös jellemzője, hogy közvetlenül az alapállapot energiája felett, energiagap nélkül, a gerjesztett állapotok kontinuuma helyezkedik el véges állapotsűrűséggel. Ezek az alacsony energiájú gerjesztett állapotok igen könnyen és nagy számban gerjesztődhetnek s ez vezethet divergenciához a termodinamikai mennyiségekben vagy a válaszfüggvényekben. A teljesség igénye nélkül felsorolunk néhány problémát, melyek ilyen infravörös divergenciát tartalmaznak. A legismertebb ilyen szilárdtestfizikai probléma a másodrendű fázisátalakulások körül megfigyelhető kritikus jelenségek problémája. A fázisátalakulási pont közelében a hosszú hullámhosszú fluktuációk igen lényegessé válnak. Éppen a hosszú hullámhossz, vagyis a lassú térbeli változás miatt ezek keltezéséhez igen kis energia kell. Az ezen fluktuációkból eredő infravörös divergencia az, amely a kritikus pontbeli szingularitásokat okozza, s egyben nehezzé is teszi a fizikai leírást. A kritikus jelenségeknél a kvantumeffektusok nem játszanak szerepet, így

ott a négydimenziós probléma lenne logaritmikus. A háromdimenziós, reális eset ennél erősebb szingularitásokkal rendelkezik. A négydimenziós eset ezen kitüntetésére a kritikus jelenségek részletes tárgyalásánál még visszatérünk.

Láttuk, hogy a térben egydimenziós kvantumproblémáknál is várhatjuk infravörös divergenciák felléptét. Erre példaként az egydimenziós fermion-gáz szolgálhat. A Fermi-felület közelében a diszperziós görbe egyenessel közelíthető, s a kölcsönható rendszerben az infravörös divergenciák valóban fel is lépnek. A modell érdekessége, hogy nem egyszerűen matematikai fikcióról van szó, hanem bizonyos, nagy molekulákból felépített, szerves rendszerek elég jól modellezhetők az egydimenziós fermion-gázzal.

Még két problémát említek, melyek ugyan nem térben egydimenziós feladatok, de formailag arra átírhatók. Az egyik a röntgen abszorpciós él problémája, a másik a Kondo-probléma. Az első esetben egy atomi mély nívóról gerjesztünk fel egy elektront a vezetési sávba. A küszöbenergia feletti energiával rendelkező γ kvantumok elnyelésekor a vezetési sáv kontinuumállapotainak átrendeződése vezet infravörös divergenciára. A Kondo-problémában egy spinnel rendelkező szennyező atomot vizsgálunk, mely kicserélődési kölcsönhatásban van a vezetési elektronok spinjével. A Fermi-felület közelében levő elektronoknak a spinen történő szóródása adja az infravörös divergenciát.

Mindezekben a problémákban a perturbációs számítás egyre magasabb rendjeit véve, a logaritmikus korrekciók is egyre magasabb hatványon jelennek meg, s a logaritmus argumentumában szereplő energia- vagy impulzusváltozó kis értékeinél a magasabb rendű korrekciók nem hanyagolhatók el. g -vel jelölve a csatolási állandót, q -val a külső impulzust és Λ -val a levágási impulzust, a vertexben n -ed rendben általában $g^n \ln^{n-1}(q/\Lambda)$ alakú a vezető járulékok. Ahhoz, hogy a kis q -nál is értelmes eredményt kapjunk, fel kell összegeznünk ezeket a magasabb logaritmikus hatványokat a végtelen rendig. Sok esetben még ez sem elegendő, hanem a vezető járulékok után következő $g^n \ln^{n-2}(q/\Lambda)$ alakú tagokat, sőt az ezután következő sorokat is fel kell összegeznünk. Egy ilyen felösszegzés azután arra a meglepő eredményre vezethet, hogy a sok logaritmus hatvány összegéből hatványfüggvényt kapunk. Ennek a lehetőségét a következő sor igen jól mutatja:

$$1 + g \ln \frac{q}{\Lambda} + \frac{1}{2} g^2 \ln^2 \frac{q}{\Lambda} + \frac{1}{6} g^3 \ln^3 \frac{q}{\Lambda} + \dots = e^{g \ln \frac{q}{\Lambda}} = \left(\frac{q}{\Lambda} \right)^g. \quad (1.5)$$

Igen sokszor fogunk ilyen jellegű eredményre jutni a már ismert fizikai problémáknál.

Az előtt a feladat előtt állunk tehát, hogy a perturbációs számításban logaritmikus járulékokat adó tagok végtelen sorát összegezzük fel. Az első módszert ennek a problémának a megoldására Landau és munkatársai dolgozták ki a kvantumelektrodinamika keretein belül (*Landau, Abrikosov és Halatnyikov* 1956). A gráfok bizonyos osztályát választották ki, melyek az adott rendben a logaritmus legmagasabb hatványát tartalmazzák. Ezek a gráfok egyszerű geometriai szerkezetük miatt a parketta-gráf nevet kapták. Az ezeknek megfelelő korrekciókra viszonylag egyszerű integrál-egyenletek lehet felírni, s a megoldás a vezető logaritmikus járulékok összegét szolgáltatja. A további járulékok is meghatározhatók ugyanezzel az integrálegyenlet módszerrel, de az eljárás igen bonyolult. A módszer legjobb leírása *Roulet, Gavoret és Nozières* (1969) munkájában található.

A parkettaközelítést a szilárdtestfizikában is alkalmazták a már említett logaritmikus problémákra. A kritikus jelenségeket négy dimenzió közül *Ginzburg* (1974), a Kondo-problémát *Abrikosov* (1965), a röntgen abszorpciók él esetét *Roulet*, *Gavoret* és *Nozières* (1969), az egydimenziós fermion-gázt pedig *Bicskov*, *Gorkov* és *Dzjalosinszkij* (1969) vizsgálta ezzel a módszerrel.

Mivel a legtöbb esetben túl kell lépnünk a parketta-közelítésen, szükség volt olyan módszerre, mely a további járulékok figyelembevételét könnyebben kezelhető formában teszi lehetővé. A renormálási csoport módszer és a skálázás bizonyult ilyen eljárásnak, és az értekezésben a renormálási csoport módszer segítségével fogjuk vizsgálni a fenti szilárdtestfizikai problémákat.

A renormálási csoportról a fejezet elején már beszéltünk. Azt is kiemeltém, hogy a renormálási csoport alkalmazásával megjavíthatjuk a perturbációszámítással kapott eredményeket. Valóban, a térelméletben szokásos multiplikatív renormálási csoportot sikerrel alkalmazták ezekre a szilárdtestfizikai problémákra is. A kritikus jelenségek-nél elsősorban *Di Castro* (1972), valamint *Brézin*, *Le Guillou* és *Zinn-Justin* (1973a), a Kondo-problémánál pedig *Abrikosov* és *Migdal* (1970), valamint *Fowler* és *Zawadowski* (1971) munkáit kell megemlítenünk. Ez a térelméleti módszer azonban egyáltalán nem az egyetlen ma ismert renormálási csoport módszer. Az utóbbi öt-hat évben fejlődött ki a renormálási transzformációnak és a renormálási csoportnak egy sokkal általánosabb értelmezése. Ez elsősorban *Wilson* nevéhez fűződik, s részletes kifejtése *Wilson* és *Kogut* (1974) munkájában található. Ezen általánosított képben a renormálási csoport a transzformációk olyan sorozata, mely a termodinamikai függvények argumentumaira hatva, azok értékét változtatlanul hagyja. Ennek az általános megfogalmazásnak egyik megvalósítása a térelméletben szokásos multiplikatív renormálás, de sok egyéb megvalósítása is lehetséges.

Wilson, a multiplikatív renormálás módszerétől lényegesen különböző módon, a skálázás fizikai képéből kiindulva, és az annak megfelelő matematikai apparátussal közelített a renormáláshoz. Szerinte a renormálási transzformációra ott van szükség, ahol igen nagy szabadsági fokú rendszerekkel van dolgunk, s a transzformáció lényege az, hogy lépésről lépésre vesszük figyelembe ezen szabadsági fokok hatását. Minden egyes lépésben a szabadsági fokok egy kis részének hatását vizsgáljuk. Ezt legalábbis numerikusan meg lehet tenni, s végül, sokszori iteráció után, eljuthatunk a probléma megoldásához. Ezt a programot *Wilson* végig tudta vinni a Kondo-probléma esetén (*Wilson* 1973), egy rendkívül nehéz numerikus számolással, de oda még mindig nem jutottunk el, hogy a Kondo-problémát teljesen megoldottnak tekinthessük. A kritikus jelenségeknél, a fizikailag ténylegesen érdekes háromdimenziós esetre vannak már bizonyos eredmények, de itt még kevésbé mondhatjuk, hogy a megoldás birtokában vagyunk. A *Wilson*-elmélet a legátütőbb sikert a kritikus jelenségeknek a négy dimenzió körüli rendszerekre adott leírásával érte el. A kritikus jelenségek fizikai lényegét sikerült itt analitikusan is megfogalmazni, s értelmezni lehetett a skálatörvények, a homogenitás és univerzalitás eredetét.

A kritikus jelenségeknél a kiindulás az, hogy a hosszú hullámhosszú, vagyis kis impulzusú fluktuációk a lényegesek a kritikus pontban. Ezért a rövid hullámhosszú, vagy nagy impulzusú fluktuációkat lépésről-lépésre haladva ki lehet transzformálni. Ez a kitranszformálás azt jelenti, hogy a kezdeti problémában szereplő maximális Λ impulzus helyett ezentúl csak Λ/b -ig terjedő impulzusokat veszünk figyelembe ($b > 1$). Természetesen a rendszer egyéb paramétereit, például a csatolási állandókat, meg kell változtatnunk, hogy ugyanazokat a termodinamikai mennyisé-

geket kapjuk a transzformáció előtt és után. A követelmény az, hogy az állapotösszeg invariáns legyen ezen transzformációval szemben. Ezt az eljárást megfelelő matematikai formába öntve sikerült négy dimenzió körül a kritikus exponensekre analitikus kifejezéseket kapni, melyek már a fluktuációk hatását is tartalmazták.

A Wilson-féle módszernek ezen megfogalmazásában egyáltalán nem látszik a kapcsolat a multiplikatív renormálási csoporttal, s sokáig nem is volt világos, hogy létezik-e ilyen kapcsolat. A jelen értekezés egyik célja annak a megmutatása, hogy legalábbis bizonyos logaritmikus problémákra, ahol analitikusan végigvihető mindkét módszer, megtalálható a két módszer közötti összekötő kapocs. Pontosan az látható be, hogy a λ levágási impulzus skálázása egy multiplikatív renormálási transzformációt generál. A kritikus jelenségeknél fogom ezt konkrétan megmutatni.

Ez arra vezet, hogy egy új renormálási eljárást lehet kidolgozni, mely fizikai képében a Wilson-módszerhez hasonlít, tehát a fizikai levágás skálázását használja fel, szemben a térelméleti módszerben szokásos, szemléletes képet nélkülöző skálázással. Ugyanakkor matematikai szempontból az új módszer a multiplikatív renormálás formájában jelenik meg, s ezért az ott jól kidolgozott matematikai módszerek alkalmazhatók. Az értekezésben elsősorban ezen az új módszeren és ennek szilárdtestfizikai alkalmazásain van a hangsúly.

Az értekezés felépítése a következő. Az első részben, a második, harmadik és negyedik fejezetben irodalmi összefoglalót adok a szokásos skálázási és renormálási eljárásokról, de már itt is kitérek néhány saját eredményre. A második fejezetben először a Kondo-probléma példáján egy Andersontól származó egyszerű skálázási eljárást mutatok be, mely a Wilson-féle renormálási transzformáció egy igen egyszerű megfogalmazása. Megmutatom (Sólyom és Zawadowski 1974), hogy az Anderson-féle eredeti tárgyalás lényeges korrekciókat hagyott el, s egy konzisztensebb leírást adok. A harmadik fejezetben a Wilson-féle renormálási eljárás általános leírását adom, s a kritikus jelenségek, valamint a Kondo-probléma megoldásán keresztül mutatom meg, hogyan alkalmazható a módszer. A térelméletben szokásos multiplikatív renormálási eljárást a negyedik fejezetben ismertetem. Elsősorban a Lie-egyenletek levezetésével foglalkozom, de röviden megemlékezem a Callan—Symanzik-egyenletekről is. A konkrétság kedvéért mindenütt a kritikus jelenségeket veszem példaként.

Az ötödik fejezetben adom meg azt az új renormálási eljárást, melyet ezután a további fejezetekben különböző szilárdtestfizikai problémákra alkalmazok. Rövid példaként először a röntgenabszorpciós él problémáját vizsgálom, megmutatva, hogy az ismert eredményeket ezen a módon igen egyszerűen lehet leszármaztatni (Sólyom 1974). A kritikus jelenségeket vizsgálom a hatodik fejezetben, elsősorban az izotróp n -komponensű modellt négy dimenzió közelében (Forgács, Sólyom és Zawadowski 1976), de röviden kitérek az anizotróp rendszerek bizonyos problémáira is (Löser és Sólyom 1978, Sólyom és Grest 1977). A kritikus jelenségeknek az új módszerrel, illetve a szokásos térelméleti módszerrel történő tárgyalása után a hetedik fejezetben megmutatom, mi a kapcsolat az új módszer és a többi, irodalomból ismert eljárás között.

A nyolcadik fejezetben az egydimenziós elektrongáz esetét tárgyalom (Menyhárd és Sólyom 1973, Sólyom 1973, Sólyom 1975, Menyhárd és Sólyom 1975, Sólyom és Mihály 1975, Sólyom és Szabó 1976). A matematikai értelemben egydimenziós esetet vizsgálom itt, de már ebből is le tudunk vonni bizonyos következtetéseket a fizikailag közel egydimenziós rendszerekről. A kilencedik fejezetben azután a fizikai prob-

lémát még jobban modellizáló feladatot vizsgálom, a gyengén csatolt lineáris láncok rendszerét (Mihály és Sólyom 1976). Minden fejezet után rámutatok arra, hogy milyen további eredmények születtek a módszer felhasználásával, illetve eredményeink továbbfejlesztésével. Végül a tizedik fejezetben összefoglalom az értekezésben leírt fontosabb saját eredményeket, s rámutatok a további vizsgálatok lehetséges irányaira. Bizonyos részeredményeket az értekezés végén, a függelékben adok meg.

2. Primitív skálázás, skálatörvények a Kondo-problémában

2.1. A primitív skálázás alap gondolata

A bevezetésben említettem, hogy *Wilson* (1971) a kritikus jelenségek vizsgálatánál *Kadanoff* (1966) skálahipotézisét fogalmazta át, s adott olyan matematikai formalizmust, mely már számszerű eredményekre vezetett. *Kadanoff* eredetileg az Ising-moddellel leírható mágneses rendszerek esetére fogalmazta meg a skálahipotézist. Az alap gondolat az volt, hogy a rácsponton ülő spinek helyett néhány rácspontot tartalmazó cellák össz-spinjét lehet vizsgálni, s a kritikus pont közelében, ahol a koherenciahossz nagy, a cella-spinek segítségével ugyanolyan leírása adható a rendszernek, mint az eredeti spinekkel. A cellákból még nagyobb cellákat építve fel, ekvivalens rendszerek egy egész sorát kapjuk, s ennek a felhasználásával a kritikus jelenségek skálatörvényei levezethetők. A *Kadanoff*-féle skálázás a kritikus jelenségek vizsgálatánál már klasszikus eljárásnak tekinthető, sok helyen részletesen megtalálható, például *Stanley* (1971) könyvében.

A skálázás, ekvivalens rendszerek sorozatának a megkeresése, azonban nemcsak a kritikus jelenségek vizsgálatában merült fel a szilárdtestfizikában. Így például *Morel* és *Anderson* (1962) a szupravezetés elméletében mutatott rá arra, hogy az igazi sávszélesség helyett annál kisebbet használhatunk, ha a kölcsönhatást egy effektív kölcsönhatással helyettesítjük. Ezt a gondolatot fejlesztette tovább *Anderson* (1970), amikor a Kondo-probléma skálaegyenleteire adott igen egyszerű levezetést. A Kondo-problémával és skálaegyenleteivel a következő alfejezetekben fogunk kicsit részletesebben foglalkozni. Az *Anderson*-féle skálázás alap gondolatának megértéséhez nem kell semmit tudnunk a Kondo-problémáról, mert olyan módszerről van szó, mely egyéb szilárdtestfizikai problémákban is használható. Valamilyen kölcsönható rendszert vizsgálunk, melyet néhány csatolási állandó jellemez, a lehetséges energia-, illetve impulzusállapotok pedig kontinuumszerűen helyezkednek el egy véges szélességű sávban. Gondolhatunk például egy fém vezetési elektronjaira, melyek Coulomb-kölcsönhatással egymással vagy egy szennyező atommal hatnak kölcsön. Az elektronok szórását egy T -mátrixszal írhatjuk le. *Anderson* alapötlete az volt, hogy bizonyos rendszereknél a sáv szélén levő állapotokat elhagyva, a sávszélességet lecsökkentve, s ugyanakkor a csatolási állandókat megváltoztatva, az új csatolások alkalmas megválasztásával elérhető, hogy a szórási T -mátrix változatlan maradjon, s a rendszer ugyanolyan fizikai tulajdonságokkal rendelkezik. Az, hogy a sávszélesség, levágási energia vagy levágási impulzus megváltoztatását a csatolási állandó megváltoztatásával kompenzálhatjuk, a renormálási csoport nem térelméleti alkalmazásának legfontosabb alapötlete s a továbbiakban igen lényeges szerepe lesz. A primitív skálázás kifejezés azt jelenti, hogy nem fogunk ebben a fejezetben a renormálási csoportról beszélni, s a szórási mátrix invarianciájának felhasználásával egy igen egyszerű sávszélesség-skálázást hajtunk végre.

2.2. A Kondo-probléma Anderson-féle skálatörvényei

Anderson eljárását a Kondo-problémán mutatjuk be, hogy azután ismertethessük az Anderson-módszer javítására kidolgozott eljárást (Sólyom és Zawadowski 1974).

A Kondo-probléma az utóbbi másfél évtizedben a szilárdtestfizika egyik leg-többet vizsgált problémája volt, s ma sem állíthatjuk teljes biztonsággal, hogy kezünkben van a megoldás. A problémának rendkívül kiterjedt irodalma van, sok összefoglaló is megjelent, itt ezek közül Kondo (1969), Fisher (1970), valamint Grüner és Zawadowski (1974) munkáját említjük meg.

A Kondo-probléma egy fémbe ágyazott mágneses szennyezés viselkedésének, illetőleg a fém elektronjaira gyakorolt hatásának a problémája. A mágneses szennyezés S spinje és a vezetési elektronok spinje között kicserélődési kölcsönhatást, az ún. $s-d$ kicserélődést tételezve fel, a kölcsönhatást a következő alakban szokás felírni:

$$H_{\text{int}} = -J \sum_{\substack{k, k' \\ \alpha, \beta}} \vec{S} c_{k'\alpha}^{\dagger} \vec{\sigma}_{\alpha\beta} c_{k\beta}, \quad (2.1)$$

ahol J a kicserélődési kölcsönhatás erőssége, $c_{k\alpha}^{\dagger}$ ($c_{k\alpha}$) az elektronok keltő (eltüntető) operátora, $\sigma_{\alpha\beta}$ pedig a Pauli-mátrix. A skálázás tanulmányozásánál szokás ehelyett egy anizotróp kölcsönhatással rendelkező rendszert vizsgálni, melynek Hamilton-operátora

$$H_{\text{int}} = - \sum_{\substack{k, k' \\ \alpha, \beta}} \left\{ \frac{1}{2} J_{\pm} (S^{+} \sigma_{\alpha\beta}^{-} + S^{-} \sigma_{\alpha\beta}^{+}) + J_z S^z \sigma_{\alpha\beta}^z \right\} c_{k'\alpha}^{\dagger} c_{k\beta}. \quad (2.2)$$

A spintérbeli anizotrópiának megfelelően két különböző csatolási állandót választottunk, a spinátfordulás erősségét megszabó J_{\pm} -t és a spinfüggő potenciálszórást leíró J_z -t. A fizikai rendszer izotróp $s-d$ kicserélődéssel rendelkezik, az anizotróp rendszer vizsgálata a skálázás mibenlétéről nyújt érdekes felvilágosítást.

Az elektronok egymásközi kölcsönhatását elhagyva, a fém vezetési elektronjait a

$$H_0 = \sum_{k, \alpha} \varepsilon_k c_{k\alpha}^{\dagger} c_{k\alpha} \quad (2.3)$$

szabad Hamilton-operátor írja le. A vezetési sávot a Fermi-energia körül szimmetrikusan elhelyezkedőnek tételezzük fel konstans ρ állapotűrűséggel. Az energiát mindig a Fermi-energiától számítva, a sáv széle a $-E_c$ és E_c energianál legyen. E_c -t a továbbiakban levágási energiának is nevezzük.

Mint már említettük, Anderson a Kondo-problémában a primitív skálázást úgy kívánta megvalósítani, hogy a szórás mátrix változatlanul tartása mellett a sáv-szélesség (levágási energia) csökkentését a csatolási állandók megváltoztatásával kompenzálta. A szórás mátrixra vonatkozó

$$T(\omega) = H_{\text{int}} + H_{\text{int}} G_0(\omega) T(\omega) \quad (2.4)$$

Dyson-egyenlet felhasználásával, ahol

$$G_0(\omega) = \frac{1}{\omega - H_0}, \quad (2.5)$$

a kölcsönhatásmentes elektronok Green-függvénye, a sáv szélességnek E_c -ről $E_c - \Delta E$ -re való csökkentését egy P projekciós operátor segítségével írhatjuk le matematikailag. Ez a P projekciós operátor csak azokat az állapotokat hagyja meg, melyekben legalább egy elektron van az $(E_c - \Delta E, E_c)$ intervallumba eső energiával, vagy legalább egy lyuk a $(-E_c, -E_c + \Delta E)$ tartományban. Formálisan a következő szétbontást végezhetjük el:

$$T = H_{\text{int}} + H_{\text{int}}(1-P)G_0T + H_{\text{int}}PG_0T. \quad (2.6)$$

Ezt az egyenletet iterálva, az első lépésben

$$T = \{H_{\text{int}} + H_{\text{int}}PG_0H_{\text{int}}\} + \{H_{\text{int}} + H_{\text{int}}PG_0H_{\text{int}}\}(1-P)G_0T + \\ + H_{\text{int}}PG_0H_{\text{int}}PG_0T \quad (2.7)$$

adódik. Anderson szerint (2.7) utolsó tagja $(\Delta E)^2$ -tel arányos, mert kétszer szerepel benne a ΔE szélességű tartományra vetítő P projekciós operátor. ΔE -t kicsinek választva, a $(\Delta E)^2$ -es járulékat elhagyhatók, s ekkor (2.7)-ből leolvashatóan a szűkített sávban egy H'_{int} effektív kölcsönhatás írja le a rendszert, és

$$H'_{\text{int}} = H_{\text{int}} + H_{\text{int}}PG_0H_{\text{int}}. \quad (2.8)$$

Anderson megmutatta, hogy ez az új, effektív kölcsönhatás az alapállapotú energia eltolódástól eltekintve ugyanolyan alakú, mint az eredeti kölcsönhatás,

$$H'_{\text{int}} = H_{\text{int}} - \frac{\varrho \Delta E}{\omega - E_c} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ \frac{1}{2} J_{\pm} J_z (S^+ \sigma_{\alpha\beta}^- + S^- \sigma_{\alpha\beta}^+) + J_{\pm}^2 S^z \sigma_{\alpha\beta}^z \right\} c_{k'\alpha}^+ c_{k\beta}, \quad (2.9)$$

s ebből a csatolás megváltozását meghatározó egyenletek is felírhatók:

$$\Delta J_{\pm} = \frac{\varrho \Delta E}{\omega - E_c} J_{\pm} J_z, \quad (2.10)$$

$$\Delta J_z = \frac{\varrho \Delta E}{\omega - E_c} J_{\pm}^2. \quad (2.11)$$

ΔE -t infinitezimálisan kicsinek véve, a csatolások megváltozását leíró

$$\frac{dJ_{\pm}}{dE_c} = \frac{\varrho}{\omega - E_c} J_{\pm} J_z, \quad (2.12)$$

$$\frac{dJ_z}{dE_c} = \frac{\varrho}{\omega - E_c} J_{\pm}^2 \quad (2.13)$$

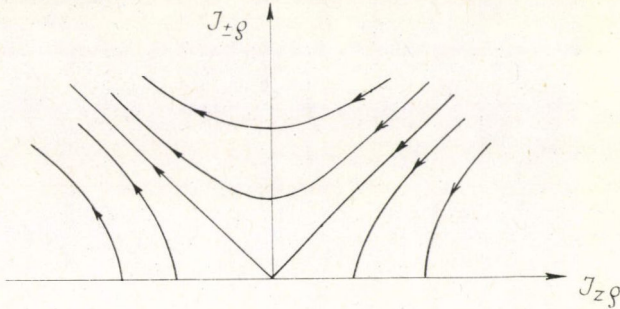
skálaegyenletek Anderson szerint egzaktak, mivel minden ΔE -vel arányos folyamatot figyelembe vettünk. A két egyenletből könnyen meghatározhatók az ekvivalens problémák. A csatolások (J_{\pm}, J_z) terében a levágási energia csökkentésével olyan ekvivalens rendszereket kapunk, melyekre

$$\frac{dJ_{\pm}}{dJ_z} = \frac{J_{\pm}}{J_z}, \quad (2.14)$$

vagyis

$$J_z^2 - J_{\pm}^2 = \text{konstans}. \quad (2.15)$$

Ezek az ekvivalens rendszerek a (J_{\pm}, J_z) síkon azonos skálagörbéken helyezkednek el. Az 1. ábrán mutatjuk be a Kondo-probléma skálagörbéit ebben a közelítésben. A skálagörbéken a nyilak azt jelzik, hogy a levágás csökkentésével merre haladva kapjuk az új rendszereket.



1. ábra. Ekvivalens Kondo-problémákat megadó skálagörbék

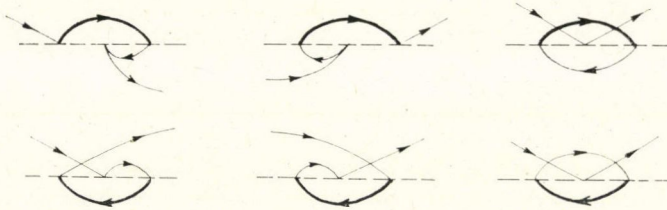
A skálagörbékről a következő tulajdonságokat olvashatjuk le. Az izotróp ferromágneses csatolás esetén ($J_{\pm} = J_z > 0$) és az izotróp vonal alatt elhelyezkedő esetekre a skálázással olyan ekvivalens rendszerekbe mehetünk át, amelyekben $J_{\pm} = 0$, vagyis hiányzik a Kondo-probléma lényegét jelentő spinátforgatásos szórás. Ez a probléma egzaktul megoldható, s így a ferromágneses csatolásra is ismerjük a feladat megoldását. Az izotróp vonal fölött és az antiferromágneses csatolás teljes tartományában a skálavonalak kifutnak a végtelenbe, vagyis a skálázással végtelenül erős csatolású esettel válnak ekvivalenssé. Éppen ez okozza a Kondo-probléma megoldásában a nehézséget, hogy még egy gyenge csatolási állandójú esetre sem lehet perturbációs eljárást alkalmazni, mert ekvivalens az erős csatolású esettel.

2.3. Korrekciók az Anderson-féle skálatörvényekhez

A Kondo-probléma skálázás segítségével történő megoldására más próbálkozások is voltak. Így például Anderson és munkatársai (Anderson és Yuval 1969, Yuval és Anderson 1970, Anderson, Yuval és Hamann 1970) a szennyező atom spinjének az $s-d$ kicserélődés következtében bekövetkező átfordulásai között eltelt minimális idő skálázásával vezették le a skálaegyenleteket. Ezekben a skálaegyenletekben a (2.12) és (2.13) egyenletekhez képest magasabb rendű korrekciók is megjelentek. Abrikoszov és Migdal (1970), valamint Fowler és Zawadowski (1971) a térelméleti renormálási csoportot fogalmazta át, és így jutottak a Kondo-probléma skálatörvényeihez. Ezek a szerzők egymástól függetlenül arra az eredményre jutottak, hogy a skálaegyenletekben a csatolásban négyzetes tagok mellett magasabb hatványú kombinációk is megjelennek. Ezekből az eljárásokból az is világos volt, hogy Anderson eredménye csak a vezető logaritmikus járulékokat veszi figyelembe, ugyanúgy, mint Abrikoszov (1965) parketta-közelítése, s a skálatörvények további korrekciói az alacsonyabb rendű logaritmikus járulékoknak felelnek meg.

Szükség volt ezért az Anderson-féle primitív skálázás olyan továbbvitelére, mely ezeket a további korrekciókat is helyesen adja. Ezt Zawadowskival végeztük el (Solyom és Zawadowski 1974). Először is megmutattuk, hogy (2.7) utolsó tagja olyan

folyamatokat is tartalmaz, melyek ΔE -vel arányosak. Ezeket a folyamatokat a következő gráfok szemléltetik.



A szaggatott vonal a szennyező spinnek felel meg, a folytonos vonal a szennyezésen szóródó elektronnak. A vastag vonal olyan elektronállapotnak, illetve lyukállapotnak felel meg, melynek energiája a kitranszformálódó ($E_c - \Delta E$, E_c), illetve ($-E_c$, $-E_c + \Delta E$) tartományba esik. Ezek mind olyan szórási folyamatok, amelyekben mindkét közbenső állapotban ugyanaz az elektron vagy lyuk van a kitranszformálódó ΔE szélességű tartományban, s ezért a járulék ΔE -vel arányos. Hasonló módon magasabbrendű tagokból is lehet ΔE -vel arányos járulékot kapni, s ezek a folyamatok mind figyelembeveendőek a skálatörvényeknél.

A szórási mátrix felírásánál ez azt jelenti, hogy a (2.7) egyenletet tovább kell iterálni, s végül

$$\begin{aligned}
 T = & \{H_{\text{int}} + H_{\text{int}} P G_0 H_{\text{int}} + H_{\text{int}} P G_0 H_{\text{int}} P G_0 H_{\text{int}} + \dots\} \\
 & + \{H_{\text{int}} + H_{\text{int}} P G_0 H_{\text{int}} + H_{\text{int}} P G_0 H_{\text{int}} P G_0 H_{\text{int}} + \dots\} (1-P) G_0 T \\
 & + H_{\text{int}} P G_0 H_{\text{int}} P G_0 H_{\text{int}} \dots P G_0 T.
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Az iteráció n -ik lépésében az utolsó tag $n+2$ -ször tartalmazza a H_{int} kölcsönhatást, így a csatolási állandó $(n+2)$ -ik hatványával arányos. Ezért a perturbációs számítás n -ik rendjében elhagyható. Valójában ennél lényegesen jobb közelítésnek felel meg az utolsó tag elhagyása, a logaritmikus közelítésben a vezető logaritmusok után következő n -ik logaritmikus járulék elhagyását jelenti.

A szórási mátrix (2.16)-ban megadott alakját balról és jobbról megszorozva $(1-P)$ -vel, és felhasználva, hogy H_0 és ezzel együtt G_0 kommutál P -vel, (2.16) a következő alakban írható át:

$$T' = H'_{\text{int}} + H'_{\text{int}} G_0 T', \quad (2.17)$$

ahol

$$T' = (1-P)T(1-P), \quad (2.18)$$

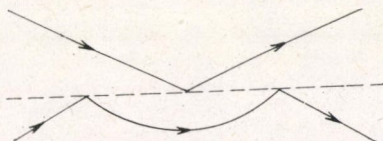
és

$$H'_{\text{int}} = (1-P)\{H_{\text{int}} + H_{\text{int}} P G_0 H_{\text{int}} + H_{\text{int}} P G_0 H_{\text{int}} P G_0 H_{\text{int}} + \dots\}(1-P). \quad (2.19)$$

Láthatóan azon szórási folyamatokra, amelyekben a szóródó elektronok az új sávon belül fekszenek, az E_c levágással és H_{int} kölcsönhatással rendelkező eredeti probléma ekvivalens egy olyan problémával, melyben $E_c - \Delta E$ a levágás és H'_{int} a kölcsönhatás.

Ez az ekvivalencia azonban a jelen formában félrevezető. Az eredeti kölcsönhatásban egy elektronnak a szennyező spinen történő szórása szerepel. Az új H'_{int}

kölcsönhatás már olyan folyamatokat is megenged, amelyek két vagy több részecske szóródásának felelnek meg. Egy ilyen folyamatot mutatunk be a következő gráfon.



Ezeknek a nehézségeknek az elkerülésére Zawadowskival azt javasoltuk, hogy a skálaegyenleteket úgy kell meghatározni, hogy a szórás mátrix egyrészecskegerjesztéses állapotok közötti mátrixelemei legyenek invariánsak. A szórás mátrixnak az

$$|i\rangle = c_{k\alpha}^+ |0\rangle \quad (2.20)$$

kezdőállapot és az

$$|f\rangle = c_{k'\beta}^+ |0\rangle \quad (2.21)$$

végállapot közötti

$$T_{fi} = \langle f | T | i \rangle \quad (2.22)$$

mátrixelemét vizsgáljuk, ahol $|0\rangle$ a nem kölcsönható vezetéselektron-rendszer és a szennyező spin együttes állapotvektora. Igen lényeges figyelembe venni, hogy az elektronok és a szennyező spin kölcsönhatása következtében ezen kezdő- és végállapot módosulást szenved, és a hullámfüggvény normájának helyes megválasztása céljából az

$$|i'\rangle = A_i c_{k\alpha}^+ |0\rangle, \quad |f'\rangle = A_f c_{k'\beta}^+ |0\rangle \quad (2.23)$$

hullámfüggvényekkel kell dolgoznunk, ahol

$$A_i = \langle i | 1 + G_0 T | i \rangle^{-1/2}, \quad (2.24)$$

$$A_f = \langle f | 1 + G_0 T | f \rangle^{-1/2}. \quad (2.25)$$

Ezután az így megválasztott állapotok közötti

$$T'_{fi} = \langle f' | T | i' \rangle = \frac{\langle f | H_{\text{int}} + H_{\text{int}} G_0 T | i \rangle}{\{\langle f | 1 + G_0 T | f \rangle \langle i | 1 + G_0 T | i \rangle\}^{1/2}} \quad (2.26)$$

mátrixelemre követeljük meg azt, hogy a skálatranszformáció változatlanul hagyja, vagyis

$$T'_{fi}(J_{\pm}, J_z, E_c) = T'_{fi}(J_{\pm} + \Delta J_{\pm}, J_z + \Delta J_z, E_c - \Delta E). \quad (2.27)$$

Ennek az invarianciaegyenletnek a differenciális alakja,

$$\frac{\partial T'_{fi}}{\partial J_{\pm}} \Delta J_{\pm} + \frac{\partial T'_{fi}}{\partial J_z} \Delta J_z = \frac{\partial T'_{fi}}{\partial E_c} \Delta E \quad (2.28)$$

szolgáltatja a skálatörvényeket. Hangsúlyozni kell, hogy itt nem egyszerűen az Anderson által adott megfogalmazás átírásáról van szó. A hullámfüggvény normájának helyes megválasztása lényegesen befolyásolja a skálatörvényeket, s a szórás mátrixra vonatkozó (2.4) egyenletnek a (2.17)-ben megadott átírásában ez a hullámfüggvény-normálás nincs figyelembe véve.

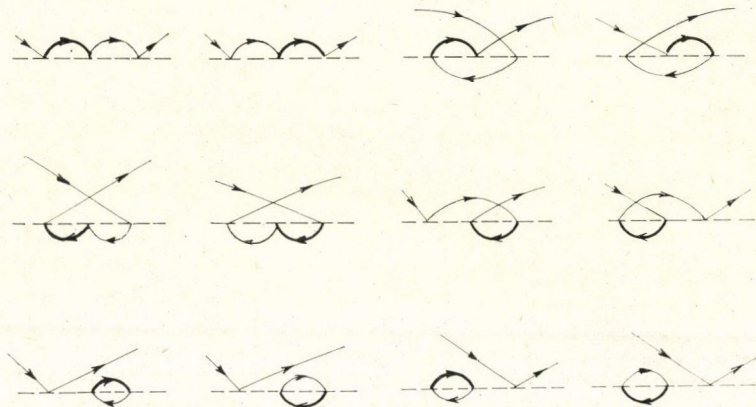
A skálatörvények meghatározásához így most a szórási mátrix mátrixelemeinek deriváltjait kell meghatároznunk.

Másodrendig közvetlenül adódik:

$$T'_{fi} = - \left[\frac{1}{2} J_{\pm} (S^+ \sigma^- + S^- \sigma^+) + J_z S^z \sigma^z \right] - \left[\frac{1}{2} J_{\pm} J_z (S^+ \sigma^- + S^- \sigma^+) + J_{\pm}^2 S^z \sigma^z \right] \varrho \ln \frac{\omega}{E_c}. \quad (2.29)$$

Ezt az alakot visszairva (2.28)-ba, ugyanazokat a skálaegyenleteket kapjuk, mint Anderson.

Következő rendben a számolás részleteit nem írjuk ki, csak utalunk arra, hogy kaphatók meg. A csatolási állandó szerinti deriváltak meghatározásához elegendő T'_{fi} (2.29)-ben megadott másodrendig érvényes alakja, hiszen ΔJ_{\pm} és ΔJ_z (2.10) és (2.11)-ből ismert módon a csatolási állandó négyzetével arányos. Új számolást csak a levágás szerinti derivált meghatározása igényel. Ezek meghatározására viszont igen alkalmas a H'_{int} vizsgálatánál alkalmazott időrendezett gráftechnika. A 2.3 fejezet elején már felrajzolt hat folyamaton kívül még tizenkét harmadrendű folyamat van, mely T'_{fi} -ben ΔE -vel arányos járulékot ad. Ezek a folyamatok a következők:



A négy utolsó folyamat a szennyező spin polarizálásának felel meg, s ez vezet a kezdő- és végállapot renormálására. Anderson eredeti megfogalmazásában ezek a folyamatok nincsenek helyesen figyelembe véve.

Az $\omega \ll E_c$ határesetben, és elhanyagolva az alapállapot energiája eltolódását, a csatolásban harmadrendig ΔE -vel arányosan a következő adódik:

$$\begin{aligned} \Delta T'_{fi} = & \frac{\varrho}{E_c} \left[J_{\pm}^2 S^z \sigma^z + \frac{1}{2} J_{\pm} J_z (S^+ \sigma^- + S^- \sigma^+) \right] \Delta E + \\ & + \frac{\varrho^2}{E_c} \left[\frac{1}{2} J_{\pm}^2 J_z S^z \sigma^z + \frac{1}{8} (J_{\pm} J_z^2 + J_{\pm}^3) (S^+ \sigma^- + S^- \sigma^+) \right] \Delta E + \quad (2.30) \\ & + \frac{\varrho^2}{E_c} \ln \frac{\omega}{E_c} \left[2J_{\pm}^2 J_z S^z \sigma^z + \frac{1}{2} (J_{\pm} J_z^2 + J_{\pm}^3) (S^+ \sigma^- + S^- \sigma^+) \right] \Delta E + \dots \end{aligned}$$

Behelyettesítve ezt és (2.29)-nek J_{\pm} és J_z szerinti deriválásából kapott kifejezéseket (2.28)-ba, a kétfajta spinfaktornak megfelelően két egyenletet kapunk:

$$\frac{\varrho}{E_c} J_{\pm} J_z \Delta E + \frac{\varrho^2}{E_c} \frac{1}{4} (J_{\pm} J_z^2 + J_{\pm}^3) \Delta E + \frac{\varrho^2}{E_c} \ln \frac{\omega}{E_c} (J_{\pm} J_z^2 + J_{\pm}^3) \Delta E + \Delta J_{\pm} + \varrho \ln \frac{\omega}{E_c} J_z \Delta J_{\pm} + \varrho \ln \frac{\omega}{E_c} J_{\pm} \Delta J_z = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\varrho}{E_c} J_{\pm}^2 \Delta E + \frac{\varrho^2}{E_c} \frac{1}{2} J_{\pm}^2 J_z \Delta E + \frac{\varrho^2}{E_c} \ln \frac{\omega}{E_c} 2J_{\pm}^2 J_z \Delta E + \Delta J_z + \varrho \ln \frac{\omega}{E_c} 2J_{\pm} \Delta J_{\pm} = 0. \quad (2.32)$$

Az egyenletek megoldása:

$$\Delta J_{\pm} = -\frac{\varrho}{E_c} \left[J_{\pm} J_z + \frac{1}{4} (J_{\pm} J_z^2 + J_{\pm}^3) \varrho \right] \Delta E, \quad (2.33)$$

$$\Delta J_z = -\frac{\varrho}{E_c} \left[J_{\pm}^2 + \frac{1}{2} J_{\pm}^2 J_z \varrho \right] \Delta E, \quad (2.34)$$

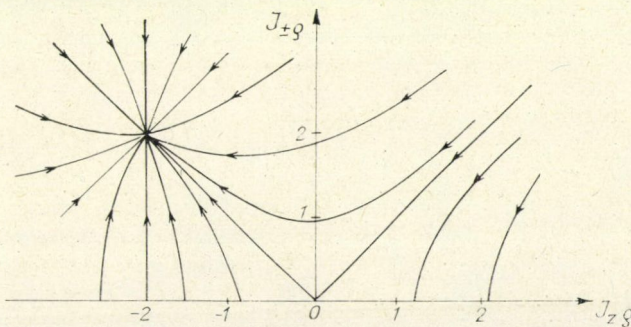
differentiális alakban pedig

$$\frac{dJ_{\pm}}{dE_c} = -\frac{\varrho}{E_c} \left[J_{\pm} J_z + \frac{1}{4} (J_{\pm} J_z^2 + J_{\pm}^3) \varrho \right], \quad (2.35)$$

$$\frac{dJ_z}{dE_c} = -\frac{\varrho}{E_c} \left[J_{\pm}^2 + \frac{1}{2} J_{\pm}^2 J_z \varrho \right]. \quad (2.36)$$

Ezzel megkaptuk a (2.12) és (2.13) skálatörvényekhez az első korrekciót. Magasabb rendben további korrekciók jelennek meg.

A skálagörbét most is meg lehet határozni ezen egyenletek kiintegrálásából. A 2. ábra mutatja az így kapott trajektóriákat.



2. ábra. Az anizotróp Kondo-probléma skálagörbéi a harmadrendű korrekciók figyelembevételével

Az 1. ábrán bemutatott skálagörbékhez képest lényeges különbség az antiferromágneses csatolás esetén van. A görbék nem futnak ki a végtelenbe, hanem egy véges helyen levő pontba futnak be. A differenciálegyenlet megoldásából adódó ilyen pontot izolált szinguláris pontnak, vagy fix-pontnak nevezik. A fix-pontok egyszerűen megkaphatók abból, hogy a fix-pontnál a skálaegyenletek jobb oldala eltűnik. A mi esetünkben a fix-pont értéke $J_{\pm} \varrho = 2$, $J_z \varrho = -2$.

Az antiferromágneses csatolású Kondo-probléma tehát ebben a közelítésben nem a végtelen erősségű csatolás esetével ekvivalens, hanem egy véges csatolással. Ez a véges csatolás azonban egységnyi nagyságrendű, s ezért a további korrekciók nem elhanyagolhatók. A fent leírt módon a további tagokat is figyelembe lehet venni, gyakorlatilag azonban a számolás kivihetetlen. Ezért általánosságban csak annyit állíthatunk, hogy a skálaegyenletek a következő alakúak:

$$\frac{dJ_{\pm}}{dE_c} = \frac{\varrho}{E_c} f(J_{\pm}, J_z), \quad (2.37)$$

$$\frac{dJ_z}{dE_c} = \frac{\varrho}{E_c} g(J_{\pm}, J_z), \quad (2.38)$$

és $f(J_{\pm}, J_z)$ J_{\pm} -ban páratlan tagokat tartalmaz, $g(J_{\pm}, J_z)$ pedig J_{\pm} -ban páros tagokat. Továbbá, mivel az izotróp eset izotrópba skálázódik, $f(J, J) = g(J, J)$. A kérdés az, hogy ez az $f(J, J)$ függvény rendelkezik-e nulla-hellyel, vagy sem. Amennyiben igen, úgy véges csatolású esetben skálázódik be a gyenge csatolású Kondo-probléma, ha viszont nem, akkor a végtelenbe futnak ki a skálavonalak. Az adott közelítésben, amikor $f(J, J)$ sorfejtésében a másod- és harmadrendű tagot ismerjük, kapunk egy nullahelyet, sőt a perturbációs számítás minden véges rendjében kapunk, de az egzakt alak ismerete nélkül nem tudjuk eldönteni, mi a tényleges helyzet. Erre a kérdésre a későbbiekben még visszatérünk.

Ez a skálázási eljárás, noha nem vezetett a Kondo-probléma megoldásához, jól mutatja a skálázás lényegét, az ekvivalens problémák sorozata előállításának módját. Ugyanakkor sok problémát nyitva is hagy. A skálázással szembeni invarianciát a hullámfüggvény-renormálás figyelembevételével definiált szórás mátrix mátrix-elemeire követeltük meg. Más választás esetén más skálatörvény adódott volna. Az eljárásban nem látszik biztosítottnak az új csatolás valós volta, holott fizikailag mindig valós csatolási állandókat várunk. A magasabb rendekben megjelenő, több-részeske-szórást leíró folyamatok jelentősége sem tisztázott. Ezért a skálázási eljárást biztosabb alapokra kell tenni. Ennek lehetséges megfogalmazásával foglalkozunk a következő fejezetekben.

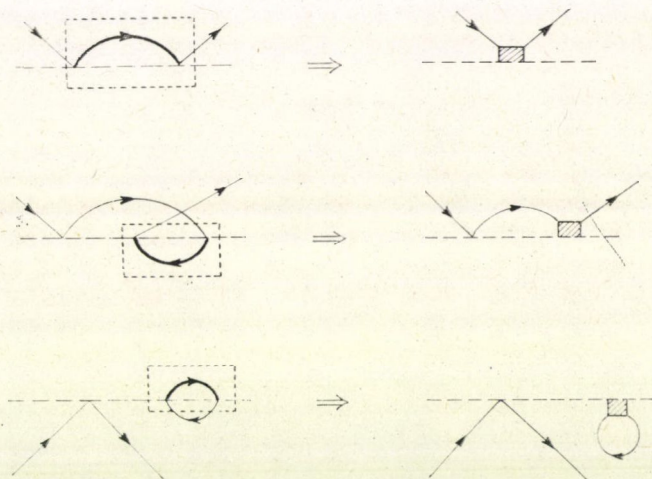
2.4. A skálázás gráftechnikai megfogalmazása

A fent említett nehézségek elkerülésére, illetve a skálázási eljárás pontosítására *Nozières* (1976) dolgozott ki egy olyan módszert, mely a gráftechnikán alapulva egyértelmű előírást ad a követendő lépésekről. A módszer gondolatvilágában a Wilson által kijelölt utat követi, azért ismertetjük mégis az általános elmélet előtt, mert gráftechnikához, s így bizonyos értelemben a perturbációs számításához kötődik.

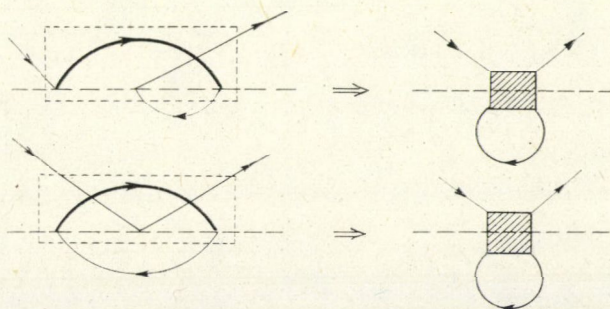
Az eljárást itt is a Kondo-problémán mutatjuk be. Vizsgáljuk most is a szórás mátrix mátrix-elemeit egyrészesekes gerjesztett állapotok között. A 2.3. fejezetben

már ábrázoltuk az összes lehetséges másod- és harmadrendű szórási folyamatot. A megvastagított vonal jelezte a kitranszformálandó $(-E_c, -E_c + \Delta E)$, illetve $(E_c - \Delta E, E_c)$ tartományba eső lyukat, illetve elektront. Minden gráfban csak egy vastagított vonal szerepel, hogy a járulék ΔE -vel arányos legyen. A fenti eljárást azonban úgy fogalmazzuk meg, hogy elkerülhető legyen a kétrészecske-szórások bevezetése.

Nozières eljárásában az új, effektív kölcsönhatások olyan gráfok felösszegezésével keletkeznek, melyek csak a $(-E_c, -E_c + \Delta E)$, illetve $(E_c - \Delta E, E_c)$ tartományba eső elektronoknak, illetve lyukaknak megfelelő vonalat tartalmaznak. Úgy, mint az előző fejezetben ismertetett módszerben, itt is minden gráfban egy kitranszformálandó vonal van. Ezt a vonalat egy blokkba zárva, effektív egy-, két- és több részecske-szórásokat vezetünk be a $(-E_c + \Delta E, E_c - \Delta E)$ tartományba eső elektronokra. A következő ábrákon ilyen effektív egy- és kétrészecske-szórási folyamatokat, illetve azok segítségével leírható magasabb rendű folyamatokat mutatunk be.



3. ábra. Effektív egyrészecske-szórással leírható folyamatok



4. ábra. Effektív kétrészecske-szórással leírható folyamatok

Az így grafikususan definiált egy- és kétrészecskes effektív csatolási állandókkal a T -mátrix tetszőleges mátrixeleme kifejezhető. Az egyrészecske-szórás effektív csatolási erősségére grafikususan a következő egyenlet igaz:

$$(2.39)$$

a kétrészecske-szórásra pedig:

$$(2.40)$$

A kétrészecske-szórás erősségét K -val jelölve, analitikusan a következő sematikus egyenletet kapjuk (a sematikusság azt jelenti, hogy nem írjuk ki pontosan a szám-faktorokat):

$$\frac{dJ}{dE_c} \sim -\frac{\varrho}{E_c} J^2 + \varrho K + \dots, \quad (2.41)$$

$$\frac{dK}{dE_c} \sim -\frac{\varrho}{2E_c^2} J^3 + \frac{\varrho}{E_c} JK + \dots \quad (2.42)$$

(2.42)-ből legalacsonyabb rendben könnyen beláthatóan $K = \frac{\varrho}{2E_c} J^3$, és ezt (2.41)-be helyettesítve visszkapjuk a J kicserélődési kölcsönhatásra korábban levezetett skálaegyenletet.

A részletekbe menés nélkül itt csak azt kívánjuk hangsúlyozni, hogy ezzel a módszerrel nemcsak a csatolási állandókra lehet a skálaegyenleteket felírni, hanem például a válaszfüggvényekre is, s így azok sok esetben igen egyszerűen meghatározhatók.

A módszerrel kapcsolatban kell azonban néhány megjegyzést tennünk, mielőtt az általános Wilson-elméletre rátérnénk. Először, az effektív csatolás itt adott definíciójából következik, hogy nem lehet elkerülni a magasabb rendű, több részecske szórásának megfelelő csatolások bevezetését. Az új, effektív Hamilton-operátor tehát sokkal bonyolultabb lehet, mint az eredeti, fizikai Hamilton-operátor, melyben csak egyrészecske-szórás szerepel. Másodszor, az időrendezett gráfokon jól látszik, hogy az effektív kölcsönhatás időben retardált. Ezt az időbeli retardáltságot is figyelembe kell venni. Olyan kölcsönhatásoknál, amelyeknél az impulzusmegmaradás teljesül, a külső impulzusváltozó is megjelenik az effektív kölcsönhatásban.

Végül megjegyezzük, hogy az itt bemutatott eljárás a gráftechnikán kívül semmi különlegeset nem tételezett fel a rendszerrel, s így szinte minden fizikai problémára formálisan alkalmazható. Éppen általánossága miatt ilyen formában szinte használhatatlan.

További feltevésekkel azonban, például feltéve, hogy a magasabb rendű csatolások nem lényegesek, az egyenletek megoldhatók, s a fizikai rendszertől függően hasznos információt szolgáltathatnak. Ez azonban minden esetben további vizsgálatot igényel.

3. A renormálási transzformáció Wilson-féle megfogalmazása

3.1. Általános renormálási transzformáció

Az előző fejezetben a Kondo-probléma példáján bemutattuk, hogyan lehet a szabadsági fokok számának fokozatos csökkentésével skálatörvényeket kapni. Nem vizsgáltuk részletesen a skálatörvények következményeit, éppen azért, mert láttuk, hogy a kapott skálatörvények közelítő érvényűek és nem adnak egyértelmű felvilágosítást a rendszer fizikai viselkedéséről.

Most az előzőkben gráfnyelven megfogalmazott renormálási transzformációt a legáltalánosabb formában ismertetjük. A renormálási transzformáció ilyen megfogalmazása Wilsontól származik. Az irodalomból néhány összefoglaló cikkre hivatkozunk csak, itt a módszer részletesen ki van fejtve (*Wilson és Kogut 1974, Fisher 1974, Wilson 1975*). Wilson megfogalmazása szerint a renormálási transzformáció egy soktestproblémai rendszer Hamilton-operátorán elvégzett transzformációs művelet, mely a nagyszámú szabadsági fokkal rendelkező rendszer néhány, véges számú szabadsági fokára hat. A renormálási transzformáció ismétlésével iteratív módon végül az összes szabadsági fokot figyelembe tudjuk venni, s ezen a módon a probléma megoldásához juthatunk el.

Valamilyen H Hamilton-operátorral megadott rendszert véve és erre alkalmazva az R renormálási transzformációt, egy új H' Hamilton-operátort kapunk, melyben a rendszert jellemző paraméterek új értéket vesznek fel.

$$H' = R[H]. \quad (3.1)$$

A transzformációt iterálva, a Hamilton-operátorok H', H'', H''', \dots sorozatát generálhatjuk,

$$H'' = R[H'], \quad H''' = R[H''], \dots \quad (3.2)$$

mindaddig, míg a H^* fix-pont Hamilton-operátorhoz nem jutunk, melyre

$$H^* = R[H^*]. \quad (3.3)$$

A renormálási csoport általános definíciójából következően mindezek a Hamilton-operátorok ekvivalensek, abban az értelemben, hogy ugyanolyan mérhető fizikai mennyiségekre vezetnek.

A renormálási transzformációnak csak akkor van haszna, ha vele egy fix-pont Hamilton-operátorhoz jutunk. Amennyiben nem ez a helyzet, a renormálási transzformáció semmilyen információt nem ad a rendszerről. Ha viszont egy fix-pont Hamilton-operátort kapunk, akkor a fix-pont körül a renormálási transzformációt linearizálva a fix-ponthez közeli rendszerek viselkedése perturbációs számítással meghatározható, s ebből az eredeti rendszert jellemző fizikai mennyiségeket is megkaphatjuk.

A Wilson-módszer leírásánál szándékosan kerülök minden konkrét megfogalmazást. Ugyanis a fizikai probléma természetéből fakadóan a renormálási transzformáció alakja igen különböző lehet, s azok a módszerek is, melyek a fix-pont Hamilton-

operátor ismeretében a mérhető mennyiségek meghatározásához vezetnek, igen különbözők. A következőkben két példán két különböző eljárást mutatok be. Az egyik példa a kritikus jelenségek, a másik a Kondo-probléma. A kétfajta módszer pedig a Wilson-elmélet egyik általánosan használt, levágás-skálázási eljárása, illetve egy numerikus renormálási eljárás.

3.2. A kritikus jelenségek Wilson-féle elmélete

A kritikus jelenségeknek igen kiterjedt irodalma volt a Wilson-féle tárgyalás előtt is (lásd Stanley 1971), sok részlet ismeretes volt, mégha az elméleti magyarázat sok helyen hiányzott is. Így például az univerzalitás ismert volt, ez azt jelenti, hogy pl. egy Heisenberg-moddellel leírható mágneses rendszer kritikus viselkedésére jellemző kritikus exponensek nem függenek a spin nagyságától, a kicserélődési kölcsönhatás erősségétől vagy a mágneses atomok kristálytani elhelyezkedésétől. Az Ising-moddellel ugyanez igaz, de mégis mások ott a kritikus exponensek, mint a Heisenberg-moddellel. Az első feladat az volt, hogy egy olyan Hamilton-operátort kellett választani, melyből a lényegtelen információk már ki vannak hagyva, s azután kellett ezen a modellen egy renormálási transzformációt értelmezni.

Az első problémát Wilson (1971) azzal oldotta meg, hogy egy n -komponensű klasszikus spinekből álló rendszerre egy Ginzburg—Landau (1950) típusú effektív kölcsönhatást vezetett be.

$$H(x) = \frac{1}{2} K (\nabla \vec{S}(x))^2 + \frac{1}{2} r_0 \vec{S}(x) \cdot \vec{S}(x) + \frac{1}{4!} u (\vec{S}(x) \cdot \vec{S}(x))^2 + \dots \quad (3.4)$$

Részben Wilson, részben Wegner (1972a) mutatta meg, hogy az így választott kölcsönhatás, a hőmérséklettel arányos r_0 -lal és hőmérsékletfüggetlen K , u paraméterekkel tartalmaz mindent, ami a kritikus viselkedés leírása szempontjából lényeges. A csatolásokat például a nem lokális esetre általánosítva, a kritikus viselkedés nem változik.

Következő lépésként Wilson definiálta a használandó renormálási transzformációt. Ehhez a Kadanoff-féle skálatranszformációt fogalmazta át Wilson. Kadanoff (1966) szerint a kritikus jelenségek leírásának egy lehetséges módja az, hogy az atomokból vagy spinekből egyre nagyobb blokkokat készítünk, s feltételezzük, hogy ezen hossz-skálázási transzformáció után a rendszer ugyanannyi számú paraméterrel írható le, s ráadásul az új és régi paraméterek között igen egyszerű kapcsolat áll fenn. Ezen a módon sikerült is a kritikus exponensek közötti kapcsolatokat megadó skálatörvényeket levezetni, de nem volt mód a kritikus exponensek számértékének a meghatározására. Wilson a Kadanoff-féle skálatranszformáció mögötti fizikai képből indult ki, nevezetesen abból, hogy a kritikus jelenségekben a rövid hullámhosszú fluktuációk a lényegesek, s ezt öntötte matematikai formába a következőképpen:

1. A (3.4) Hamilton-operátort átírjuk Fourier-komponensekre, s az impulzusokat az integrálásban levágjuk egy Λ maximális impulzusnál, $\Lambda \sim 1/a$ és a az elemi cella élhossza.

$$H = \int_{k < \Lambda} (r_0 + k^2) \vec{S}(k) \vec{S}(-k) dk + u \int_{k_1, k_2, k_3, k_4 < \Lambda} (\vec{S}(k_1) \vec{S}(k_2)) (\vec{S}(k_3) \vec{S}(k_4)) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 + \dots \quad (3.5)$$

A gradienses tag együtthatóját egynek választottuk, a kritikus jelenségek leírásán ez nem változtat.

2. A renormálási transzformációt azzal definiáljuk, hogy H -ből kitranszformáljuk a Λ/b és Λ közötti impulzusokat. Minthogy a rendszer termodinamikai viselkedését az állapotösszegegen keresztül a szabadenergiából határozhatjuk meg, célszerű az állapotösszeg

$$Z = \prod_{k=0}^{\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} dS(k) \exp(-H) \quad (3.6)$$

definíciójának felhasználásával H' -t egy részleges integrálással adni meg.

$$\exp(-H') = \prod_{k > \Lambda/b}^{\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} dS(k) \exp(-H). \quad (3.7)$$

Az integrálás elvégzése után az új Hamilton-operátor hasonló alakú, mint (3.5), de a 2. fejezetben mondottaknak megfelelően magasabb rendű, hat-, nyolc-spin kölcsönhatás is megjelenhet. A teljes hasonlóság kedvéért azonban még két további műveletet kell elvégeznünk.

3. Átskálázzuk az impulzusokat a b szorzófaktorral

$$q \rightarrow q' = bq, \quad (3.8)$$

hogy az impulzuslevágás újra Λ -nál legyen.

4. Átskálázzuk a spinvektort is egy c szorzóval

$$S(x) \Rightarrow S'(x) = cS(x) \quad (3.9)$$

úgy, hogy a k^2 -es tag együtthatója újra 1 legyen.

Ezután már leolvasható a kapcsolat a H' Hamilton-operátor és a H Hamilton-operátor paraméterei, r_0, u, \dots között. Általánosságban pedig egy rekurziós formula adódik H_{l+1} és H_l paraméterei között. Ily módon a paraméterek terében megkaphatjuk mindazokat a Hamilton-operátorokat, melyek azonos fizikai viselkedést adnak a kritikus pont közelében.

A konkrét számolás azt mutatja, hogy a hőmérsékleti paramétert a kritikus hőmérsékletnek megfelelő helyen véve, a renormálási transzformáció iterálásával egy H^* fix-pont Hamilton-operátorhoz jutunk, s amint azt a 3.1. fejezetben említettük, a fix-pont körüli viselkedésből a kritikus exponensek meghatározhatók. Az általános esetben szokásos eljárás az, hogy a renormálási transzformációt a fix-pont körül linearizálják. Egy $H = H^* + hQ$ Hamilton-operátorra, ahol h egy kis paraméter, a renormálási transzformáció hatása

$$H' = R[H^* + hQ] = H^* + hLQ, \quad (3.10)$$

ahol L a Hamilton-operátorok terében egy lineáris operátor.

Megkeresve ezen lineáris operátor sajátfüggvényeit és sajátértékeit,

$$LQ_i = \lambda_i Q_i, \quad (3.11)$$

megmutatható, hogy

$$\lambda_i = \frac{\ln A_i}{\ln b} \quad (3.12)$$

független b választásától, s ezek a λ_i -k rendelkeznek fizikai értelemmel. Könnyen látható ugyanis, hogy ha $H-H^*$ -ot a Q_i sajátfüggvények szerint kifejtjük,

$$H = H^* + h_i Q_i, \quad (3.13)$$

akkor

$$H' = R[H] = H^* + h_i b^{\lambda_i} Q_i, \quad (3.14)$$

vagyis a h_i kifejtési paraméterek változása a renormálási transzformáció során

$$h_i \rightarrow h'_i = h_i b^{\lambda_i}. \quad (3.15)$$

A Q_i sajátfüggvények közül az egyik (Q_1) az energiasűrűséggel azonosítható, egy másik (Q_2) a rendparaméterrel, mágneses rendszereknél a mágnesezettséggel. A Hamilton-operátorban így h_1 a hőmérséklettel, $t = (T - T_c)/T_c$ -vel, h_2 a H mágneses térrel arányos. A szabadenergiának a kritikus viselkedést megadó szinguláris részére, pontosabban annak sűrűségére a hossz-skála megváltozása miatt a következő skálaegyenlet igaz:

$$F(h_1, h_2, h_3, \dots) = b^{-d} F(h'_1, h'_2, h'_3, \dots). \quad (3.16)$$

Bérvá (3.15)-öt a jobb oldalra, s az eddig tetszőleges b -t úgy rögzítve, hogy $tb^{\lambda_1} = 1$,

$$F(t, H, h_3, \dots) = t^{d/\lambda_1} F\left(1, \frac{H}{t^{\lambda_2/\lambda_1}}, \frac{h_3}{t^{\lambda_3/\lambda_1}}, \dots\right), \quad (3.17)$$

amivel megkaptuk a szabadenergia skálaalakját egy homogenitási reláció formájában.

Ez az eljárás nemcsak ennek a skálaalaknak a levezetésére alkalmas, hanem az exponensek számértékét is képes bizonyos közelítésben megadni. Wilson (1971) a rekurziós reláció numerikus megoldásával a háromdimenziós Ising-modellre meglepően jó eredményeket kapott. A háromdimenziós rendszerek vizsgálata azonban még numerikusan sem könnyű feladat, s ezért a kritikus jelenségek leírását nem tekintetjük megoldottnak.

Igen fontos lépés volt, amikor Wilson és Fisher (1972) észrevette, hogy négydimenziós rendszereknél a fix-pont Hamilton-operátorban az u -nak megfelelő kölcsönhatási tag eltűnik, s a feladat így a kritikus exponenseket illetően egzaktul megoldható, s a klasszikus Landau-elmélet exponenseit kapjuk vissza. A számolást ezután formálisan kiterjesztve nem egész dimenziószámra is, négyhez közeli dimenziószám esetén ($d = 4 - \varepsilon$) az u csatolás fix-pont értéke ε -nal arányosnak adódik, s ezért egy ε szerinti sorfejtés építhető fel konzekvensen, s a kritikus exponensek is ε hatványai szerint állíthatók elő. A fix-pont körüli linearizálás analitikusan elvégezhető, egy gráftechnikai eljárás is kidolgozható, s ezzel a módszerrel az α, β, γ kritikus exponensekre például a következő eredményt kapták:

$$\alpha = \frac{4-n}{2(n+8)} \varepsilon - \frac{(n+2)^2(n+28)}{4(n+8)^3} \varepsilon^2 + \dots \quad (3.18)$$

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(n+8)} \varepsilon + \frac{(n+2)(2n+1)}{2(n+8)^3} \varepsilon^2 + \dots \quad (3.19)$$

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)} \varepsilon + \frac{(n+2)(n^2+22n+52)}{4(n+8)^3} \varepsilon^2 + \dots \quad (3.20)$$

Ezzel a módszerrel a legkülönbözőbb kölcsönhatások (anizotropia, dipól—dipól kölcsönhatás, stb.) szerepét, a polikritikus viselkedést tanulmányozták. Itt *Fisher* (1974), valamint *Toulouse* és *Pfeuty* (1975) összefoglalóira utalunk, ezekben további irodalmi hivatkozás is található.

3.3. A Kondo-probléma megoldása

A Kondo-probléma fizikáját a második fejezetben már leírtuk. Egy primitív skálázási eljárással megmutattuk, hogy a probléma megoldásában a nehézséget az jelenti, hogy a Kondo-probléma szempontjából érdekes antiferromágneses csatolás esetén a renormált csatolási állandó abszolút értékben növekszik, s a kezdetben gyenge csatolású eset egy erős csatolású esettel válik ekvivalenssé. A perturbációszámítás alkalmazhatatlanná válik, az ismertetett eljárás viszont perturbációszámoláson alapult. A Kondo-probléma megoldásához a lényeges lépés a renormálási transzformáció alkalmas megválasztása volt, melynek segítségével nem perturbatív eljárás lehetett véghez vinni. Röviden ismertetjük az eljárást, annak illusztrálására, milyen teljesítményre képes a renormálási csoport módszer egy olyan területen, mely hosszú ideig megoldhatatlannak látszott.

A kritikus jelenségek vizsgálatához hasonlóan itt is két feladatot kellett megoldani, mielőtt neki lehetett állni a tényleges számolásnak. Először a Kondo-probléma Hamilton-operátorát át kellett írni olyan alakra, mely minden lényeges vonást megőriz, de az eredetinel alkalmasabb a számolásra, másodszer pedig definiálni kellett egy alkalmas renormálási transzformációt.

Első lépésként *Wilson* (1973, 1975) a Kondo-probléma Hamilton-operátorát egy egydimenziós diszkrét probléma Hamilton-operátorává írta át. Az egydimenziósság nem meglepő, hiszen a bevezetésben már említettük, hogy a Kondo-problémában, mivel az impulzusmegmaradás nem teljesül, dolgozhatunk energiaintegrállal is az impulzusintegrálok helyett, s ekkor egydimenziós integrálok maradnak. A diszkretizálást pedig azzal lehet elérni, hogy a Fermi-gömböt gömbhéjakra bontjuk, s ezeket a tartományokat diszkrét egységekként kezeljük. Ilyen transzformációk után a rendszer teljes Hamilton-operátora, beleértve a szabad elektrongáznak megfelelő részt, végülis így írható:

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^{-n/2} (f_n^+ f_{n+1} + f_{n+1}^+ f_n) - \tilde{J} f_0^+ \vec{\sigma} f_0 \vec{S}, \quad (3.21)$$

ahol f_n^+ egy fermion keltő-operátor, \tilde{J} az eredeti J csatolással arányos, Λ pedig a numerikus számítás konvergenciáját hivatott elősegíteni, s a $\Lambda \rightarrow 1$ eset felel meg a fizikai problémának. Az állapotsűrűséget az egyszerűség kedvéért egynek választottuk.

A továbbiakban *Wilson* a H_N Hamilton-operátorok sorozatát definiálja a

$$H_N = \Lambda^{(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \Lambda^{-n/2} (f_n^+ f_{n+1} + f_{n+1}^+ f_n) - \tilde{J} f_0^+ \vec{\sigma} f_0 \vec{S} \right\} \quad (3.22)$$

definícióval. Láthatóan az eredeti H Hamilton-operátort az $N \rightarrow \infty$ határesetben kapjuk vissza:

$$H = \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda^{-(N-1)/2} H_N. \quad (3.23)$$

A Hamilton-operátorok ezen rendszere egyszerű rekurziós összefüggésnek tesz eleget,

$$H_{N+1} = A^{1/2} H_N + f_{N+1}^+ f_N + f_N^+ f_{N+1}, \quad (3.24)$$

és ezt használjuk fel a renormálási transzformáció definiálására.

$$H_{N+1} = R[H_N] = A^{1/2} H_N + f_{N+1}^+ f_N + f_N^+ f_{N+1} - E_{G,N+1}, \quad (3.25)$$

ahol $E_{G,N+1}$ -t úgy választjuk meg, hogy az alapállapot energiája mindig nulla legyen. Ezzel a transzformációval valóban minden lépésben csak néhány új szabadsági fokot veszünk figyelembe, s az iterációs sor végén az eredeti probléma megoldását kapjuk.

Wilson a renormálási transzformáció hatását a rendszer energiaspektrumán vizsgálta. Az iteráció minden lépésében meghatározta a H_N -hez tartozó sajátenergiákat, s azt nézte, hogy lehet-e az energiaspektrum változásában valamilyen rendszert felismerni. Először is megállapította, hogy a $\tilde{J}=0$ és $\tilde{J}=-\infty$ esetnek megfelelő Hamilton-operátor fix-pont Hamilton-operátor, az ezekhez tartozó energiaspektrum analitikusan is megadható. Ezután egy véges antiferromágneses csatolást véve és numerikusan meghatározva a sajátértékeket, az adódott, hogy bármily gyenge is a csatolás, az iterációban elég messze elmenve, legalábbis a termodinamikai viselkedés szempontjából lényeges alacsony fekvő gerjesztési energiák rendszere a $\tilde{J}=-\infty$ -nek megfelelő esethez válik hasonlóvá. Ebből azt a következtetést vont le Wilson, hogy a Kondo-problémában az alacsony hőmérsékleti viselkedés mindig olyan, mint amilyent egy végtelen erős csatolással rendelkező szennyezés ad.

Ezen állítás kvantitatív vá tétele érdekében meghatározta a szuszceptibilitás és a fahő alacsony hőmérsékleti viselkedését is egy numerikus eljárással. A számolás lényeges eredménye az, hogy a zérus hőmérsékletű szuszceptibilitás véges, és nem tartalmaz a Curie-törvénynek megfelelő $1/T$ -vel arányos járulékot alacsony hőmérsékleten, a fahő pedig T -vel arányos. Mindez egyezésben van azzal a fizikai képpel, hogy a szennyező spin a végtelenül erős csatolás miatt az ellentétes spinű vezetési elektronokkal egy igen erősen kötött szinglett állapotot képez, s ezért zérus hőmérsékleten szinte el lehet feledkezni róla.

A Wilson-féle tárgyalás egyik fő érdeme annak demonstrálása, hogy a gyenge csatolású Kondo-probléma végtelen erős csatolásba megy át. A másik lényeges eredménye az, hogy a fizikai mennyiségek meghatározására olyan módszert ad, mely nemcsak alacsony vagy magas hőmérsékleten szolgáltat eredményt, hanem lehetővé teszi a két határeset közötti numerikus interpolációt is.

Megemlítjük, hogy a Kondo-problémára kidolgozott eljárást *Krishna-murthy*, *Wilson* és *Wilkins* (1975) alkalmazta a mágneses szennyezés probléma másik nevezetes modelljére, az Anderson-modellre is, s a mágneses—nem-mágneses átmenetnek megfelelő szuszceptibilitásgörbéket kaptak. Ezek jól illeszthetők a kísérleti eredményekhez is.

4. Multiplikatív renormálás

4.1. Renormálhatóság és a multiplikatív renormálási csoport

A bevezetésben már említettem, hogy a renormálási eljárás a térelméleti problémákban a perturbációs számításban megjelenő divergenciák eltávolítására szolgál, a multiplikatív renormálási csoport létezése pedig a renormálási eljárásban a normálási pont megválasztásában levő szabadság következménye. A multiplikatív renormálási

csoport azonban a Green-függvényre vonatkozó Dyson-egyenlet szimmetriatulajdon-ságaként is felfogható, s ezért nem térelméleti problémáknál is alkalmazható.

A térelméletből átvett Gell-Mann—Low-féle multiplikatív renormálási csoportot a szilárdtestfizikában két olyan problémára alkalmazták, melyekről az értekezésben szó van. *Abrikosov* és *Migdal* (1970), valamint *Fowler* és *Zawadowski* (1971) a Kondo-problémát vizsgálták, *Di Castro* (1972), valamint *Brézin*, *Le Guillou* és *Zinn-Justin* (1973a) pedig a kritikus jelenségeket írták le ezzel a módszerrel. A két probléma tárgyalása annyiban volt különböző, hogy a Kondo-problémánál az eredeti szilárdtestfizikai problémát vizsgálták, míg a kritikus jelenségeket térelméleti problémaként kezelték. Ebben a fejezetben a kritikus jelenségekkel kapcsolatos eredményeket ismertetjük, ezért röviden fel kell idézni, hogyan is lehet a kritikus jelenségeket térelméleti problémaként kezelni.

A 3.2. fejezetben láttuk, hogy a kritikus jelenségek leírásánál egy n -komponensű klasszikus spinekből álló rendszert vizsgáltunk, s az effektív kölcsönhatás a Ginzburg—Landau-elméletben szokásos alakban írható. Az $\vec{S}(x)$ spinsűrűséget ezentúl $\vec{\varphi}(x)$ -szel jelölve, egy, a térelméletben szokásos, úgynevezett φ^4 modell Lagrange-függvénye áll előttünk:

$$H = \int d^d x \left\{ \frac{r_0}{2} \varphi^2(x) + \frac{1}{2} [\nabla \varphi(x)]^2 + \frac{g_0}{4!} [\varphi^2(x)]^2 \right\}, \quad (4.1)$$

ahol

$$\varphi^2(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i^2(x) \quad \text{és} \quad [\nabla \varphi(x)]^2 = \sum_{i=1}^n (\nabla \varphi_i(x))^2. \quad (4.2)$$

A Hamilton-operátort rögtön általános d dimenzióban írtuk fel. A nem egész dimenziókra való értelmezést majd később vizsgáljuk meg.

A tulajdonképeni szilárdtestfizikai problémában az impulzus-térben egy természetes levágásunk van, $\Lambda \sim 1/a$, a rácsállandó inverze. Minden mennyiséget ezzel a véges levágással lehet és kellene számolni. A kritikus tartományban azonban, ahol a kritikus fluktuációk lényeges szerepet kezdenek játszani, s a klasszikus elmélet érvényét veszti, az impulzusok és a hőmérsékletet jellemző ξ koherencia-hossz inverze sokkal kisebb a levágásnál,

$$p_i, \xi^{-1} \ll \Lambda, \quad (4.3)$$

ezért nyugodtan áttérhetünk a $\Lambda \rightarrow \infty$ határesetre, amennyiben ez a határeset értelmes eredményeket szolgáltat. Ekkor viszont egy tisztán térelméleti problémával állunk szemben.

A φ^4 elméletben a $\Lambda \rightarrow \infty$ határesetben a nagy impulzusokból adódó ultraibolya divergenciák a vertexben csak $d \geq 4$ esetén jelennek meg, a reális háromdimenziós esetben tehát áttérhetnénk a térelméleti $\Lambda \rightarrow \infty$ esetre. A sajátenergiában megmarad ugyan még egy divergencia, de az eltüntethető a kritikus hőmérséklet alkalmas definiálásával. A $d < 4$ esetben azonban másfajta divergenciák jelennek meg, a kis impulzusértékekből adódó infravörös divergenciák. Ezek az infravörös divergenciák részben pontosan azok, melyek a kritikus fluktuációk eredményei, s ezeket akarjuk figyelembe venni, de olyan infravörös divergenciák is megjelennek, melyek nem a fizikai problémával, hanem a választott modellel kapcsolatosak. Ez utóbbiak elkerülésére csak egy mód van, a négydimenziós eset körül $\varepsilon = 4 - d$ hatványai szerinti sorban kell előállítani az eredményt, s nem szabad egy rögzített, négytől különböző dimenziószámnál végezni az integrálásokat. Mivel végülis négydimenziós integrálokat

kell meghatározunk, ahol az ultraibolya divergenciák megjelennek, a φ^4 elméletnek térelméletként való tárgyalásánál nem-fizikai divergenciák jelennek meg, melyektől meg kell szabadulnunk. A térelméleti renormálás pontosan ezt a feladatot oldja meg, úgy távolítja el a nem-fizikai divergenciákat, hogy végül a számunkra érdekes fizikai mennyiségekre, a kritikus exponensekre helyes kifejezéseket kapjunk.

A φ^4 elmélet térelméleti értelemben vett renormálhatósága azt jelenti, hogy a perturbációs számítás tetszőlegesen magas rendjében megjelenő minden ultraibolya divergencia beolvasztható a hőmérsékletet jellemző r_0 , a g_0 csatolási állandó és a hullámfüggvény alkalmas átdefiníálásába, s az átdefiníált mennyiségekkel dolgozva, a $\Lambda \rightarrow \infty$ esetben is minden járulék végesnek adódik. A (4.1) Hamilton-operátorban φ helyett mindenütt $Z_3^{1/2}\varphi$ -t írva, a renormált Hamilton-operátort a

$$H_R = \int d^d x \left\{ Z_3 \left[\frac{r}{2} \varphi^2(x) + \frac{1}{2} (\nabla\varphi(x))^2 \right] + \frac{g_R Z_1}{4!} (\varphi^2(x))^2 + \frac{Z_3}{2} (r_0 - r) \varphi^2(x) \right\} \quad (4.4)$$

alakban írjuk, ahol a renormált g_R csatolásnak g_0 -lal való kapcsolata

$$g_0 = g_R Z_1 Z_3^{-2}. \quad (4.5)$$

A hullámfüggvény renormálását megadó Z_3 szorzón kívül egy Z_1 szorzót is bevezetünk a kölcsönhatási tagban. Így érhetjük el, hogy a g_R renormált csatolás véges legyen.

A térelméletben részletesen kidolgozott, de igen hosszadalmas eljárással, mely *Bogoljubov és Sirkov* (1959), illetve *Bjorken és Drell* (1965) könyvében megtalálható, megmutatható, hogy r , Z_1 és Z_3 alkalmas megválasztásával a g_R renormált csatolás és a H_R -rel számolt Green-függvény és vertex véges lesz. Ehhez a kétpont- és négypont-függvényekre kell alkalmas normálási feltételt előírni. Az egyik szokásos eljárás az, hogy a $\Gamma^{(2)}(p)$ és $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ függvényekre, ahol

$$\Gamma^{(2)}(p) = [G(p)]^{-1} \quad (4.6)$$

a propagátor inverze, és $\Gamma^{(4)}$ a négypont-vertex, a következő feltételeket szabjuk ki:

$$\Gamma_R^{(4)}(0, 0, 0, 0, r, g_R) = g_R, \quad (4.7)$$

$$\Gamma_R^{(2)}(p = 0, r, g_R) = r, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p, r, g_R)|_{p^2 = \mu^2} = 1. \quad (4.9)$$

Ez utóbbi egyenletben μ szabadon választható paraméter, s a multiplikatív renormálási csoport léte éppen ebből a szabadságból adódik.

Egy másik szokásos eljárás az, hogy a fenti r helyett, mely lényegében a szuszceptibilitással lesz azonos, a koherenciahossz inverzét vezetjük be a

$$\Gamma_R^{(2)}(p, r, g_R)|_{p^2 = -r} = 0 \quad (4.10)$$

definícióval, a Z_1 -t és Z_3 -t rögzítő feltétel pedig

$$\Gamma_R^{(2)}(p, r = 0, g_R)|_{p^2 = \mu^2} = \mu^2, \quad (4.11)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4, r = 0, g_R)|_{p_i^2 = \mu^2} = g_R. \quad (4.12)$$

Ezekben a feltételekben is μ szabadon választható paraméter. Természetesen a fent leírt két választáson kívül sok egyéb eljárás lehetséges, melyek mind azonos eredményeket szolgáltatnak. A 7. fejezetben visszatérünk még erre a kérdésre, amikor az új renormálási eljárásnak a szokásos módszerekkel való kapcsolatát vizsgáljuk.

A renormálási eljárásról összefoglalóan azt mondhatjuk, hogy a Λ impulzuslevágással, r_0 és g_0 paraméterekkel jellemzett fizikai rendszer helyett r és g_R renormált paramétereket és $Z_3^{1/2}$ hullámfüggvény-renormálást vezethetünk be úgy, hogy most már impulzuslevágás nélkül számolva, a renormált rendszer $\Gamma_R^{(N)}$ függvényei végesek legyenek, és a divergenciákat tartalmazó $\Gamma^{(N)}$ csupasz függvényekkel való kapcsolatot pedig

$$\Gamma^{(N)}(p_1, \dots, p_N, r_0, g_0, \Lambda) = Z_3^{-N/2} \Gamma_R^{(N)}(p_1, \dots, p_N, r, g_R, \mu), \quad (4.13)$$

adja meg. A jobb oldalon szereplő μ a normálási pont megválasztására utal. A renormált paraméterek, r és g_R is természetesen függenek μ megválasztásától.

A normálást egyszer μ_1 -nél, egyszer pedig μ_2 -nél követelve meg, (4.13)-ból következően

$$\begin{aligned} Z_3^{-N/2}(\mu_1, \Lambda) \Gamma_R^{(N)}(p_1, \dots, p_N, r(\mu_1), g_R(\mu_1), \mu_1) = \\ = Z_3^{-N/2}(\mu_2, \Lambda) \Gamma_R^{(N)}(p_1, \dots, p_N, r(\mu_2), g_R(\mu_2), \mu_2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ezek az egyenletek azt fejezik ki, hogy a normálási pontot skálázva, $\Gamma_R^{(N)}$ az impulzusváltozóktól független számszorosába megy át, a $g_R(\mu)$ renormált csatolás változását megadó egyenlet pedig

$$g_R(\mu_1) Z_1(\mu_1) Z_3^{-2}(\mu_1) = g_R(\mu_2) Z_1(\mu_2) Z_3^{-1}(\mu_2). \quad (4.15)$$

A normálási pont skálázásának megfelelő véges transzformációk csoportot alkotnak, s a multiplikatív renormálási csoport nevet viselik.

4.2. A kritikus jelenségek leírása a renormálási csoport Lie-egyenletei segítségével

Di Castro és *Jona-Lasinio* (1969) javasolta először a térelméleti renormálási csoport alkalmazását a kritikus jelenségek vizsgálatára. Ekkor, *Wilson* munkássága előtt, a cél az volt, hogy a renormálási csoport skálaegyenletei alapján a kritikus jelenségek skálatörvényeit, a kritikus exponensek közötti kapcsolatot le lehessen vezetni. Bizonyos kezdeti eredmények után *Di Castro* (1972) fejlesztette tovább az eljárást, s megmutatta, hogy a *Wilson*—*Fisher*-féle (*Wilson* és *Fisher* 1972) ε -sorfejtés eredményei a térelméleti multiplikatív renormálás segítségével is megkaphatók. Ebben a fejezetben röviden ismertetem a módszert, hogy később jobban láthassuk az új eljárással való kapcsolatot.

Di Castro az előző fejezetben leírt második normálási feltételt választotta, vagyis r -t a (4.10) feltételből határozta meg, Z_1 -et és Z_3 -at pedig (4.11) és (4.12)-ből. A továbbiakban r helyett κ^2 jelölést használunk, hogy megkülönböztessük a (4.8) által definiált r -től. κ jelentése ekkor a koherenciahossz inverze.

$$\Gamma_R^{(2)}(p, \kappa^2, g_R)|_{p^2 = -\kappa^2} = 0. \quad (4.16)$$

A normálás ilyen megválasztása szokásosabb, mint a (4.7)—(4.9)-ben megadott választás, ha a renormálási csoport Lie-egyenleteit használják, amint azt ebben az értekezésben is tenni fogom. A (4.7)—(4.9) egyenletekben definiált normálást inkább

a Callan—Symanzik-egyenlettel dolgozva célszerű használni, s ezt a 4.3 fejezetben tárgyaljuk. Az új módszerrel való későbbi összevetés miatt is részletesebben vizsgáljuk a Di Castro-féle eljárást. A további számolásban célszerű mindenütt dimenziótlan mennyiségekkel dolgoznunk. A dimenziótlan Green-függvény

$$d(p) = \frac{G(p)}{G^{(0)}(p)} = \frac{\Gamma^{(2)^{-1}}(p)}{G^{(0)}(p)}, \quad (4.17)$$

a dimenziótlan vertex pedig

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_i) = \frac{\Gamma^{(4)}(p_i)}{g_0}. \quad (4.18)$$

A renormált mennyiségek dimenziótlanított alakját is hasonló kifejezések definiálják.

A csatolás dimenziótlanításánál azt kell figyelembe venni, hogy egyszerű dimenzióanalízis szerint a csatolás dimenziója $L^{-\varepsilon}$, ahol L a hosszdimenzió. A csupasz, fizikai elméletben a jellegzetes hosszdimenzió a Λ impulzuslevágás inverze, ezért a dimenziótlan u_0 definíciója

$$g_0 = u_0 \Lambda^\varepsilon, \quad (4.19)$$

míg a renormált elméletben impulzuslevágás nem lévén, a μ normálási impulzus a karakterisztikus mennyiség, s ezért kézenfekvő a következő dimenziótlanítás:

$$g_R = u \mu^\varepsilon. \quad (4.20)$$

A (4.11) és (4.12) normálási feltételt a dimenziótlan mennyiségekre a következőképpen írhatjuk:

$$d_R(p, \kappa^2 = 0, g_R)|_{p^2 = \mu^2} = 1, \quad (4.12)$$

$$\tilde{\Gamma}_R^{(4)}(p_i, \kappa^2 = 0, g_R)|_{p_i^2 = \mu^2} = 1. \quad (4.22)$$

A (4.16), (4.21) és (4.22) normálási feltétellel definiált renormált függvényekre a (4.14) skálaegyenletek a

$$d_R\left(\frac{p^2}{\mu_2^2}, \frac{\kappa^2}{\mu_2^2}, u(\mu_2)\right) = Z_3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}, u(\mu_1)\right) d_R\left(\frac{p^2}{\mu_1^2}, \frac{\kappa^2}{\mu_1^2}, u(\mu_1)\right), \quad (4.23)$$

$$\tilde{\Gamma}_R^{(4)}\left(\frac{p_i^2}{\mu_2^2}, \frac{\kappa^2}{\mu_2^2}, u(\mu_2)\right) = Z_1^{-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}, u(\mu_1)\right) \tilde{\Gamma}_R^{(4)}\left(\frac{p_i^2}{\mu_1^2}, \frac{\kappa^2}{\mu_1^2}, u(\mu_1)\right) \quad (4.24)$$

alakban írhatók, ahol

$$Z_3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}, u(\mu_1)\right) = \frac{Z_3\left(\frac{\mu_1}{\Lambda}, u(\mu_1)\right)}{Z_3\left(\frac{\mu_2}{\Lambda}, u(\mu_2)\right)}, \quad (4.25)$$

$$Z_1\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}, u(\mu_1)\right) = \frac{Z_1\left(\frac{\mu_1}{\Lambda}, u(\mu_1)\right)}{Z_1\left(\frac{\mu_2}{\Lambda}, u(\mu_2)\right)}, \quad (4.26)$$

a renormált csatolás skálaegyenlete pedig

$$u(\mu_2) = u(\mu_1) \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{-\varepsilon} Z_1\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}, u(\mu_1)\right) Z_3^{-2}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}, u(\mu_1)\right). \quad (4.27)$$

Ezekből a skálaegyenletekből különböző módokon kaphatunk azonos tartalmú, de más-más alakú differenciálegyenletet. Az egyik lehetőség, s az értekezés további fejezeteiben ezt az eljárást fogom alkalmazni, hogy (4.23) és (4.24) logaritmusát ledifferenciáljuk p^2/μ_1^2 vagy κ^2/μ_1^2 szerint. $A(p^2/\mu_1^2, \kappa^2/\mu_1^2, u(\mu_1))$ -gyel jelölve d_R -t vagy $\tilde{F}_R^{(4)}$ -t és bevezetve az $x=p^2/\mu_1^2$, $y=\kappa^2/\mu_1^2$ és $s=\mu_2^2/\mu_1^2$ változókat,

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln A(x, y, u) = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln A\left(\xi, \frac{y}{x}, u_R(x)\right) \Big|_{\xi=1}, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln A(x, y, u) = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial \eta} \ln A\left(\frac{x}{y}, \eta, u_R(y)\right) \Big|_{\eta=1}, \quad (4.29)$$

ahol

$$u_R(s, u) = us^{-\varepsilon/2} \cdot Z_1(s, u) \cdot Z_3^{-2}(s, u). \quad (4.30)$$

Ezek az egyenletek a multiplikatív renormálási csoport Lie-egyenletei. Föltéve, hogy $u_R(s, u)$ ismert és kicsi, a (4.28) és (4.29) egyenletek jobb oldalán perturbációs számítás végezve, a d_R és $\tilde{F}_R^{(4)}$ függvények impulzus- és κ^2 -függése meghatározható. A renormált $u_R(s, u)$ csatolás meghatározásához is egy Lie-egyenletet kell megoldanunk. $u_R(s, u)$ (4.30)-beli definíciójából és (4.23)–(4.27)-ből könnyen belátható ugyanis, hogy

$$u_R\left(\frac{\mu^2}{\mu_1^2}, u(\mu_1)\right) = u_R\left(\frac{\mu^2}{\mu_2^2}, u(\mu_2)\right), \quad (4.31)$$

vagyis u_R invariáns a skálatranszformációval szemben. Ezért szokásos az invariáns csatolás, vagy — térelméleti analógia alapján — az invariáns töltés elnevezés. Az u_R -re vonatkozó Lie-egyenlet így írható:

$$\frac{d}{ds} u_R(s, u) = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \xi} u_R(\xi, u_R(s)) \Big|_{\xi=1}. \quad (4.32)$$

Mint már említettük, ez a multiplikatív renormálási eljárás akkor alkalmas a perturbációs számítás megjavítására, ha u_R kis paraméter. Ekkor a Lie-egyenletek jobb oldala a perturbációs számítás segítségével meghatározható, s a differenciálegyenletek megoldása után egy végtelen rendig felösszegzett kifejezést nyerhetünk. A kritikus jelenségeknél három dimenzióban, a Kondo-problémánál és a később vizsgálandó fermion-gáz rendszerénél az invariáns csatolás nem kis paraméter és ezért ezekre az esetekre ezzel a módszerrel kvantitatív eredményeket nem tudunk kapni. Ennek ellenére, bizonyos kvalitatív következtetések levonhatók. *Wilson* és *Fisher* (1972) igen lényeges felismerése volt, hogy a kritikus jelenségeket négy dimenzióban vagy négy dimenzió körül $\varepsilon=4-d$ szerinti sorfejtésben vizsgálva, az invariáns csatolás kicsi, s így a renormálási csoport segítségével a kritikus exponensek számértékei is meghatározhatók.

Először azt látjuk be, hogy a skálázás hatására az invariáns csatolás valóban csökken. Ehhez először u_R -t kell meghatározunk perturbációs számolással u hatványai

szerint. Ez Z_1 és Z_3 perturbatív alakja ismeretében vihető végbe, ehhez viszont d és $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ perturbatív alakja szükséges. Általános p és κ^2 esetén az analitikus alak meghatározása elég nehéz, így most csak a $\kappa^2=0$ esettel foglalkozunk, de hasonlóan vizsgálható a $\kappa^2 \neq 0$ eset is. g_0 -ban harmadrendig számolva, a következő gráfokat kell figyelembe vennünk a Green-függvényben:

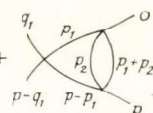
$$G = \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} \quad (4.33)$$

A tömegrenormálás miatt a Hartree-hurok nem ad járulékot. Analitikusan

$$d(p^2) = 1 + \frac{n+2}{144} g_0^2 K_d^2 p^{-2\epsilon} \left[\left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right) \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} - \frac{5}{2} + \frac{\epsilon}{2} \ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} + \dots \right] + \quad (4.34)$$

$$+ \frac{(n+2)(n+8)}{12^3} g_0^3 K_d^3 p^{-3\epsilon} \left[\ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} - 5 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + \frac{15}{2} + \dots \right] + \dots,$$

ahol $K_d = 2^{-(d-1)} \pi^{-d/2} \left[\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \right]^{-1}$ a d dimenziós térben végzett integrálásból adódó fázistér-faktor, az integrálást pedig egy véges Λ -ig végeztük. Az egyes gráfok járulékanak analitikus kifejezése és az integrálok értéke *Forgács, Solyom és Zawadowski* (1976) munkájában található meg. A vertexet is $\kappa^2=0$ -nál és az impulzusok olyan speciális választásánál határoztuk meg, hogy csak egy impulzusváltozó maradjon. A figyelembe veendő gráfok harmadrendig a következők:

$$\Gamma = \text{---} \times \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} \quad (4.35)$$


Csak a negyedik gráfnál jelent megkötést, hogy egy változóra korlátozódunk, a többinél úgyis csak egy változó marad. A negyedik gráfnál az impulzusok egy lehetséges választását az ábra mutatja. Az analitikus kifejezés meghatározásához ez a választás jól használható, de elvileg bármilyen más impulzusváltozó esetén, többváltozós vertexnél is véghezvihető a renormálási eljárás. A szabad Green-függvény struktúrájából adódóan a vonalakat irányítás nélkül rajzolhatjuk, az impulzusokban előjelcserét mindig megengedhetünk. Az analitikus kifejezés:

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p^2) = 1 + \frac{n+8}{12} g_0 K_d p^{-\epsilon} \left\{ \frac{2}{\epsilon} \left[\left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{\epsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\} + \quad (4.36)$$

$$+ \frac{n^2 + 6n + 20}{36} g_0^2 K_d^2 p^{-2\epsilon} \frac{1}{4} \left\{ \frac{2}{\epsilon} \left[\left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{\epsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\}^2 +$$

$$+ \frac{5n + 22}{9} g_0^3 K_d^3 p^{-2\epsilon} \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} - 2 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + 2 + \dots \right\} + \dots$$

Elvégezve most a hullámfüggvény és a csatolás renormálását a fent leírt módon, és normálási feltételként (4.21)–(4.22)-t követelve meg, a renormált függvények és az invariáns töltés perturbatív alakja:

$$d_R \left(\frac{p^2}{\mu^2}, u \right) = 1 + \frac{n+2}{144} u^2 K_d^2 \left[\left(1 + \frac{9}{4} \varepsilon \right) \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \dots \right] + \\ + \frac{(n+2)(n+8)}{12^3} u^3 K_d^3 \left[\ln^2 \frac{p^2}{\mu^2} - 3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \dots \right] + \dots, \quad (4.37)$$

$$\tilde{F}_R \left(\frac{p^2}{\mu^2}, u \right) = 1 + \frac{n+8}{12} u K_d \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \left[1 - \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon/2} \right] + \dots \right\} + \\ + \frac{(n+8)^2}{144} u^2 K_d^2 \ln^2 \frac{p^2}{\mu^2} - \frac{5n+22}{36} u^2 K_d^2 \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \dots, \quad (4.38)$$

$$u_R \left(\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}, u \right) = u \left(\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \right)^{-\varepsilon/2} \left\{ 1 + \frac{n+8}{12} u K_d \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 + \varepsilon \right) \left[1 - \left(\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \right)^{-\varepsilon/2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(n+8)^2}{144} u^2 K_d^2 \ln^2 \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} - \frac{9n+42}{72} u^2 K_d^2 \ln \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} + \dots \right\}. \quad (4.39)$$

Amint azt vártuk, a Λ impulzuslevágás nem jelenik meg a renormált függvényekben, s a renormált mennyiségek ezért a $\Lambda \rightarrow \infty$ határesetben is végesek maradnak.

Felírva a Lie-egyenletet u_R -re és a jobb oldalon ezt a perturbatív alakot használva,

$$\frac{du_R(s, u)}{ds} = \frac{u_R(s, u)}{s} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n+8}{12} u_R(s, u) K_d \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \dots \right) - \frac{9n+42}{72} u_R^2(s, u) K_d^2 + \dots \right\}. \quad (4.40)$$

Ennek az egyenletnek a megoldása kis s -re

$$u_R(s) = u_R^* + A s^{\omega/2} + \dots, \quad (4.41)$$

ahol

$$K_d u_R^* = \frac{6}{n+8} \varepsilon \left[1 + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} + \frac{9n+42}{(n+8)^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (4.42)$$

és

$$\omega = \varepsilon - \frac{9n+42}{(n+8)^2} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (4.43)$$

Kis s -nél, és a kritikus jelenségek leírásánál ez lesz a lényeges, $u_R(s)$ valóban kis értékhez, ε -nal arányos számhoz tart. Jogos tehát d_R -t és $\tilde{F}_R^{(4)}$ -t a Lie-egyenletből u_R -szerinti perturbációs sorral meghatározni.

A d függvényre vonatkozó Lie-egyenlet:

$$\frac{\partial \ln d_R(x, u)}{\partial x} = \frac{1}{x} \left\{ \frac{n+2}{144} u_R^2(x, u) K_d^2 \left(1 + \frac{9}{4} \varepsilon \right) - 3 \frac{(n+2)(n+8)}{12^3} u_R^3(x, u) K_d^3 + \dots \right\}. \quad (4.44)$$

Ennek az egyenletnek a megoldása (4.41) felhasználásával

$$d_R(x) \sim x^{\eta/2}(1 + Bx^{\omega/2} + \dots), \quad (4.45)$$

ahol

$$\eta = \frac{n+2}{2(n+8)^2} \varepsilon^2 \left[1 + \varepsilon \left(\frac{6(3n+14)}{(n+8)^2} - \frac{1}{4} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (4.46)$$

Visszatérve x -ről a p impulzusváltozóra $x = p^2/\mu^2$ segítségével, és felhasználva, hogy $G^{(0)} \sim p^{-2}$, a teljes Green-függvény impulzusfüggése

$$G(p) \sim \frac{1}{p^{2-\eta}} (1 + B'p^\omega + \dots). \quad (4.47)$$

A fenti eljárással meghatároztuk az η kritikus exponenst, mely a korrelációs függvény térbeli változásában tükrözi a kritikus fluktuációk hatását.

Teljesen hasonló módon a κ^2 -függés vizsgálatával a szuszceptibilitás és a koherenciahossz hőmérsékletfüggésére jellemző γ és ν kritikus exponenseket lehet meghatározni. Ezeknek a számolási részleteibe itt nem megyek be, mivel a módszer rövid ismertetése volt a célom.

4.3. A kritikus jelenségek leírása a Callan—Symanzik-egyenlettel

A kritikus jelenségek vizsgálatában a térelméleti multiplikatív renormálási csoport alkalmazásának egy másik szokásos eljárása az úgynevezett Callan—Symanzik-egyenletek használata. A Callan—Symanzik-egyenlet (Callan 1970, Symanzik 1970) is a kvantumelektrodinamika divergencia-problémáinak vizsgálata révén került kifejlesztésre, s tulajdonképpen a Gell-Mann és Low-féle multiplikatív renormálási csoportra vonatkozó egyenleteknek egy új megformulázása. Előnye az, hogy közvetlenül a renormált perturbációs számításra alapszik, s így az ε szerinti sorfejtésben könnyebben lehet a magasabb rendű korrekciókat meghatározni.

A Callan—Symanzik-egyenletnek a kritikus jelenségekre történő alkalmazása Brézin, Le Guillou és Zinn-Justin (1973a, 1974a) nevéhez fűződik, s azóta ez a saclay-i iskola igen sok eredményt ért el a legkülönbözőbb problémáknak ezekkel az egyenletekkel történő megoldásával. Összefoglalóként Brézin, Le Guillou és Zinn-Justin (1976) munkájára hivatkozom. A módszer lényegét röviden ismertetem.

Brézin, Le Guillou és Zinn-Justin a vertex és a Green-függvény normálását a (4.7)—(4.9) egyenleteknek megfelelően a $p^2=0$ impulzusnál választotta meg. Így az egyetlen impulzusdimenziójú mennyiség a problémában a tömeg maradt, s a csatolás dimenziótlanítását azzal végezték el. r helyett a térelméletben szokásos m^2 jelölést használva, a

$$g_R = u \cdot m^\varepsilon \quad (4.48)$$

definícióval vezették be a dimenziótlan u csatolást, a normálási feltételek pedig

$$\Gamma_R^{(2)}(p, m, u)|_{p^2=0} = m^2, \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p, m, u)|_{p^2=0} = 1, \quad (4.50)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(0, 0, 0, 0, m, u) = g_R. \quad (4.51)$$

A Callan—Symanzik-egyenlet származtatásánál a renormálhatóságot kifejező (4.14) egyenletből indulunk ki, melyet az $r_0 = m_0^2$, $r = m^2$ jelölésnek megfelelően így írunk

$$Z_3^{-N/2} \Gamma_R^{(N)}(p_1, \dots, p_N, m, u) = \Gamma^{(N)}(p_1, \dots, p_N, m_0, g_0, \Lambda). \quad (4.52)$$

Differenciáljuk végig ezt az egyenletet m szerint, majd szorozzuk be m -mel, közben g_0 -t konstansnak tartva. Z_3 és u is függ m -től, így

$$\left[m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{N}{2} \gamma_3(u) \right] \Gamma_R^{(N)}(p_i, m, u) = Z_3^{N/2}(u) m \frac{\partial}{\partial m} \Gamma^{(N)}(p_i, m_0, g_0, \Lambda), \quad (4.53)$$

ahol

$$\beta(u) = m \left. \frac{\partial u}{\partial m} \right|_{g_0}, \quad (4.54)$$

$$\gamma_3(u) = m \left. \frac{\partial \ln Z_3(u)}{\partial m} \right|_{g_0}. \quad (4.55)$$

Ez az egyenlet a Callan—Symanzik-egyenlet. Jelen formájában még semmilyen lényeges információt nem hordoz a rendszerről, hiszen (4.52) egy triviálisnak tűnő transzformációból jött ki. Az egyenlet azáltal válik hasznossá, hogy kimutatható, hogy u -ban és ε -ban kettős sorfejtést végezve, a jobb oldal tagról tagra elhagyható a bal oldal mellett. Így a vizsgálandó egyenlet

$$\left[m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} - \frac{N}{2} \gamma_3(u) \right] \Gamma_R^{(N)}(p_i, m, u) = 0. \quad (4.56)$$

$\beta(u)$ és $\gamma_3(u)$ pedig átírható annak felhasználásával, hogy konstans g_0 -nál kell a deriváltat képezni. Figyelembe véve (4.5)-t,

$$\beta(u) = -\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial u} \ln u Z_1(u) Z_3^{-2}(u) \right]^{-1}, \quad (4.57)$$

$$\gamma_3(u) = \beta(u) \frac{\partial \ln Z_3(u)}{\partial u}. \quad (4.58)$$

A számolás részleteit elhagyva, itt csak a végeredményt írom fel:

$$\beta(u) = -u \left[\varepsilon - \frac{n+8}{6} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) u K_d + \frac{3n+14}{12} (u K_d)^2 \right] + \mathcal{O}(u^4), \quad (4.59)$$

$$\gamma_3(u) = -\frac{\varepsilon(n+2)}{9} (u K_d)^2 \left[-\frac{1}{8\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon \right) - \frac{1}{8} I + (u K_d) \frac{n+8}{6} \left(\frac{1}{8\varepsilon} + \frac{1}{8\varepsilon} I \right) \right] + \dots, \quad (4.60)$$

I pedig egy olyan integrál, melynek számértéke a kritikus exponensekben nem jelenik meg,

$$I = \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{1-x(1-x)} + \frac{\ln [x(1-x)]}{[1-x(1-x)]^2} \right\}. \quad (4.61)$$

Vizsgáljuk most $\Gamma_R^{(2)}$ -t, a $G(p)$ propagátor inverzét. Egyszerű dimenzionális megfontolásokból következik, hogy

$$\Gamma_R^{(2)}(\lambda p, m, u) = \lambda^2 \Gamma_R^{(2)}\left(p, \frac{m}{\lambda}, u\right). \quad (4.62)$$

Ugyanakkor a Callan—Symanzik-egyenlet megoldásából következik, hogy ha $\beta(u)$ -nak nullahelye van egy u^* értéknél, akkor

$$\Gamma_R^{(2)}(p, m, u^*) \sim m^{\gamma_3(u^*)} F(p). \quad (4.63)$$

Összevetve (4.62)-t és (4.63)-t,

$$\Gamma_R^{(2)}(\lambda p, m, u^*) \sim \lambda^{2-\gamma_3(u^*)} m^{\gamma_3(u^*)} F(p), \quad (4.64)$$

és ebből következően

$$\Gamma_R^{(2)}(p, m, u^*) \sim p^{2-\gamma_3(u^*)} m^{\gamma_3(u^*)}. \quad (4.65)$$

Az η kritikus exponenst úgy definiáltuk, hogy

$$\Gamma_R^{(2)}(p) \sim p^{2-\eta}, \quad (4.66)$$

amiből

$$\eta = \gamma_3(u^*) \quad (4.67)$$

u^* -ot könnyen meghatározhatjuk (4.59)-ből a $\beta(u^*)=0$ feltételből,

$$K_d u^* = \frac{6}{n+8} \varepsilon \left[1 + \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{3(3n+14)}{(n+8)^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (4.68)$$

Ezt az értéket (4.60)-ba behelyettesítve η -ra ugyanazt a kifejezést kapjuk, mint (4.46)-ban.

Fennmarad még az a kérdés, hogy miért éppen egy rögzített u^* -nál kapjuk vissza jól a statisztikus fizika szempontjából érdekes kritikus exponenst, mi tünteti ki a β függvény nulla helyét. *Brézin, Le Guillou és Zinn-Justin* (1973a) megmutatták, hogy ennek megértéséhez vissza kell térni a véges levágást tartalmazó statisztikus fizikai problémára. A kritikus pont közelében $m/\Lambda \ll 1$, s a térelméleti probléma csak akkor felel meg a statisztikus fizikai problémának, ha g_0 -tól függetlenül a renormált csatolási állandót mindig u^* -nak választjuk.

Hasonló eljárással a további kritikus exponensek és a skálatörvényekhez adódó korrekciók is meghatározhatók. Ezzel kapcsolatban érdemes egy dologra felhívni a figyelmet. A kritikus pontban $m=0$, ezért (4.48) értelmét veszti, s a (4.49)—(4.51)-ben megadott normálási feltételek sem használhatók. Az $m=0$ esetben nem lehet a divergenciákat eltávolítani, ha $p=0$ -nál normálunk. Vagyis a kritikus pontban más normálási feltételt kell választanunk, mint amely T_c -től különböző hőmérsékleten alkalmazható. Látni fogjuk, hogy az új eljárás egyik előnye éppen az lesz, hogy ugyanazokat a feltételi egyenleteket használjuk, akár a kritikus pontban vagyunk, akár attól távolabb.

5. Az új renormálási eljárás

5.1. Az új eljárás leírása

A harmadik és negyedik fejezetben a renormálási csoport transzformációinak két lényegesen különböző megfogalmazását láttuk. A harmadik fejezetben leírt Wilson-féle megfogalmazás rendkívül általános, s a probléma természetétől függően a renormálási transzformáció konkrét alakja igen különböző lehet. A lényeg azonban minden esetben az, hogy a sok szabadsági fokú rendszer szabadsági fokait lépésről lépésre vesszük figyelembe. Egy statisztikus fizikai problémánál, ahol a lehetséges impulzusállapotok mind egy Λ levágási impulzusnál kisebb impulzussal rendelkeznek, a szabadsági fokok lépésről lépésre történő figyelembevétele úgy valósítható meg például, hogy először a Λ levágás közelében levő állapotok hatását vesszük figyelembe, s a feladatot visszavezetjük egy kisebb levágási impulzussal rendelkező problémára. A levágást addig csökkentjük, míg egy perturbációszámítással megoldható problémára nem jutunk. A skálaparaméter tehát a fizikai levágás. Az eljárás szokásos matematikai megfogalmazásában a módszer hátrányaként jelentkezik az, hogy a renormálási transzformáció során nemcsak kétrészecske-szórási folyamatok maradnak, hanem szükségszerűen megjelennek a sokrészecskes ütközések is. A Wilson-féle renormálási csoport módszer a térelméletben és a szilárdtestfizikában egyaránt használható, eddig azonban elsősorban a szilárdtestfizikai problémákban, ott is leginkább a kritikus jelenségek és a Kondo-probléma megoldásában nyújtott lényeges segítséget.

A negyedik fejezetben ismertetett multiplikatív renormálási csoportot a térelméleti problémák vizsgálatánál találták ki, s a szilárdtestfizikai problémáknál akkor használható, ha valamilyen módon azok térelméleti problémaként kezelhetők. A skálázást itt egy fiktív normálási impulzus változtatásával érjük el, így nem tudunk fizikai képet rendelni a renormálási transzformáció mögé. Matematikailag viszont könnyen kezelhető ez a módszer, egyszerű differenciálegyenleteket kell megoldanunk, s további igen lényeges előnye, hogy a több részecskes szórási folyamatokat nem kell effektív új kölcsönhatásként bevezetnünk. Előfordul néhány esetben, hogy a fizikai esetnek megfelelő csatolásokhoz képest újabbakat is be kell vezetnünk, de ezek nem több részecskes folyamatoknak, hanem valamilyen másfajta kétrészecskes kölcsönhatásnak felelnek meg.

Az értekezésben a továbbiakban egy olyan módszert írok le (*Sólyom* 1974), mely egyesíti a kétféle eljárás előnyeit. A Wilson-féle leírásból átvesszük azt, hogy egy fizikai mennyiséget, a levágást használjuk skálaparaméternek. A skálázás matematikai megfogalmazásában viszont a térelméleti multiplikatív renormáláshoz hasonlít, s az ott szokásos Lie-egyenleteket fogom használni.

Ezt nyilvánvalóan nem lehet tetszőleges fizikai probléma esetén megtenni. Látni fogjuk azonban, hogy a szilárdtestfizikában azokra a problémákra, melyekre a többi módszer alkalmazható volt, ez az új módszer is alkalmazható, s olyan problémákat is vizsgálni fogok, melyeket más renormálási módszerrel nem tanulmányoztak. Ki fog derülni, hogy a szilárdtestfizikában jól ismert úgynevezett logaritmusos problémák azok, melyek természetes jelöltek arra, hogy ezt az új eljárást rájuk alkalmazzuk.

Ez az új módszer, minthogy az eddig ismertetett két módszerrel kapcsolatba hozható, egyben a Wilson-féle renormálás és a térelméleti multiplikatív renormálás kapcsolatáról is felvilágosítást ad, ez a kapcsolat ugyanis nem tisztázott teljesen az irodalomban.

A módszer alapfeltevése az, hogy a levágásnál sokkal kisebb impulzusok, illetve energiák tartományában a véges levágással számolt fizikai Green-függvényekre és vertexekre is érvényes lehet a multiplikatív renormálás, éspedig úgy, hogy a levágást választjuk skálaparaméternek. Hangsúlyozni kell, hogy ez mindig feltevés, általánosságban nem bizonyítjuk, csak a perturbációsszámítás néhány alacsony rendjében, s innen általánosítunk. Minden egyes problémánál tehát először a perturbációs sor első néhány tagján próbáljuk ki a feltevés jogosságát, s ha ott beválik, akkor próbálkozhatunk meg a renormálási csoport segítségével egy végtelen felösszegzést végrehajtani.

A módszert matematikai formába öntendő, tekintsünk egy kölcsönható rendszert, melyet egy g csatolási állandó és egy Λ impulzuslevágás, illetve ennek megfelelő ω_0 energialevágás jellemez. Az egyrészecks Green-függvény legyen G , a teljes vertex pedig Γ . Most is célszerű dimenziótlan mennyiségeket bevezetnünk, s (4.17) és (4.18)-hoz hasonlóan a dimenziótlan Green-függvényt

$$d = G/G^{(0)}, \quad (5.1)$$

a dimenziótlan vertexet pedig

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma/g \quad (5.2)$$

definiálja. Ezek a mennyiségek csak a dimenziótlan p/Λ -tól, illetve ω/ω_0 -tól függhetnek.

A skálázási feltevés azt jelenti, hogy az eredeti Λ , illetve ω_0 levágással és g csatolással számolva, vagy egy változtatott Λ' , illetve ω'_0 levágással ($\Lambda/\Lambda' = \omega_0/\omega'_0$) és egy módosított g' csatolással számolva, az eredeti és az új paraméterekkel számolt Green-függvény és vertex az alábbi egyenleteknek tesz eleget:

$$d\left(\frac{p}{\Lambda'}, \frac{\omega}{\omega'_0}, g'\right) = z_d\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}, g\right) d\left(\frac{p}{\Lambda}, \frac{\omega}{\omega_0}, g\right), \quad (5.3)$$

$$\tilde{\Gamma}\left(\frac{p_i}{\Lambda'}, \frac{\omega_i}{\omega'_0}, g'\right) = z_r^{-1}\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}, g\right) \tilde{\Gamma}\left(\frac{p_i}{\Lambda}, \frac{\omega_i}{\omega_0}, g\right), \quad (5.4)$$

$$g' = g z_r\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}, g\right) z_d^{-2}\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}, g\right). \quad (5.5)$$

A lényeges és nem triviális feltevés az, hogy ezek az egyenletek olyan z_d és z_r -val kielégíthetők, melyek nem függhetnek az impulzus- és energiaváltozóktól és valóságosak, s így az új csatolás is valós lesz.

A fenti egyenletek felhasználásával könnyű belátni, hogy z -k csoporttulajdonságnak tesznek eleget.

$$z_d\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda}, g\right) = z_d\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}, g\right) z_d\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'}, g'\right), \quad (5.6)$$

$$z_r\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda}, g\right) = z_r\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}, g\right) z_r\left(\frac{\Lambda''}{\Lambda'}, g'\right), \quad (5.7)$$

ahol g' -t (5.5) definiálja, s az is könnyen következik, hogy a

$$g_R\left(\frac{p}{\Lambda}, g\right) = g z_r\left(\frac{p}{\Lambda}, g\right) z_d^{-2}\left(\frac{p}{\Lambda}, g\right) \quad (5.8)$$

függvény invariáns marad ennél a skálatranszformációnál, vagyis

$$g_R \left(\frac{p}{A}, g \right) = g_R \left(\frac{p}{A'}, g' \right). \quad (5.9)$$

A szokásos térelméleti multiplikatív renormálás (4.23), (4.24) és (4.27) egyenleteivel analóg egyenleteket kaptunk így, azzal a különbséggel, hogy a fizikai értelemmel nem bíró μ helyett a levágási paraméter jelent meg skálaparaméterként. Az ottani eljárásához hasonlóan itt is Lie-egyenletek formájában írhatjuk fel ezeket az egyenleteket

$$\frac{d g_R(s, g)}{ds} = \frac{1}{s} \frac{d g_R(\xi, g_R(s, g))}{d\xi} \Big|_{\xi=1}, \quad s = \frac{A'}{A} \quad (5.10)$$

és

$$\frac{\partial \ln A(x, g)}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial \ln A(\xi, g_R(x, g))}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}, \quad A = d, \tilde{\Gamma} \quad (5.11)$$

ahol x bármelyik dimenziótlan változó, s a Lie-egyenletben a g_R jelölést használjuk g' helyett.

Ezeknek az egyenleteknek, melyek a további számolásokban mindenütt alapvetőek lesznek, igen egyszerű képet tulajdoníthatunk. Tegyük fel, hogy meg akarunk határozni egy A mennyiséget egy x helyen, x mindig a levágáshoz viszonyított relatív érték. A problémát a levágás skálázásával áttranszformáljuk egy olyan problémává, ahol az új levágás a vizsgálandó értékhez került, vagyis a levágásnál kell meghatározni a függvényt. A vizsgálandó logaritmusos problémákban a levágás közelében a logaritmusok kis járulékokat adnak, ezért azt várhatjuk, hogy az átskálázott problémában a perturbációs számítás alkalmazható. Ugyanakkor viszont a skálázás következtében a csatolást is megváltoztattuk, mégpedig éppen $g_R(x)$ -re. A perturbációs számítás jól konvergál, amennyiben $g_R(x)$ kicsi. Látni fogjuk, hogy ez nem mindig teljesül, s ez korlátozza a módszer alkalmazhatóságát olyan problémáknál, melyekre egyébként az (5.3)–(5.5) skálaegyenletek igazak.

Előrebocsátjuk, a konkrét számolásoknál ezt majd még jobban megfigyelhetjük, hogy logaritmusos problémáknál a vezető logaritmusos, az utána következő, stb. logaritmusos járulékok igen konzekvensen és egyszerűen vehetők figyelembe ezzel a renormálási módszerrel, s így a jobb oldal perturbatív meghatározásából adódó közelítés hibájáról is van információnk.

Tegyük fel, hogy a Green-függvényt perturbációs sorban meghatározva, a következő logaritmusos előállítást kapjuk:

$$\begin{aligned} d(p) = & 1 + a_1 g \ln \frac{p}{A} + a_2 g^2 \ln^2 \frac{p}{A} + a_3 g^3 \ln^3 \frac{p}{A} + \dots + \\ & + b_1 g + b_2 g^2 \ln \frac{p}{A} + b_3 g^3 \ln^2 \frac{p}{A} + \dots + \\ & + c_2 g^2 + c_3 g^3 \ln \frac{p}{A} + \dots + \\ & + \dots \end{aligned} \quad (5.12)$$

Föltéve, hogy $d(p)$ eleget tesz az (5.3)-mal megadott skálaegyenletnek, az (5.11) Lie-egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial \ln d(x, g)}{\partial x} = \frac{1}{x} \{a_1 g_R(x) + b_2 g_R^2(x) + c_3 g_R^3(x) + \dots\} \{1 + b_1 g_R(x) + c_2 g_R^2(x) + \dots\}^{-1}. \quad (5.13)$$

A Lie-egyenletben az a_i, b_i, c_i, \dots együtthatókból csak a konstans és a logaritmusban lineáris tag együtthatója jelenik meg, s ezek a differenciálegyenlet megoldásán keresztül a teljes $d(p)$ -t szolgáltatják. Ez azért lehetséges, mert az (5.3) skálaegyenlet teljesülése megköveteli, hogy az együtthatók ne legyenek függetlenek, s ezért $a_1, b_1, b_2, c_2, c_3, \dots$ ismeretében a skálázásból a többi együttható meghatározható. Mégpedig a_1 ismeretében az összes többi a_i , ha b_1 és b_2 is ismert, akkor a többi b_i és így tovább. A g_R -ben felírt perturbációs sor tehát egyben a logaritmikus közelítés egy-egy új rendjét szolgáltatja.

5.2. Egyszerű példa: a röntgen-abszorpció él szingularitásának meghatározása

Az ismertetett módszer segítségével először egy matematikailag igen egyszerű esetet, a röntgen-abszorpció él szingularitásának meghatározását mutatom be (Sólyom 1974).

A fizikai probléma a következő: egy fémbe a röntgensugárzás abszorpciójaker egy jól lokalizált törzselektron gerjeszthetünk fel a vezetési sávba. A visszamaradó lyuk szóró potenciált jelent az elektronok számára és a vezetési elektronok átrendeződése miatt az abszorpció átmeneti valószínűség megváltozhat ahhoz az esethez képest, mintha ezt az átrendeződést nem vennénk figyelembe. Mahan (1967) jósolta meg először, hogy az átrendeződés miatt a mélyen fekvő nívóról a Fermi-nívóra történő gerjesztésnek megfelelő energiaküszöbnél szinguláris lesz az abszorpció spektrum. Nozières és munkatársai (Roulet, Gavoret és Nozières 1969; Nozières, Gavoret és Roulet 1969) a parketta-közelítés segítségével tárgyalták a problémát, majd Nozières és De Dominicis (1969) az egzakt megoldást is megadták.

A renormálási csoport segítségével, az előző fejezetben elmondottak illusztrálására a gráfok felösszegzésével kapott eredményeket vezettem le igen röviden.

A feladatot matematikailag megfogalmazva, a mély nívó és a vezetési sáv kölcsönhatásmentes Hamilton-operátora

$$H_0 = \sum_k \varepsilon_k a_k^+ a_k + E_0 b^+ b, \quad (5.14)$$

ahol a_k^+ a vezetési elektronok keltő operátora, b^+ pedig a mély nívón ülő elektroné, ε_k és E_0 a megfelelő energia. A kölcsönhatás akkor jelenik meg, ha a mély nívó üressé válik, s ekkor a lyuk szórócentrumként szerepel,

$$H_1 = \sum_{k, k'} V_{kk'} a_k^+ a_{k'} b b^+. \quad (5.15)$$

A továbbiakban feltesszük, hogy $V_{kk'}$ független az impulzustól, ha a szóródó és szóró elektron is a Fermi-felület körül szimmetrikusan elhelyezkedő $2\omega_0$ szélességű sávban van.

$$V_{kk'} = -V u_k u_{k'} \quad (5.16)$$

és

$$u_k = \begin{cases} 1 & \text{ha } |\varepsilon_k - \varepsilon_F| < \omega_0 \\ 0 & \text{ha } |\varepsilon_k - \varepsilon_F| > \omega_0 \end{cases} \quad (5.17)$$

Egy ω frekvenciájú röntgensugárzást ejtve a mintára, a gerjesztést leíró kölcsönhatás

$$H_x = \sum_k W_k a_k^+ b e^{-i\omega t} + \sum_k W_k^* b^+ a_k e^{i\omega t}. \quad (5.18)$$

Az átmeneti valószínűség meghatározásához az

$$S(t-t') = \langle T \{ H_x(t) H_x(t') \} \rangle \quad (5.19)$$

válaszfüggvényt kell vizsgálnunk s ennek Fourier-transzformáltjának, $S(\omega)$ -nak az imaginárius része az átmeneti valószínűség.

A renormálási csoport minden alkalmazásánál az első lépés az invariáns csatolás meghatározása, s az invariáns csatolás ismeretében lehet a Lie-egyenletből a fizikai mennyiségeket meghatározni. Az invariáns csatoláshoz viszont a Green-függvényen és vertexen keresztül jutunk. A kétfajta elektron miatt két Green-függvényt kell definiálnunk. Az egyik,

$$G_{kk'}(t-t') = -i \langle T \{ a_k(t) a_{k'}^+(t') \} \rangle \quad (5.20)$$

a vezetési elektronokra, a másik,

$$\mathfrak{G}(t-t') = -i \langle T \{ b(t) b^+(t') \} \rangle \quad (5.21)$$

a mélyen fekvő nívó elektronjára vonatkozik. A gráfokban a vezetési elektronoknak megfelelő vonalakat folytonosan, a mély nívó elektronjának megfelelő vonalakat szaggatottan jelöljük. A szabad Green-függvények kifejezése Fourier-transzformált alakban:

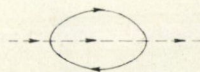
$$G_{kk'}^{(0)}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_k + i\delta \operatorname{sign} \varepsilon_k} \delta_{kk'}, \quad (5.22)$$

$$\mathfrak{G}^{(0)}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - i\delta}. \quad (5.23)$$

Ezentúl a vezetési elektronok energiáját mindig a Fermi-energiától, a mély nívón ülő elektron energiáját pedig E_0 -tól mérjük, s a kölcsönhatásból adódó energiaeltolódásokat sem vesszük figyelembe. Perturbációs sorban meghatározva G -t és \mathfrak{G} -t, könnyen belátható, hogy a vezetési elektronokra nem jelenik meg sajátenergiás korrekció, mivel csak egy mélyen fekvő elektronnívót vizsgálunk. Gráfnyelven ez azt jelenti, hogy a mély nívó elektronjának megfelelő zárt hurok nem jelenhetik meg egy gráfban sem. Így

$$G_{kk'}(\varepsilon) = G_{kk'}^{(0)}(\varepsilon). \quad (5.24)$$

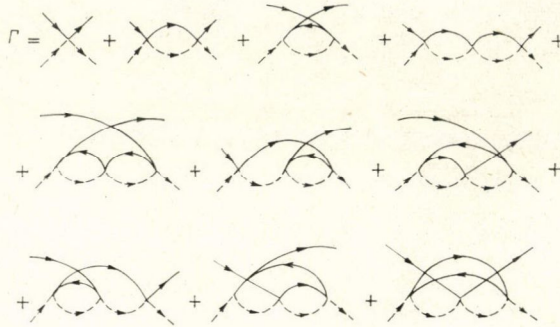
A mély nívón levő elektron másodrendű sajátenergia-korrekcióját a gráf mutatja,



\mathfrak{G} analitikus kifejezése pedig a csatolásban másodrendig

$$\mathfrak{G}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - i\delta} \left\{ 1 + g^2 \left[\ln \frac{\varepsilon}{\omega_0} - i\pi\theta(-\varepsilon) \right] + \dots \right\}, \quad (5.25)$$

ahol $g = V_Q$ a dimenziótlan csatolás, és Q az állapotsűrűség. A vertexet harmadrendig határoztam meg a következő gráfokból:



Az egyszerűség kedvéért a Fermi-felületen levő elektronok szórását vizsgáltam, a két külső folytonos vonalon $\varepsilon_k = \varepsilon_{k'} = 0$. A mély nívón levő elektron ε energiaváltozója az egyetlen megmaradó változó, s az analitikus kifejezés

$$\Gamma = g - g^3 \left[\ln \frac{\varepsilon}{\omega_0} - i\pi\theta(-\varepsilon) \right] + \dots \quad (5.26)$$

Fontos észrevenni, hogy a két másodrendű vertex járuléka kiejtette egymást, s ugyanaz igaz a harmadrendű vertexekre is, kivéve az utolsó gráfot, csak annak a járuléka marad meg.

A rendelkezésünkre álló perturbációs alakokkal megpróbálhatjuk a skálázhatóságot megnézni. A dimenziótlan mennyiségeket (5.1) és (5.2)-höz hasonlóan vezetve be,

$$d = G/G^{(0)}, \quad (5.27)$$

$$h = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}^{(0)}, \quad (5.28)$$

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma/g. \quad (5.29)$$

A skálaegyenletek a kétfajta Green-függvény jelenléte miatt némiképp módosulnak, d -hez és h -hoz más-más multiplikatív szorzót várunk és a csatolásban z_d^{-2} helyett a kétféle z szorzatának inverze jelenik meg. A

$$d \left(\frac{\varepsilon}{\omega'_0}, g' \right) = z_d \left(\frac{\omega'_0}{\omega_0}, g \right) d \left(\frac{\varepsilon}{\omega_0}, g \right), \quad (5.30)$$

$$h \left(\frac{\varepsilon}{\omega'_0}, g' \right) = z_h \left(\frac{\omega'_0}{\omega_0}, g \right) h \left(\frac{\varepsilon}{\omega_0}, g \right), \quad (5.31)$$

$$\tilde{\Gamma} \left(\frac{\varepsilon}{\omega'_0}, g' \right) = z_{\tilde{\Gamma}}^{-1} \left(\frac{\omega'_0}{\omega_0}, g \right) \tilde{\Gamma} \left(\frac{\varepsilon}{\omega_0}, g \right), \quad (5.32)$$

$$g' = g z_{\Gamma} \left(\frac{\omega'_0}{\omega_0}, g \right) z_d^{-1} \left(\frac{\omega'_0}{\omega_0}, g \right) z_h^{-1} \left(\frac{\omega'_0}{\omega_0}, g \right) \quad (5.33)$$

skálaegyenletekkel próbálkozunk meg. (5.24)—(5.26) felhasználásával közvetlenül kapjuk:

$$z_d = 1, \quad (5.34)$$

$$z_h^{-1} = 1 + g^2 \ln \frac{\omega_0'}{\omega_0} + \dots, \quad (5.35)$$

$$z_r = 1 - g^2 \ln \frac{\omega_0'}{\omega_0} + \dots, \quad (5.36)$$

$$g' = g. \quad (5.37)$$

A skálaegyenleteket valóban ki lehet elégíteni valós, ε -tól független szorzófaktorokkal. A legfontosabb eredmény viszont az, hogy a renormált csatolás azonos az eredeti csatolással. A renormálási csoport Wilson-féle megfogalmazása szerint ez azt jelenti, hogy a röntgenabszorpciós probléma Hamilton-operátora a csatolás értékétől függetlenül fix-pont-Hamilton-operátor, hiszen a renormálás során a csatolás értéke nem változik. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a csatolás fix-pont értéke megegyezik a fizikai csatolással. Ez rendkívül speciális helyzet. Általában a csatolások lényegesen változnak a renormálás során, igen gyakran a fix-pont értéke teljesen független a csatolások fizikai értékétől. A további fejezetekben erre is látunk majd példát.

Az eddigiek alapján közvetlenül meghatározhatjuk a mélyen fekvő nívó Green-függvényét és spektrál-függvényét, mely arra ad felvilágosítást, hogyan szélesedik a mély nívó a kölcsönhatás következtében. A h -ra vonatkozó Lie-egyenlet

$$\frac{\partial \ln h(x, g)}{\partial x} = \frac{1}{x} g^2, \quad x = \varepsilon/\omega_0. \quad (5.38)$$

Ezt kiintegrálva, s az integrálási állandót a perturbációs alakhoz való illesztésből meghatározva,

$$h(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{\omega_0}\right)^{g^2} - i\pi g^2 \left(\frac{\varepsilon}{\omega_0}\right)^{g^2} \theta(-\varepsilon). \quad (5.39)$$

Ez az eredmény megegyezik a gráfok járulékanak felösszegzésével, egy jóval bonyolultabb eljárással kapott kifejezéssel.

Rátérve a válaszfüggvény vizsgálatára, $S(\omega)$ gráfjait általánosan a következőképpen ábrázolhatjuk:

$$S(\omega) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2}$$

Harmadrendig a következő folyamatokat kell figyelembe vennünk:

$$S(\omega) = \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \text{diagram 7}$$

Az analitikus alak

$$S(\omega) = W^2 \left\{ - \left[\ln \frac{\omega}{\omega_0} + i\pi\theta(\omega) \right] + g \left[\ln \frac{\omega}{\omega_0} + i\pi\theta(\omega) \right]^2 - \frac{2}{3} g^2 \ln^3 \frac{\omega}{\omega_0} - 2g^2 i\pi\theta(\omega) \ln^2 \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{2} g^2 \ln^2 \frac{\omega}{\omega_0} - g^2 i\pi\theta(\omega) \ln \frac{\omega}{\omega_0} + \dots \right\}. \quad (5.40)$$

$S(\omega)$ imaginárius része,

$$\text{Im } S(\omega) = -i\pi\theta(\omega)W^2 \left\{ 1 - 2g \ln \frac{\omega}{\omega_0} + 2g^2 \ln^2 \frac{\omega}{\omega_0} + g^2 \ln \frac{\omega}{\omega_0} + \dots \right\} \quad (5.41)$$

eleget tesz az

$$\text{Im } S\left(\frac{\omega}{\omega'_0}, g'\right) = z_s\left(\frac{\omega'_0}{\omega_0}, g\right) \text{Im } S\left(\frac{\omega}{\omega_0}, g\right) \quad (5.42)$$

skálarelációnak, a fentiekből ismert $g' = g$ választással, így $\text{Im } S$ -re is felírható egy Lie-egyenlet:

$$\frac{\partial \ln \text{Im } S(x, g)}{\partial x} = \frac{1}{x} \{-2g + g^2 + \dots\}, \quad (5.43)$$

ahol $x = \omega/\omega_0$. Ennek megoldása az integrálási állandónak a perturbációs eredményhez való illesztése után

$$\text{Im } S\left(\frac{\omega}{\omega_0}, g\right) = -i\pi\theta(\omega)W^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-2g+g^2+\dots}. \quad (5.44)$$

A logaritmikus perturbációs sor összegeként hatványfüggvényt kaptunk, a hatvány azonban nem univerzális, ahogyan azt a kritikus jelenségeknél megszoktuk, hanem függ a csatolástól. Ez annak a következménye, hogy nem egy univerzális fix-pontunk van, hanem minden minden csatolás egyben fix-pont csatolás is. Az abszorpciósnak élnél megjelenő hatványszerű viselkedésre kapott ezen kifejezés megegyezik az egzakt eredménnyel a gyenge csatolású esetben (*Nozières* és *De Dominicis* 1969).

Érdekességként megvizsgálhatjuk a válaszfüggvény valós részét is.

$$\text{Re } S(\omega) = -W^2 \left\{ \ln \frac{\omega}{\omega_0} - g \ln^2 \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{2}{3} g^2 \ln^3 \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{1}{2} g^2 \ln^2 \frac{\omega}{\omega_0} + \dots \right\}. \quad (5.45)$$

Ez a mennyiség nem tesz eleget skálarelációnak, így rá közvetlenül Lie-egyenlet nem alkalmazható. Zawadowski rámutatott azonban arra, hogy $\ln(\omega/\omega_0)$ szerint végig-differenciálva és bevezetve a

$$\overline{\text{Re } S(\omega)} = \frac{\partial \text{Re } S(\omega)}{\partial \ln \frac{\omega}{\omega_0}} = -W^2 \left\{ 1 - 2g \ln \frac{\omega}{\omega_0} + 2g^2 \ln^2 \frac{\omega}{\omega_0} + g^2 \ln \frac{\omega}{\omega_0} + \dots \right\} \quad (5.46)$$

mennyiséget, erre már igaz az (5.42)-höz hasonló skálareláció, s a Lie-egyenlet jobb oldala azonos (5.43) jobb oldalával. Visszaintegrálva $\overline{\text{Re } S(\omega)}$ -ra, majd abból meghatározva $\text{Re } S(\omega)$ -t,

$$\text{Re } S(\omega) = \frac{W^2}{2g - g^2} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-2g+g^2} - 1 \right]. \quad (5.47)$$

Könnyen belátható, hogy ezzel az eljárással egy lépésben a teljes $S(\omega)$ is meghatározható. Ezzel az eljárással, illetve általánosításával még találkozni fogunk.

Ebben a fejezetben egy igen egyszerű példán mutattam be az új renormálási eljárás alkalmazási módját. Mindenütt a már ismert eredményeket kaptam vissza. A következőkben további példaként a kritikus jelenségeket, majd az egydimenziós elektrongáz-rendszert vizsgálom.

6. A kritikus jelenségek leírása

6.1. A levágás-skálázás és tömegrenormálás

A kritikus jelenségek korábbi tárgyalása kapcsán láttuk, hogy a (4.1)-ben megadott φ^4 -es modell jó leírást ad a kritikus viselkedésről. A 4. fejezetben térelméleti módon vizsgáltuk ezt a modellt, így határoztuk meg a kritikus exponenseket. Ebben a fejezetben Forgácsal és Zawadowskival (*Forgács, Sólyom és Zawadowski* 1976) közösen végzett vizsgálatainkat ismertetem, melynek során az új renormálási eljárás segítségével tanulmányoztuk az eredeti statisztikus fizikai problémát, vagyis a φ^4 -es modellben végesnek vettük a Λ levágást és így határoztuk meg a kritikus viselkedést.

A (4.1) Hamilton-operátorral definiált rendszer Green-függvényét és vertex függvényét perturbációs sorral meghatározva, megpróbálkozhatunk a skálaegyenletek felírásával, a levágást választva skálaparaméternek. Hamarosan kiderül azonban, hogy ez az út ilyen egyszerűen nem járható. A skálaegyenleteket nem lehet olyan multiplikatív z szorzókkal kielégíteni, melyek r_0 -tól függetlenek, a módszer előnye viszont éppen az kell hogy legyen, hogy z -k nem fűggenek a tényleges változóktól. Rá lehet azonban jönni arra, hogy megfelelő tömegrenormálás esetén jól skálázódó kifejezéseket lehet kapni. Ezt a tömegrenormálást (4.16)-ban definiáltuk. Ott a renormált elmélet keretében definiáltuk κ^2 -t, most a véges levágást tartalmazó renormálatlan elméletben definiáljuk a renormált tömeget, κ^2 -t úgy, hogy

$$\Gamma^{(2)}(p^2, \kappa^2, g_0)|_{p^2 = -\kappa^2} = 0. \quad (6.1)$$

Fizikailag úgy lehet a renormált tömeg ilyen választását megindokolni, hogy az így definiált κ a ξ koherenciahossz inverze, s a kritikus pont közelében a kritikus ponttól való távolság természetes mértéke a koherenciahossz, illetve annak inverze (*Halperin és Hohenberg* 1967).

Mindenütt a dimenziótlan mennyiségeket használva, a csatolás dimenziótlanítására a legtermészetesebb mód véges levágás esetén a

$$g_0 = u_0 \Lambda^\epsilon \quad (6.2)$$

választás. r_0 helyett a κ^2 változót használva, a dimenziótlan Green-függvényre, d -re, a dimenziótlan $\tilde{\Gamma}$ -ra és a csatolásra a következő skálaegyenletek teljesülését várjuk:

$$d \left(\frac{p^2}{\Lambda'^2}, \frac{\kappa^2}{\Lambda'^2}, u'_0 \right) = z_d \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, u_0 \right) d \left(\frac{p^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa^2}{\Lambda^2}, u_0 \right), \quad (6.3)$$

$$\tilde{\Gamma} \left(\frac{p_i^2}{\Lambda'^2}, \frac{\kappa^2}{\Lambda'^2}, u'_0 \right) = z_\Gamma^{-1} \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, u_0 \right) \tilde{\Gamma} \left(\frac{p_i^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa^2}{\Lambda^2}, u_0 \right), \quad (6.4)$$

$$u'_0 \Lambda'^\epsilon = u_0 \Lambda^\epsilon z_\Gamma \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, u_0 \right) z_d^{-2} \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, u_0 \right). \quad (6.5)$$

Ezek az egyenletek formailag igen hasonlóak a (4.23)—(4.27) egyenletekhez, tartalmuk azonban más. Itt a fizikai függvényekről tételezünk fel skálarelációt, míg ott a skálareláció a renormált függvényekre vonatkozik és egy fizikai jelentéssel nem bíró paraméterrel történik a skálázás.

A módszer leírásánál hangsúlyoztuk, hogy ezen egyenletek igaz voltát mindig ellenőrizni kell a perturbációs sorral. A számolás könnyebbé kedvéért nem általános p és κ változóra csináltuk az ellenőrzést, hanem két speciális esetben. Először $\kappa^2=0$ -t választottuk, s p^2 marad meg változónak. d -t és $\tilde{\Gamma}$ -t (4.34)-ben, illetve (4.36)-ban adtuk meg, csak (6.1)-et kell még figyelembe venni. A skálaegyenleteket megoldva

$$z_d^{-1} = 1 + \frac{n+2}{144} u_0^2 K_d^2 \ln \frac{A'^2}{A^2} + \dots, \quad (6.6)$$

$$z_r = 1 + \frac{n+8}{12} u_0 K_d \frac{2}{\varepsilon} \left[1 - \left(\frac{A'^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon/2} \right] + \left(\frac{n+8}{12} \right)^2 u_0^2 K_d^2 \ln^2 \frac{A'^2}{A^2} - \frac{5n+22}{36} u_0^2 K_d^2 \ln \frac{A'^2}{A^2} + \dots, \quad (6.7)$$

és

$$u'_0 = u_0 \left(\frac{A'^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon/2} \left\{ 1 + \frac{n+8}{12} u_0 K_d \frac{2}{\varepsilon} \left[1 - \left(\frac{A'^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon/2} \right] + \left(\frac{n+8}{12} \right)^2 u_0^2 K_d^2 \ln^2 \frac{A'^2}{A^2} - \frac{9n+42}{72} u_0^2 K_d^2 \ln \frac{A'^2}{A^2} + \dots \right\}. \quad (6.8)$$

A másik esetben, amikor minden külső impulzust nullának választunk, és κ^2/A^2 az egyetlen változó, az integrálok elvégzése után

$$d \left(\frac{\kappa^2}{A^2} \right) = 1 + \frac{n+2}{144} u_0^2 K_d^2 \ln \frac{\kappa^2}{A^2} + \dots, \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} \left(\frac{\kappa^2}{A^2} \right) = & 1 + \frac{n+8}{12} u_0 K_d \left(\frac{\kappa^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon/2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\kappa^2}{A^2} \right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] + 1 + \dots \right\} + \\ & + \frac{n^2+6n+20}{144} u_0^2 K_d^2 \left(\frac{\kappa^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\kappa^2}{A^2} \right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] + 1 + \dots \right\}^2 + \\ & + \frac{5n+22}{36} u_0^2 K_d^2 \left(\frac{\kappa^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 \frac{\kappa^2}{A^2} + \dots \right\} + \dots \end{aligned} \quad (6.10)$$

(4.36)-tal összehasonlítva a vertex ezen alakját, láthatjuk, hogy p^2 -ben és κ^2 -ben nem teljesen hasonló a függés. Ennek ellenére a skálaegyenletekből ugyanazokat a z faktorokat és ugyanazt a renormált csatolást kapjuk, mint az előbb. Ebből általánosítva feltételezzük, hogy a skálázás általános p és κ esetén is igaz és a skálaegyenletekből meghatározhatjuk a kritikus exponenseket. Ehhez azonban előbb ismernünk kell az invariáns csatolás értékét abban az esetben, amikor az új levágást egészen kis impulzusokhoz vittük le.

A Lie-egyenletet u_R -re felírva

$$\frac{du_R(s, u_0)}{ds} = \frac{u_R(s, u_0)}{s} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n+8}{12} u_R(s, u_0) K_d - \right. \\ \left. - \frac{9n+42}{72} u_R^2(s, u_0) K_d^2 + \dots \right\}, \quad (6.11)$$

ahol $s = A'^2/A^2$. $s \ll 1$ esetén a megoldás

$$u_R(s, u_0) = u_0^* + A s^{\omega/2} + \dots, \quad (6.12)$$

ahol

$$K_d u_0^* = \frac{6}{n+8} \varepsilon \left[1 + \varepsilon \frac{9n+42}{(n+8)^2} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (6.13)$$

és

$$\omega = \varepsilon - \frac{9n+42}{(n+8)^2} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.14)$$

u_0^* a fix-pont csatolás. Ha a csatolás értéke u_0^* lenne, a levágás skálázásával végrehajtott renormálási transzformáció során a csatolás változatlan maradna. u_0^* -tól különböző, de pozitív u_0 csatolás esetén a renormálás során u_R a fix-pont csatoláshoz, u_0^* -hoz tart, u_0 értékétől függetlenül. Mivel, mint látni fogjuk, a kritikus exponensek u_0^* -gal fejezhetők ki, a kritikus exponensek függetlenek a csatolás erősségétől a kritikus jelenségeknél jól ismert univerzalitásnak megfelelően. A fix-pont csatolásra más értéket kaptunk, mint a térelméleti eljárásoknál, ennek azonban, mint látni fogjuk, nincs befolyása a kritikus exponensek értékére. ω viszont, mely mérhető mennyiséggel, a skálaviselkedéshez adódó korrekcióval kapcsolatos, ugyanolyan értékű, mint a korábbi számolásban.

6.2. A kritikus exponensek meghatározása

Az invariáns csatolás ismeretében nekiláthatunk a kritikus exponensek meghatározásának. Ebben a fejezetben az η , ν és γ exponenseket határozzuk meg. A fajhó α exponense külön vizsgálatot igényel. A mágneses térbeli viselkedésre, illetve a T_c alatti viselkedésre jellemző β , δ exponenseket itt nem vizsgáljuk. A módszer szinte triviális módon általánosítható erre az esetre is.

Az η , ν és γ exponensek mind a Green-függvénnyel kapcsolatosak. A Green-függvény impulzus- és hőmérsékletfüggését, illetve a $\xi = \kappa^{-1}$ koherenciahossz hőmérsékletfüggését jellemzik. A d függvény p -, illetve κ -függését vizsgálva a $\kappa^2=0$, illetve $p^2=0$ esetben, a Lie-egyenletek

$$\frac{\partial \ln d(x, u_0)}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln d(\xi, 0, u_R(x, u_0))|_{\xi=1}, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial \ln d(y, u_0)}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial \eta} \ln d(0, \eta, u_R(y, u_0))|_{\eta=1}, \quad (6.16)$$

ahol $x=p^2/\Lambda^2$, $y=\kappa^2/\Lambda^2$. A fejezet további részében is használni fogjuk x -et és y -t a p^2/Λ^2 , illetve κ^2/Λ^2 változó jelölésére. A kritikus exponensek meghatározásához az $x \ll 1$ és $y \ll 1$ tartományt kell vizsgálni. A vezető járulékot úgy kapjuk, hogy a jobb oldalon $u_R(x, u_0)$ helyébe az $x=0$ -nál felvett fix-pont értéket írjuk be.

$$d(x) \sim x^{\psi_1(u_0^*)} \sim \left(\frac{p}{\Lambda}\right)^{2\psi_1(u_0^*)} \quad \text{ha } \frac{p^2}{\Lambda^2} \ll 1, \quad (6.17)$$

és

$$d(y) \sim y^{\psi_2(u_0^*)} \sim \left(\frac{\kappa}{\Lambda}\right)^{2\psi_2(u_0^*)} \quad \text{ha } \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} \ll 1, \quad (6.18)$$

ahol

$$\psi_1(u_0^*) = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln d(\xi, 0, u_0^*)|_{\xi=1}, \quad (6.19)$$

$$\psi_2(u_0^*) = \frac{\partial}{\partial \eta} \ln d(0, \eta, u_0^*)|_{\eta=1}. \quad (6.20)$$

A Green-függvény viselkedése

$$G(p^2) \sim \frac{1}{p^2} p^{2\psi_1(u_0^*)} \sim \frac{1}{p^{2-2\psi_1(u_0^*)}}, \quad (6.21)$$

$$G(\kappa^2) \sim \frac{1}{\kappa^2} \kappa^{2\psi_2(u_0^*)} \sim \frac{1}{\kappa^{2-2\psi_2(u_0^*)}}. \quad (6.22)$$

Meghatározva a ψ_1 és ψ_2 mennyiségeket a (4.34)-ben, illetve (6.9)-ben megadott perturbációs sorokból,

$$\psi_1(u_R) = \frac{n+2}{144} u_R^2 K_d^2 \left(1 + \frac{9}{4} \varepsilon\right) - \frac{5(n+2)(n+8)}{12^3} u_R^3 K_d^3 + \dots, \quad (6.23)$$

$$\psi_2(u_R) = \frac{n+2}{144} u_R^2 K_d^2 + \dots, \quad (6.24)$$

és behelyettesítve a fix-pont (6.13)-beli értékét,

$$\psi_1(u_0^*) = \frac{n+2}{4(n+8)^2} \varepsilon^2 \left[1 + \varepsilon \left(\frac{6(3n+14)}{(n+8)^2} - \frac{1}{4}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (6.25)$$

$$\psi_2(u_0^*) = \frac{n+2}{4(n+8)^2} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.26)$$

Az η exponens definícióját (6.21)-gyel összevetve

$$\eta = 2\psi_1(u_0^*). \quad (6.27)$$

(6.25) és (4.46) összehasonlításából pedig azt látjuk, hogy η -t ε^3 rendig helyesen állítottuk elő. A megfelelő Lie-egyenletek alakilag nem azonosak, az u_R^3 tag együtt-

hatója különbözik, a fix-pontok is különböznek, a fizikailag mérhető exponens azonban helyesen jön ki mindkét módszerben. ε^2 rendig $\psi_1(u_0^*)$ és $\psi_2(u_0^*)$ azonos, így

$$G(\kappa) \sim \frac{1}{\kappa^{2-\eta}}. \quad (6.28)$$

A κ -függésről a tényleges hőmérsékletfüggésre áttérve, a ν exponens definíciója

$$\kappa = \xi^{-1} \sim (T - T_c)^\nu, \quad (6.29)$$

és így

$$G(T - T_c) \sim (T - T_c)^{-(2-\eta)\nu}. \quad (6.30)$$

Másrészt G a $p^2=0$ helyen a szuszceptibilitással arányos, s a γ exponens definíciója szerint

$$G(T - T_c) \sim \chi(T - T_c) \sim (T - T_c)^{-\gamma}. \quad (6.31)$$

Ezekből az összefüggésekből közvetlenül adódik a

$$\gamma = (2-\eta)\nu \quad (6.32)$$

skálátörvény, amelyet így ε^2 rendig igazoltunk. Feladatunk még ν és γ ε -sorfejtésének meghatározása. Ehhez azt kell megnéznünk, hogyan kaptuk a hőmérséklettel arányos r_0 -ból a renormált tömeget, κ -t. A számolás részleteit a függelékbe téve, az ottani eredmények felhasználásával

$$\kappa^2 \left\{ 1 - \frac{n+2}{12} u_0 K_d \ln \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} + \frac{n+2}{18} u_0^2 K_d^2 \left(-\frac{3}{8} \ln^2 \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} + \frac{5}{8} \ln \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} + \dots \right) + \dots \right\} \sim T - T_c. \quad (6.33)$$

A κ^2 szorzójaként megjelenő

$$F\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}, u_0\right) = 1 - \frac{n+2}{12} u_0 K_d \ln \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} + \frac{n+2}{18} u_0^2 K_d^2 \left(-\frac{3}{8} \ln^2 \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} + \frac{5}{8} \ln \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} + \dots \right) + \dots \quad (6.34)$$

függvényről belátható, hogy Λ skálázásával multiplikativan renormálódik, így rá a Lie-egyenlet használható. A szokásos eljárással

$$\frac{\partial \ln F(y, u_0)}{\partial y} = \frac{1}{y} \left\{ -\frac{n+2}{12} u_R(y, u_0) K_d + \frac{5(n+2)}{144} u_R^2(y, u_0) K_d^2 + \dots \right\}, \quad (6.35)$$

és

$$F(\kappa^2) \sim (\kappa^2)^{\psi_3(u_0^*)}, \quad (6.36)$$

ahol

$$\begin{aligned} \psi_3(u_0^*) &= -\frac{n+2}{12} u_0^* K_d + \frac{5(n+2)}{144} u_0^{*2} K_d^2 + \dots = \\ &= -\frac{n+2}{2(n+8)} \varepsilon - \frac{(n+2)(13n+44)}{4(n+8)^3} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (6.37)$$

(6.33) felhasználásával

$$\kappa^{2(1+\psi_3(u_0^*))} \sim T - T_c \quad (6.38)$$

és így

$$v = \frac{1}{2(1+\psi_3(u_0^*))} = \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)}\varepsilon + \frac{(n+2)(n^2+23n+60)}{8(n+8)^3}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.39)$$

A (6.32) skálatörvény felhasználásával pedig

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)}\varepsilon + \frac{(n+2)(n^2+22n+52)}{4(n+8)^3}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.40)$$

Mind a v -re, mind a γ -ra kapott eredmény megegyezik a kritikus exponensekre más módon kapott eredménnyel.

6.3. Az anomális dimenziók meghatározása

Az eddigiekben a Green-függvény viselkedésével foglalkoztunk. Teljesen hasonló módon a vertex impulzusfüggését is vizsgálhatjuk. Ugyanúgy, mint a Green-függvényénél, a megjelenő exponensek nem egyeznek meg a dimenziós megfontolással kapható úgynevezett kanonikus dimenzióknak megfelelő exponenssel. A logaritmusos korrekciók felösszegzéséből hatványfüggvényt kapva az exponensek módosulhatnak, ezt jellemezhetjük *Wilson* (1969) nyomán az anomális dimenzióval.

Először a d_φ anomális dimenziót vizsgáljuk, melyet úgy definiálhatunk, hogy kis impulzusoknál

$$\tilde{\Gamma}(p^2) \sim p^{d-4d_\varphi} \quad \text{ha} \quad p^2/\Lambda^2 \ll 1. \quad (6.41)$$

A $\tilde{\Gamma}$ -ra vonatkozó Lie-egyenlet a $\kappa^2=0$ esetben

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \tilde{\Gamma}(x, u_0)}{\partial x} &= \frac{1}{x} \left\{ \frac{n+8}{12} u_R(x, u_0) K_d \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \frac{n^2+26n+108}{72} u_R^2(x, u_0) K_d^2 + \dots \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{n+8}{12} u_R(x, u_0) K_d(-1-\varepsilon) + \dots \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

ahol a jobb oldalon rögtön felhasználtuk a (4.36)-beli perturbációs alakot. Kis x -re a megoldást a fix-pont csatolás beírásával kapjuk, s így

$$\tilde{\Gamma} \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right) \sim \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{\psi_4(u_0^*)}, \quad (6.43)$$

ahol

$$\psi_4(u_0^*) = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{n+2}{2(n+8)^2}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.44)$$

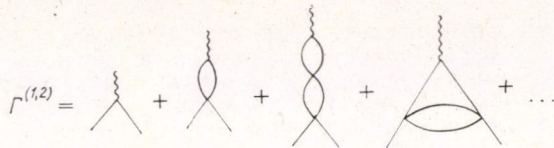
A d_φ anomális dimenziót ebből meghatározva,

$$d_\varphi = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)^2}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.45)$$

A φ^2 tér anomális dimenzióját, d_{φ^2} -t egy másfajta vertexből határozzuk meg. Vizsgáljuk a

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta_1\beta_2}^{(1,2)}(p, p_1, p_2, u_0) &= \int e^{i(p x + p_1 x_1 + p_2 x_2)} \langle \varphi_\alpha^2(x) \varphi_{\beta_1}(x_1) \varphi_{\beta_2}(x_2) \rangle d^d x d^d x_1 d^d x_2 = \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \langle \varphi_{k\alpha} \varphi_{p-k\alpha} \varphi_{p_1\beta_1} \varphi_{p_2\beta_2} \rangle \end{aligned} \quad (6.46)$$

vertexet. Legalacsonyabb rendben a következő gráfok felelnek meg ennek:



A hullámos vonal csak azt jelenti, hogy ott p impulzust tápláltuk be a rendszerbe. A külső vonalakat nem vesszük figyelembe az analitikus alak felírásánál.

$$\Gamma_{\alpha\beta_1\beta_2}^{(1,2)}(p, p_1, p_2, u_0) = \delta_{\beta_1\beta_2} \delta_{p, p_1+p_2} \Gamma^{(1,2)}(p, p_1, p-p_1, u_0). \quad (6.47)$$

A $p_1=0$ speciális esetben

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1,2)}(p, 0, p, u_0) &= 1 + \frac{n+2}{12} u_0 K_d \left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon/2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\} + \\ &+ \left(\frac{n+2}{12}\right)^2 u_0^2 K_d^2 \left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\}^2 + \\ &+ \frac{n+2}{24} u_0^2 K_d^2 \left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} - 2 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + 2 + \dots \right] + \dots \end{aligned} \quad (6.48)$$

Ez a mennyiség is multiplikatíve renormálódik a levágás skálázásánál és a Lie^{*} egyenlet alakja $x=p^2/\Lambda^2$ jelöléssel

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \Gamma^{(1,2)}(x, 0, x, u_0)}{\partial x} &= \frac{1}{x} \left\{ \frac{n+2}{12} u_R(x, u_0) K_d \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \right. \\ &\left. - 2 \left(\frac{n+2}{12}\right)^2 u_R^2(x, u_0) K_d^2 - \frac{n+2}{12} u_R^2(x, u_0) K_d^2 + \dots \right\} \left\{ 1 - \frac{n+2}{12} u_R(x, u_0) K_d + \dots \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Kis p -re a megoldás

$$\Gamma^{(1,2)}(p, 0, p, u_0) \sim p^{2\psi_5(u_0^*)}, \quad (6.50)$$

ahol

$$\psi_5(u_0^*) = \frac{n+2}{2(n+8)} \varepsilon \left[1 + \frac{6(n+3)}{(n+8)^2} \varepsilon \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.51)$$

Másrészt a d_{φ^2} anomális dimenzió definíciójából (Brézin, Le Guillou és Zinn-Justin 1973a),

$$\Gamma^{(1,2)}(p, 0, p, u_0) \sim p^{-2d_{\varphi} + d_{\varphi^2}}, \quad (6.52)$$

és így

$$d_{\varphi^2} = 2 - \frac{6}{n+8} \varepsilon + \frac{(n+2)(13n+44)}{2(n+8)^3} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.53)$$

Még egy anomális dimenziót, a $\varphi\varphi$ tér $d_{\varphi\varphi}$ anomális dimenzióját vizsgáljuk meg. Ezt a következő vertex segítségével definiáljuk.

$$\begin{aligned} \Gamma''_{\alpha\beta\gamma_1\gamma_2}^{(2)}(p, p_1, p_2, u_0) &= \int e^{i(p_1x + p_2x_2)} \langle \varphi_\alpha(x) \varphi_\beta(x) \varphi_{\gamma_1}(x_1) \varphi_{\gamma_2}(x_2) \rangle d^d x d^d x_1 d^d x_2 = \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \langle \varphi_{k\alpha} \varphi_{p-k\beta} \varphi_{p_1\gamma_1} \varphi_{p_2\gamma_2} \rangle \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Ugyanazok a gráfok jelennek meg, mint az előző esetben, de az $\alpha \neq \beta$ megkötés miatt más számfaktorokkal.

$$\Gamma''_{\alpha\beta\gamma_1\gamma_2}^{(2)}(p, p_1, p_2, u_0) = (\delta_{\alpha\gamma_1} \delta_{\beta\gamma_2} + \delta_{\alpha\gamma_2} \delta_{\beta\gamma_1}) \delta_{p, p_1+p_2} \Gamma''^{(2)}(p, p_1, p-p_1, u_0). \quad (6.55)$$

Megint a $p_1=0$ speciális esetet véve,

$$\begin{aligned} \Gamma''^{(2)}(p, 0, p, u_0) &= 1 + \frac{1}{6} u_0 K_d \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{-\varepsilon/2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\} + \\ &+ \frac{1}{36} u_0^2 K_d^2 \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{-\varepsilon} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\}^2 + \\ &+ \frac{n+4}{72} u_0^2 K_d^2 \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{-\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} - 2 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + 2 + \dots \right] + \dots \end{aligned} \quad (6.56)$$

Az előzőkhöz teljesen hasonló eljárással

$$\Gamma''^{(2)}(p, 0, p, u_0) \sim p^{2\psi_6(u_0^*)}, \quad (6.57)$$

ahol

$$\begin{aligned} \psi_6(u_0^*) &= \left\{ \frac{1}{6} u_0^* K_d \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \frac{1}{18} (u_0^*)^2 K_d^2 - \frac{n+4}{36} (u_0^*)^2 K_d^2 + \dots \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{1}{6} u_0^* K_d + \dots \right\}^{-1} = \frac{1}{n+8} \varepsilon \left[1 - \frac{n^2 - 4n - 36}{2(n+8)^2} \varepsilon \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (6.58)$$

A $d_{\varphi\varphi}$ anomális dimenzió definíciójából (Yamazaki és Suzuki 1973)

$$\Gamma''^{(2)}(p, 0, p, u_0) \sim p^{-2d_{\varphi} + d_{\varphi\varphi}} \quad \text{ha} \quad \frac{p^2}{\Lambda^2} \ll 1. \quad (6.59)$$

A $d_{\varphi\varphi}$ anomális dimenzió értéke ebből közvetlenül adódik:

$$d_{\varphi\varphi} = 2 - \frac{n+6}{n+8} \varepsilon - \frac{(n+4)(n-22)}{2(n+8)^3} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.60)$$

Mind a három anomális dimenzióra kapott eredmény megegyezik a más módon meghatározott értékekkel (Brézin, Le Guillou és Zinn-Justin 1973a, Yamazaki és Suzuki 1973). Az anomális dimenziókkal azért érdemes foglalkozni, mert skálátörvényeken keresztül a többi kritikus exponenssel kapcsolatban vannak. Az anomális dimenziót mindig a $\kappa^2=0$ esetben, tehát a kritikus pontban definiáltuk. A skálátörvények viszont ezeket az anomális dimenziókat a hőmérsékletfüggést leíró exponensekkel is összekapcsolják. Így a kritikus pontban számolva és a skálátörvényeket felhasználva, minden kritikus exponens meghatározható. A térelméleti eljárásnál ez látszik a legkényelmesebb útnak, Brézin, Le Guillou és Zinn-Justin (1973a) ilyen módon határozták meg az exponenseket. Az új módszer egyik előnye éppen abban rejlik, hogy ugyanolyan könnyen tudunk T_c -ben számolni, mint T_c -től különböző hőmérsékleten.

A $d_{\phi\phi}$ anomális dimenzió egy olyan új exponenssel kapcsolatos, melyről eddig még nem volt szó. Anizotróp rendszereknél az úgynevezett cross-over exponens, Φ jellemzi az anizotrópia hatását (Wegner 1972b, Fisher és Pfeuty 1972). Ennek $d_{\phi\phi}$ -vel való kapcsolata:

$$\Phi = v(d - d_{\phi\phi}), \quad (6.61)$$

s az ismert exponensek felhasználásával

$$\Phi = 1 + \frac{n}{2(n+8)} \varepsilon + \frac{n(n^2+24n+68)}{4(n+8)^3} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (6.62)$$

egyezésben Wilson (1972) korábbi eredményével.

6.4. Korrekciók a skálaviselkedéshez

Az eddigiekben csak a skálaviselkedés szempontjából érdekes vezető tagokat határoztuk meg minden mennyiségben. A rendelkezésünkre álló formulák azonban nemcsak a vezető tag meghatározását teszik lehetővé, hanem az első korrekcióét is. A Lie-egyenletek jobb oldalán az invariáns töltést mindenütt a fix-pont értékkel helyettesítettük. Ha azonban u_R -re (6.12)-t használva a fix-ponthoz tartást leíró $A_S^{\omega/2}$ tagot is figyelembe vesszük, ez minden mennyiségben megjelentet hasonló tagokat. A d függvényt nézve meg, a Lie-egyenlet

$$\frac{\partial \ln d(x, u_0)}{\partial x} = \frac{1}{x} \left\{ \frac{n+2}{144} u_R^2(x, u_0) K_d^2 \left(1 + \frac{9}{4} \varepsilon \right) - \frac{5(n+2)(n+8)}{12^3} u_R^3(x, u_0) K_d^3 + \dots \right\}. \quad (6.63)$$

(6.12) behelyettesítése után, az integrálás eredményeként

$$d(x) \sim x^{\eta/2} (1 + Bx^{\omega/2} + \dots), \quad (6.64)$$

$$d(p) \sim p^{\eta} (1 + B' p^{\omega} + \dots). \quad (6.65)$$

Teljesen hasonló módon

$$\chi(x) \sim G(x) \sim x^{-2+\eta} (1 + Cx^{\omega} + \dots), \quad (6.66)$$

$$x^2 = \xi^{-2} \sim t^{2\nu} (1 + Dt^{\omega\nu} + \dots), \quad (6.67)$$

$$\chi(t) \sim t^{-\gamma} (1 + Et^{\omega\nu} + \dots), \quad (6.68)$$

ahol $t = (T - T_c)/T_c$. A korrekciós tagok előtt megjelenő B, C, \dots együtthatók már nem univerzálisak, a csatolástól függenek.

6.5. A fajhő vizsgálata

Ezt a multiplikatív renormálási eljárást igen jól lehetett használni a Green-függvény és a vertex viselkedésének vizsgálatára, mivel a renormálási transzformációk ezeknek a segítségével fogalmaztuk meg. Olyan mennyiségekre, mint pl. a fajhő, mely a szabadenergiából származtatható, kevésbé látszik természetesnek az alkalmazhatóság, s mint látni fogjuk, minden további nélkül nem is adódik közvetlen skálaegyenlet a fajhőre.

A fajhőt definiáló termodinamikai összefüggések:

$$C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_v = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_v, \quad (6.69)$$

a szabadenergiát pedig a következőképpen definiálhatjuk:

$$F = -T \ln \text{Sp} (e^{-H/T}). \quad (6.70)$$

A szabadenergia deriválásánál egyrészt a (6.70)-ben szereplő explicit hőmérsékletfüggést kell figyelembe venni, másrészt a Hamilton-operátor paramétereiben levő implicit hőmérsékletfüggést. Az r_0 paraméter (4.1)-ben T -vel arányos. Larkin és Hmelnickij (1969) megmutatták, hogy a fajhő szingularitását adó járulékok r_0 hőmérsékletfüggésének figyelembevételével adódik, vagyis a szinguláris részt nézve

$$C_v \sim \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \sim \frac{\partial^2 F}{\partial r_0^2}. \quad (6.71)$$

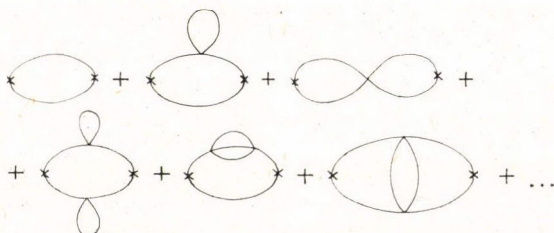
A szabadenergiát gráfokkal is ábrázolhatjuk, s ekkor a zárt hurkokból álló kapcsolt gráfokat kell figyelembe vennünk (Abrikosov, Gorkov és Dzjalosinszkij 1962), de a tömegrenormálás nélküli propagátorokat kell használnunk, tehát $G^{(0)-1} = r_0 + k^2$, a szabadenergiában a sajátenergiás korrekciók nem olvashatók könnyen be a propagátorba. Az r_0 szerinti differenciálás ezért a

$$\frac{\partial G^{(0)}}{\partial r_0} = -G^{(0)2} \quad (6.72)$$

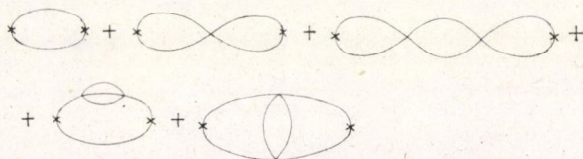
összefüggés szerint valamely vonalat megduplázza. A C_v -nek megfelelő gráfok két ilyen extra vertexszel rendelkeznek, s megfelelnek a sűrűség—sűrűség korrelációs függvény gráfjainak.

$$C_v \sim \int d^d x d^d y \langle \varphi^2(x) \varphi^2(y) \rangle, \quad (6.73)$$

e gráfok pedig



Ebben az alakban most már elvégezhetjük a tömegrenormálást, áttérhetünk a κ^2 változóra. Másodrendig a következő gráfokat kell figyelembe vennünk:



A Hartree-huroknak megfelelő járulék a tömegrenormálásba van beolvasztva. Ezen gráfok összegét $\Pi(\kappa^2, \Lambda^2, u_0)$ -lal jelölve, a C_v fajhő Π -vel lesz arányos. A gráfok járulékát meghatározva

$$\begin{aligned}
 \Pi(\kappa^2, \Lambda^2, u_0) = & -n K_d(\kappa^2)^{-\varepsilon/2} \left\{ \left[f\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right) + 1 + \dots \right] + \right. \\
 & + \frac{n+2}{12} u_0 K_d \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon/2} \left[f\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right) + 1 + \dots \right]^2 + \\
 & + \left(\frac{n+2}{12}\right)^2 u_0^2 K_d^2 \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon} \left[f\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right) + 1 + \dots \right]^3 + \\
 & + \frac{n+2}{144} u_0^3 K_d^3 \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon} \left[\ln^2 \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} + \dots \right] + \\
 & \left. + \frac{n+2}{48} u_0^3 K_d^3 \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon} \left[\frac{2}{3} \ln^3 \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} + \dots \right] + \dots \right\},
 \end{aligned} \tag{6.74}$$

ahol

$$f(x) = \frac{2}{\varepsilon} (x^{\varepsilon/2} - 1). \tag{6.75}$$

Az integrálokat olyan pontossággal határoztuk meg, mely a fajhő exponensének ε^2 rendig történő meghatározásához szükséges.

A Λ levágást skálázva, s a renormált csatolásra a már ismert eredményt használva, rögtön belátható, hogy ez a mennyiség nem renormálódik multiplikatíve egy κ^2 -től független z faktorial. Ugyanaz a helyzet, mint az 5.2. fejezetben a röntgenabszorpciós él problémában a válaszfüggvény valós részével. Ott is az okozta a nehézséget, hogy a nulladrendű kifejezés is függ a levágástól, mégpedig logaritmikusan. Láttuk, hogy egy segédmenntiséget kell bevezetni, melyben a nulladrendű logaritmus járulék eltűnik, s így jól skálázódó mennyiséget kaphatunk. Ennek az eljárásnak az általánosítására itt azt javasoltuk, hogy a segédmenntiséget a következőképpen definiáljuk:

$$\bar{\Pi}\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}, u_0\right) = \frac{\partial \Pi(\kappa^2, \Lambda^2, u_0)}{\partial \Pi^{(0)}(\kappa^2, \Lambda^2)}, \tag{6.76}$$

ahol

$$\begin{aligned}\Pi^{(0)}(\kappa^2, \Lambda^2) &= -n K_d (\kappa^2)^{-\varepsilon/2} \left[f\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right) + 1 + \dots \right] = \\ &= -n K_d (\kappa^2)^{-\varepsilon/2} \left[\ln \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} + 1 + \dots \right]\end{aligned}\quad (6.77)$$

a nulladrendű járulék. A $\bar{\Pi}$ segédmenyiség perturbációs alakja

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}, u_0\right) &= 1 + \frac{n+2}{6} u_0 K_d \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon/2} \left[f\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right) + 1 + \dots \right] + \\ &+ \frac{(n+2)^2}{48} u_0^2 K_d^2 \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon} \left[f\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right) + 1 + \dots \right]^2 + \\ &+ \frac{n+2}{144} u_0^2 K_d^2 \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon} \left[2 \ln \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} + \dots \right] + \frac{n+2}{48} u_0^2 K_d^2 \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon} \left[2 \ln^2 \frac{\kappa^2}{\Lambda^2} + \dots \right] + \dots\end{aligned}\quad (6.78)$$

Ez a dimenziótlan mennyiség már eleget tesz a skálázási feltételnek,

$$\bar{\Pi}\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda'^2}, u'_0\right) = z_\pi \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, u_0\right) \bar{\Pi}\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}, u_0\right).\quad (6.79)$$

A Lie-egyenletet felírva erre a mennyiségre a most már szokásos módon,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln \bar{\Pi}(y, u_0)}{\partial y} &= \frac{1}{y} \left\{ \frac{n+2}{6} u_R(y, u_0) K_d \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{(n+2)^2}{24} u_R^2(y, u_0) K_d^2 + \right. \\ &\left. + \frac{n+2}{72} u_R^2(y, u_0) K_d^2 + \dots \right\} \left\{ 1 + \frac{n+2}{6} u_R(y, u_0) + \dots \right\}^{-1}.\end{aligned}\quad (6.80)$$

$y = \kappa^2/\Lambda^2 \ll 1$ esetén a megoldás

$$\bar{\Pi}\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}, u_0\right) \sim (\kappa^2)^{\psi_\tau(u_0^*)} \left[1 + F\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)^{\omega/2} + \dots \right],\quad (6.81)$$

ahol

$$\psi_\tau(u_0^*) = \frac{n+2}{n+8} \varepsilon \left[1 + \varepsilon \frac{13n+44}{2(n+8)^2} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).\quad (6.82)$$

A fajhő α exponensének meghatározásához vissza kell még térnünk az eredeti Π mennyiségre, mely C_v -vel arányos. Figyelembe véve, hogy $\Pi^{(0)}$, amely szerint deriváltunk, tartalmaz egy $(\kappa^2)^{-\varepsilon/2}$ faktort,

$$\Pi(\kappa^2, \Lambda^2, u_0) \sim (\kappa^2)^{\psi_\tau(u_0^*) - \frac{\varepsilon}{2}} \left[1 + F\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right)^{\omega/2} + \dots \right].\quad (6.83)$$

κ -t kifejezve még $t=(T-T_c)/T_c$ segítségével, végül

$$C_v(t) \sim t^{-\alpha}[1 + F' t^{\omega} + \dots], \quad (6.84)$$

ahol

$$\alpha = -2\nu \left[\psi_7(u_0^*) - \frac{\varepsilon}{2} \right] = -\frac{n-4}{2(n+8)}\varepsilon - \frac{(n+2)^2(n+28)}{4(n+8)^3}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.85)$$

A kapott eredmény kielégíti a

$$2 - \alpha = d\nu \quad (6.86)$$

skálátörvényt. Meg kell említenünk, hogy a fajhő exponensét a legtöbbször éppen ebből a skálátörvényből határozzák meg, nem pedig direkt úton. *Abrahams* és *Tsuneto* (publikálatlan) végzett a szkeleton gráfok segítségével direkt számolást α meghatározására.

Érdekes megemlíteni még, hogy a Π polarizációs operátor impulzusfüggését is vizsgálhatjuk hasonló módszerrel. A $\kappa^2=0$ esetben egy véges p külső impulzus mellett vizsgálva a polarizációs operátor gráfjait,

$$\begin{aligned} \Pi(p^2, \Lambda^2, u_0) = & -n K_d(p^2)^{-\varepsilon/2} \left\{ \left[f\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right) - 1 + \dots \right] + \right. \\ & + \frac{n+2}{12} u_0 K_d\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon/2} \left[f\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right) - 1 + \dots \right]^2 + \\ & + \left(\frac{n+2}{12}\right)^2 u_0^2 K_d^2\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon} \left[f\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right) - 1 + \dots \right]^3 + \\ & + \frac{n+2}{144} u_0^2 K_d^2\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon} \left[\ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} + \dots \right] + \\ & \left. + \frac{n+2}{48} u_0^2 K_d^2\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon} \left[\frac{2}{3} \ln^3 \frac{p^2}{\Lambda^2} - 4 \ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} + \dots \right] + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Ez a mennyiség sem renormálódik multiplikatíve a levágás skálázásakor. A nulladrendű járulék szerint differenciálva, viszont jól skálázódó mennyiséget kapunk. A számolást az előzőhöz teljesen hasonlóan elvégezve, végül azt kapjuk, hogy $p^2/\Lambda^2 \ll 1$ esetén

$$\Pi(p^2, \Lambda^2, u_0) \sim p^\lambda [1 + G p^\omega + \dots], \quad (6.88)$$

és

$$\lambda = \frac{n-4}{n+8}\varepsilon + \frac{(n+2)(13n+44)}{(n+8)^3}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (6.89)$$

A (6.83) és (6.88)-ban szereplő exponensek összehasonlításából adódik, hogy kis κ^2/Λ^2 , illetve kis p^2/Λ^2 esetén a κ - és p -függés azonos hatvánnyal megy, a Π függvény szimmetrikus. A perturbációs sor nem rendelkezik ezzel a szimmetriával, csak a sorok felösszegzése után aszimptotikusan jelenik meg a szimmetrikus viselkedés.

6.6. Korrekciók az átlagtér-elmélethez négydimenziós rendszerekben

Az előző fejezetekben a négydimenzióhoz közeli rendszereket vizsgáltuk, s az ott kapott exponens-értékekből megállapíthatjuk, hogy $\varepsilon=0$ esetén az exponensek a Landau-elmélet által jóslott értékeket veszik fel, s négy dimenziótól eltérve, alacsonyabb dimenziószám esetén a dimenziótól függő exponensek jelennek meg. Nem jelenti azonban ez azt, hogy négydimenziós modellekre az átlag-tér-elmélet egzakt és a fluktuációknak semmi szerepe nincs. A logaritmikus perturbációs korrekciók négydimenziós rendszereknél is jelen vannak, s azt várjuk, hogy ezek felösszegzéséből is megjelennek korrekciók a skálaviselkedéshez. *Wegner és Riedel (1973)* a Wilson-féle renormálási eljárással mutatták meg, hogy például a szuszceptibilitásban és a mágnesezettségben tört kitevőjű logaritmikus korrekciók jelennek meg.

A négydimenziós eset vizsgálata nem egészen akadémikus probléma, hiszen *Larkin és Hmelnyickij (1969)* megmutatta, hogy dipól–dipól kölcsönhatást tartalmazó egytengelyű anizotróp rendszerek, közönséges háromdimenziós rendszert véve, formálisan négydimenziós problémaként írhatók le, s ezekben a rendszerekben kísérletileg is megfigyelhető (*Ahlers, Kornblitt, Guggenheim 1975*) a törthatványú logaritmikus viselkedés.

A számolás pontosan ugyanúgy végezhető el, mint eddig, de minden perturbációs formulában $\varepsilon=0$ használandó. Ennek első következménye az, hogy az invariáns csatolásra vonatkozó egyenlet most

$$\frac{d u_R(s)}{ds} = \frac{u_R(s)}{s} \left\{ \frac{n+8}{12} u_R(s) K_4 - \frac{9n+42}{72} u_R^2(s) K_4^2 + \dots \right\}. \quad (6.90)$$

Az egyenletet iteratív módon megoldva,

$$K_4 u_R(s) = -\frac{12}{n+8} \frac{1}{\ln s} + 72 \frac{3n+14}{(n+8)^3} \frac{\ln |\ln s|}{\ln^2 s} + \dots \quad (6.91)$$

A csatolás fix-pontja $u_0^* = 0$ és ezért a Lie-egyenletekben a jobb oldalon, az eddigi gyakorlattól eltérően nem a fix-pont értékét kell beírunk, hanem ezeket a tagokat.

A d függvényre (6.15)-ben, az F függvényre (6.35)-ben, a $\bar{\Pi}$ -ra (6.80)-ban felírt Lie-egyenleteket most $\varepsilon=0$ esetére és a (6.91)-ben megadott renormált csatolással oldva meg, ezekre a mennyiségekre a következő kifejezést kapjuk:

$$d(x) = 1 - \frac{n+2}{(n+8)^2} \frac{1}{\ln x} + 6 \frac{(n+2)(3n+14)}{(n+8)^4} \frac{\ln |\ln x|}{\ln^2 x} + \dots, \quad (6.92)$$

$$d(y) = 1 - \frac{n+2}{(n+8)^2} \frac{1}{\ln y} + 6 \frac{(n+2)(3n+14)}{(n+8)^4} \frac{\ln |\ln y|}{\ln^2 y} + \dots, \quad (6.93)$$

$$F(y) = |\ln y|^{\frac{n+2}{n+8}} \left[1 + 6 \frac{(n+2)(3n+14)}{(n+8)^3} \frac{\ln |\ln y|}{\ln y} + \dots \right], \quad (6.94)$$

$$\bar{\Pi}(y) = |\ln y|^{-\frac{2n+2}{n+8}} \left[1 - 12 \frac{(n+2)(3n+14)}{(n+8)^3} \frac{\ln |\ln y|}{\ln y} + \dots \right]. \quad (6.95)$$

Ezekből a mennyiségekből visszaszámolva a Green-függvény impulzus- és hőmérsékletfüggésére, a koherenciahossz hőmérsékletfüggésére, valamint a fahő hőmérséklet-

függésére,

$$G(p^2) \sim \frac{1}{p^2} \left[1 - \frac{n+2}{(n+8)^2} \frac{1}{\ln \frac{p^2}{\Lambda^2}} + 6 \frac{(n+2)(3n+14)}{(n+8)^4} \frac{\ln \left| \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} \right|}{\ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2}} + \dots \right], \quad (6.96)$$

$$\chi(t) \sim t^{-1} |\ln t|^{\frac{n+2}{n+8}} \left[1 + 6 \frac{(n+2)(3n+14)}{(n+8)^3} \frac{\ln |\ln t|}{\ln t} + \dots \right], \quad (6.97)$$

$$\chi^2 \sim t |\ln t|^{-\frac{n+2}{n+8}} \left[1 - 6 \frac{(n+2)(3n+14)}{(n+8)^3} \frac{\ln |\ln t|}{\ln t} + \dots \right], \quad (6.98)$$

$$C_v(t) \sim \frac{n+8}{n-4} |\ln t|^{\frac{4-n}{n+8}} \left[1 - \frac{(n-4)(n^2-8n-68)}{(n+8)^3} \frac{\ln |\ln t|}{\ln t} + \dots \right]. \quad (6.99)$$

A fizikailag érdekes egytengelyű dipól—dipól—kölsönhatásos rendszerben $n=1$ és

$$C_v(t) \sim |\ln t|^{1/3} \left[1 - \frac{25}{81} \frac{\ln |\ln t|}{\ln t} + \dots \right]. \quad (6.100)$$

Az $|\ln t|^{1/3}$ függést kísérletileg valóban lehetett igazolni (Ahlers, Kornblitt, Guggenheim 1975). Brézin és Zinn-Justin (1976) azonban megmutatták, hogy a négydimenziós rendszer és a dipól—dipól kölsönhatásos rendszer közötti analógia nem teljes, csak a vezető logaritmikus járulékokra igaz. A $\ln |\ln t| / \ln t$ korrekció dipól-rendszerekben más faktorialis jelenik meg, mint a fenti számolásban.

6.7. Anizotróp modellek vizsgálata

Mágneses rendszerekre gondolva, az eddig vizsgált modell az izotróp Heisenberg-modell kritikus jelenségeinek leírására szolgálhat. Ugyanakkor jól tudjuk, hogy mindig van jelen valamilyen anizotrópia. Kérdés, hogy ez milyen befolyással lesz a kritikus jelenségek viselkedésére. A Wilson-féle renormalizációs eljárással ezt a problémát sokan vizsgálták, a legkülönbözőbb típusú anizotrópiákat nézve. Itt csak Fisher és Pfeuty (1972), Wegner (1972a), Aharony (1973), Ketley és Wallace (1973) és Wallace (1973) munkáit említem meg. Az értekezésben leírt új renormalizációs módszerrel is lehet az anizotróp rendszereket tárgyalni. Ebben a fejezetben köbös rendszerek példáján mutatom be az eljárást. A módszer alkalmazhatóságának bemutatásán túl a cél a következő fejezetek előkészítése, ott ugyanis bonyolult mágneses szerkezetű anyagok fázisátalakulásait vizsgáljuk.

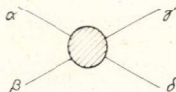
Egy köbös mágneses rendszerben negyedfokú tagként jelenhet meg legelőször az izotrópiától való eltérés

$$K[(S_i^x)^4 + (S_i^y)^4 + (S_i^z)^4] \quad (6.101)$$

alakban, ahol S_i^α az i . rácspontban ülő spin α komponense. Ezt általánosítva n -komponensű rendszerre és a folytonos $\varphi(x)$ mennyiségre, a köbös anizotrópiát leíró Hamilton-operátor

$$H = \int d^d x \left\{ \frac{r_0}{2} \varphi^2(x) + \frac{1}{2} [\nabla \varphi(x)]^2 + \frac{u_0}{4!} \Lambda^{\epsilon} [\varphi^2(x)]^2 + \frac{v_0}{4!} \Lambda^{\epsilon} \sum_{i=1}^n \varphi_i^4(x) \right\}. \quad (6.102)$$

A kétfajta csatolás miatt kétfajta vertexet kell definiálnunk. Egy



általános vertexnél, ahol α, β, γ és δ a komponensindexet jelöli, a következő struktúrát kapjuk:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = u_0 A^\varepsilon \tilde{\Gamma}_u (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + 3v_0 A^\varepsilon \tilde{\Gamma}_v \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\alpha\delta}, \quad (6.103)$$

s ezzel definiáljuk a dimenziótlan $\tilde{\Gamma}_u$ és $\tilde{\Gamma}_v$ vertexeket. A skálaegyenleteket ezekre a vertexekre és a dimenziótlan d függvényre írva fel

$$d\left(\frac{p^2}{A'^2}, \frac{\kappa^2}{A'^2}, u'_0, v'_0\right) = z_d\left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0\right) d\left(\frac{p^2}{A^2}, \frac{\kappa^2}{A^2}, u_0, v_0\right), \quad (6.104)$$

$$\tilde{\Gamma}_u\left(\frac{p_i^2}{A'^2}, \frac{\kappa^2}{A'^2}, u'_0, v'_0\right) = z_u^{-1}\left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0\right) \tilde{\Gamma}_u\left(\frac{p_i^2}{A^2}, \frac{\kappa^2}{A^2}, u_0, v_0\right), \quad (6.105)$$

$$\tilde{\Gamma}_v\left(\frac{p_i^2}{A'^2}, \frac{\kappa^2}{A'^2}, u'_0, v'_0\right) = z_v^{-1}\left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0\right) \tilde{\Gamma}_v\left(\frac{p_i^2}{A^2}, \frac{\kappa^2}{A^2}, u_0, v_0\right), \quad (6.106)$$

$$u'_0 = u_0 \left(\frac{A'^2}{A^2}\right)^{-\varepsilon/2} z_u\left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0\right) z_d^{-2}\left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0\right), \quad (6.107)$$

$$v'_0 = v_0 \left(\frac{A'^2}{A^2}\right)^{-\varepsilon/2} z_v\left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0\right) z_d^{-2}\left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0\right). \quad (6.108)$$

Első lépésként itt is azt ellenőriztük, vajon a perturbációs alak eleget tesz-e ezeknek az egyenleteknek. A $\kappa^2=0$ esetben írva fel a Green-függvényt és a vertexeket

$$d = 1 + \left(\frac{n+2}{18} u_0^2 + \frac{1}{3} u_0 v_0 + \frac{1}{6} v_0^2\right) K_d^2 \frac{1}{8} \ln \frac{p^2}{A^2} + \dots, \quad (6.109)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_u = & 1 + \left(\frac{n+8}{12} u_0 + \frac{1}{2} v_0\right) K_d \left(\frac{p^2}{A^2}\right)^{-\varepsilon/2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{A^2}\right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\} + \\ & + \left[\frac{n^2+6n+20}{36} u_0^2 + \frac{n+4}{4} u_0 v_0 + \frac{3}{4} v_0^2 \right] K_d^2 \frac{1}{4} \left(\frac{p^2}{A^2}\right)^{-\varepsilon} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{A^2}\right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\}^2 + \\ & + \left[\frac{5n+22}{9} u_0^2 + 4u_0 v_0 + v_0^2 \right] K_d^2 \frac{1}{4} \left(\frac{p^2}{A^2}\right)^{-\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{p^2}{A^2} - 2 \ln \frac{p^2}{A^2} + \dots \right] + \dots, \end{aligned} \quad (6.110)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_v = & 1 + \left(u_0 + \frac{3}{4} v_0\right) K_d \left(\frac{p^2}{A^2}\right)^{-\varepsilon/2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{A^2}\right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\} + \\ & + \left[u_0^2 + \frac{3}{2} u_0 v_0 + \frac{3}{4} v_0^2\right] K_d^2 \frac{1}{4} \left(\frac{p^2}{A^2}\right)^{-\varepsilon} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{A^2}\right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\}^2 + \\ & + \left[\frac{n+14}{3} u_0^2 + 8u_0 v_0 + 3v_0^2\right] K_d^2 \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{p^2}{A^2} - 2 \ln \frac{p^2}{A^2} + \dots \right] + \dots \end{aligned} \quad (6.111)$$

A skálaegyenletek teljesülnek ezekre a mennyiségekre és

$$\begin{aligned}
 u'_0 &= u_0 \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon/2} \left\{ 1 + \left(\frac{n+8}{12} u_0 + \frac{1}{2} v_0\right) K_d \frac{2}{\varepsilon} \left[1 - \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon/2} \right] + \right. \\
 &+ \left[\left(\frac{n+8}{12}\right)^2 u_0^2 + \frac{n+12}{16} u_0 v_0 + \frac{5}{16} v_0^2 \right] K_d^2 \ln^2 \frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2} - \\
 &\left. - \left[\frac{9n+42}{72} u_0^2 + \frac{11}{12} u_0 v_0 + \frac{5}{24} v_0^2 \right] K_d^2 \ln \frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2} + \dots \right\},
 \end{aligned} \tag{6.112}$$

$$\begin{aligned}
 v'_0 &= v_0 \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon/2} \left\{ 1 + \left(u_0 + \frac{3}{4} v_0\right) K_d \frac{2}{\varepsilon} \left[1 - \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}\right)^{-\varepsilon/2} \right] + \right. \\
 &+ \left[\frac{n+20}{24} u_0^2 + \frac{11}{8} u_0 v_0 + \frac{9}{16} v_0^2 \right] K_d^2 \ln^2 \frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2} - \\
 &\left. - \left[\frac{5n+82}{72} u_0^2 + \frac{23}{12} u_0 v_0 + \frac{17}{24} v_0^2 \right] K_d^2 \ln \frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2} + \dots \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.113}$$

Teljesen hasonlóan, $p^2=0$ esetén csak κ^2 -függést véve, ugyanez az eredmény adódott, skálázási feltevésünk a perturbációs sorra valóban teljesül.

A Lie-differenciálegyenleteket felírva az invariáns töltésekre

$$\begin{aligned}
 \frac{d u_R(s)}{ds} &= \frac{u_R(s)}{s} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n+8}{12} u_R(s) K_d + \frac{1}{2} v_R(s) K_d - \right. \\
 &\left. - \frac{9n+42}{72} u_R^2(s) K_d^2 - \frac{11}{12} u_R(s) v_R(s) K_d^2 - \frac{5}{24} v_R^2(s) K_d^2 + \dots \right\},
 \end{aligned} \tag{6.114}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d v_R(s)}{ds} &= \frac{v_R(s)}{s} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} + u_R(s) K_d + \frac{3}{4} v_R(s) K_d - \right. \\
 &\left. - \frac{5n+82}{72} u_R^2(s) K_d^2 - \frac{23}{12} u_R(s) v_R(s) K_d^2 - \frac{17}{24} v_R^2(s) K_d^2 + \dots \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.115}$$

Ezeket az egyenleteket kis s értékekre megoldva, a következő alakú megoldásokat kapjuk:

$$u_R(s) = u_0^* + A_u s^{\omega_1/2} + B_u s^{\omega_2/2} + \dots, \tag{6.116}$$

$$v_R(s) = v_0^* + A_v s^{\omega_1/2} + B_v s^{\omega_2/2} + \dots. \tag{6.117}$$

A fix-pont értékekre és a fix-ponthoz tartást megadó ω_i exponensekre négyféle megoldás adódik

$$1) u_0^* = v_0^* = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = -\varepsilon, \quad (6.118)$$

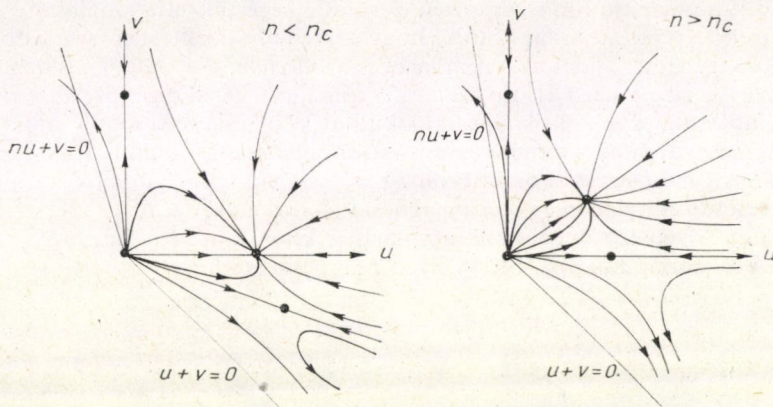
$$2) u_0^* = 0, \quad K_d v_0^* = \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{34}{81} \varepsilon^2 + \dots, \\ \omega_1 = -\frac{\varepsilon}{3} + \frac{19}{81} \varepsilon^2 + \dots, \quad \omega_2 = \varepsilon - \frac{17}{27} \varepsilon^2 + \dots, \quad (6.119)$$

$$3) K_d u_0^* = \frac{6}{n+8} \varepsilon \left[1 + \varepsilon \frac{9n+42}{(n+8)^2} \right] + \dots, \quad v_0^* = 0, \\ \omega_1 = \varepsilon - \frac{9n+42}{(n+8)^2} \varepsilon^2 + \dots, \quad \omega_2 = \frac{4-n}{n+8} \varepsilon - \frac{5n^2+14n+152}{(n+8)^3} \varepsilon^2 + \dots, \quad (6.120)$$

$$4) K_d u_0^* = \frac{2}{n} \varepsilon + \frac{2}{27n^3} (n-1)(-19n+106) \varepsilon^2 + \dots, \\ K_d v_0^* = \frac{2(n-4)}{3n} \varepsilon + \frac{2}{81n^3} (n-1)(17n^2+110n-424) \varepsilon^2 + \dots, \\ \omega_1 = \varepsilon + \frac{1}{27n^2(n+2)} (n-1)(-17n^2+4n-212) \varepsilon^2 + \dots, \quad (6.121) \\ \omega_2 = \frac{n-4}{3n} \varepsilon + \frac{1}{81n^3(n+2)} (n-1)(-19n^3+72n^2+660n-848) \varepsilon^2 + \dots$$

Ezek az eredmények mind megegyeznek *Aharony* (1973) eredményeivel. A probléma érdekessége, hogy a korábbi egy fix-pont helyett négy fix-pontot kaptunk az (u_R, v_R) síkon. Feladatunk még annak az eldöntése, hogy a csatolások meghatározott fizikai értékéből kiindulva a skálázás melyik fix-pont értékhez vezet. Ehhez legcélszerűbb az (u_R, v_R) síkon felrajzolni az ekvivalens problémák skálagörbét. Az 5. ábrán két különböző komponensszám esetén mutatjuk be a skálázási trajektóriákat. A skálagörbéken a nyilak azt jelölik, hogy a levágás csökkentésével hova skálázódik az eredeti probléma. Az ábrából leolvashatóan, attól a speciális esettől eltekintve, amikor $u_0=0$ vagy $v_0=0$, egy bizonyos kritikus n_c komponensszámnál kisebb komponensszámú rendszer esetén a harmadik megoldásnak megfelelő úgynevezett izotróp fix-pontba skálázunk, a köbös anizotrópia nem befolyásolja a kritikus viselkedést, míg n_c -nél nagyobb komponensszámú rendszereknél a negyedik megoldásnak megfelelő úgynevezett köbös fix-pontba skálázunk. Az ε -sorfejtésből nem lehet biztos konklúziót levonni arra vonatkozóan, vajon $d=3$ ($\varepsilon=1$) esetén mennyi n_c értéke ($\varepsilon=0$ -nál $n_c=4$). Amennyiben $n_c \leq 3$, köbös anizotrópiával rendelkező rendszereknél a kritikus exponensek különbözni fognak az izotróp rendszerekre meghatározott értéktől. Az ellenkező esetben viszont a köbös anizotrópiának nincs hatása a kritikus pont közelében.

Egy fix-pontot, melybe minden irányból befutnak a skálavonalak, stabilis fix-pontnak nevezük. Ha csak egy egyenes mentén lehet bejutni, mint a második megoldásnak megfelelő fix-pontba, vagy minden irányban kifutnak a vonalak, mint az első megoldásnak megfelelő triviális fix-pont esetén, akkor a fix-pontot instabilisnak nevezük. A fix-pontok stabilitását vagy instabilitását a skálagörbék fölrajzolásánál, az ω_i exponensek ismeretében rögtön meg tudjuk mondani. Egy fix-pont akkor stabilis, ha a fix-ponthoz tartozó összes ω_i exponens pozitív. A következő fejezetben ennek a segítségével fogom a fix-pontok stabilitását vizsgálni.



5. ábra. Kőbös anizotróp rendszer skálagörbéi két különböző komponensszám esetén

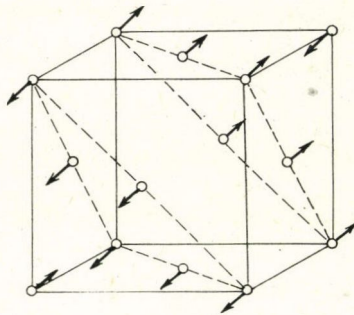
6.8. Elsőrendű mágneses átalakulások értelmezése

Az eddigiekben mindig másodrendű átalakulásokról volt szó. Mágneses rendszereknél azonban elég gyakran találkozunk elsőrendű átalakulással is. Az elsőrendű fázisátalakulásokra nincs jól kidolgozott elmélet, s a renormálási csoport módszerrel sem sikerült közelebb jutni a jelenség megértéséhez. Egy probléma vizsgálatában azonban történt előrehaladás. Vannak olyan elsőrendű paramágneses-antiferromágneses átalakulások, melyek a szimmetriamegfontolásokon alapuló Landau-elmélet (Landau 1937) szerint másodrendűek lehetnének. Sokáig nem lehetett érteni, hogy milyen ok miatt lesz mégis elsőrendű az átalakulás. Tipikus példa ilyen elsőrendű átalakulásra a MnO és UO_2 paramágneses—mágneses átalakulása. Először *Brazovszkij* és *Dzjalosinszkij* (1975) mutatott rá arra, hogy a Landau-elméletben elhagyott fluktuációk vezetnek arra, hogy az átalakulás elsőrendű. *Bak*, *Krinsky* és *Mukamel* (1976a) ettől függetlenül jutott hasonló következtetésre, s ők (*Mukamel* és *Krinsky* 1976a, b, *Bak* és *Mukamei* 1976) szisztematikusan végignézték minden ismert elsőrendű átalakulást, s minden olyan esetet, ahol elsőrendű átalakulás várható. Ily módon mindenfajta új kölcsönhatási mechanizmus bevezetése nélkül, csak a fluktuációk figyelembevételével sikerült értelmezni az esetek nagy részét.

Az elgondolás a következő: a reális kristálytani szimmetriának megfelelő Hamilton-operátort felírva, abban több csatolási állandó szerepelhet, s a csatolási állandók terében többféle fix-pontot kaphatunk. Előfordulhat azonban, hogy ezen fix-pontok egyike sem stabilis, vagyis skálázásnál a trajektóriák nem futnak be egyik fix-pontba

sem. Ebben az esetben nem kaphatunk másodrendű átalakulást, s az átalakulás elsőrendű lesz. A feladat tehát először a kristálytani szimmetriának megfelelő Hamilton-operátor felírása, ezután a fix-pontok megkeresése, majd azok stabilitásának vizsgálata. Mindezt ε -sorfejtésben lehet megtenni, s abból extrapolálni a háromdimenziós esetnek megfelelő $\varepsilon=1$ -re. *Brazovszkij és Dzjalosinszkij (1975)*, majd *Brazovszkij, Dzjalosinszkij és Kuharenko (1976)* számolásai és *Mukamel, Krinsky és Bak (Mukamel és Krinsky 1976a, b, Bak és Mukamel 1976)* számolásainak nagy része is ε -ban lineáris rendig történt. Természetesen vetődik fel a kérdés, mennyire lehet ebből az $\varepsilon=1$ esetre következtetni. Löserrel (*Löser és Sólyom 1978*) közösen ezt vizsgálva, két különböző szimmetriájú rendszer esetén ε^2 rendig végeztük el a számolást. Az eredményt előrebecsátva, megállapítottuk, hogy ε^2 rendig közelítésben sem adódik stabilis fix-pont, tehát az átalakulás nem lehet másodrendű.

Először az úgynevezett II. típusú antiferromágneseket vizsgáltuk. Ez a mágneses szerkezet lapcentrált köbös kristályban alakulhat ki. A csúcson és a lapközepeken fekvő mágneses atomok momentumát a kölcsönhatás úgy csatolja össze, hogy az egyik térátlóra merőleges síkokon belül az egy síkban fekvő atomok momentumai ferromágnesesen csatolódnak egy ferromágneses síkot adnak, azonban a térátló mentén egymás után következő ilyen síkok egymáshoz képest antiferromágnesesen vannak csatolva. A 6. ábrán mutatok be egy ilyen mágneses szerkezetet.



6. ábra. II-típusú antiferromágneses szerkezet

Szimmetria-megfontolásokból belátható, hogy a momentumok vagy a ferromágneses síkra merőlegesen, vagy a síkban fekszenek, közbenső helyzet nem lehetséges. Mi azt az esetet vizsgáltuk, amikor a momentumok merőlegesen a ferromágneses síkra. Ebben az esetben egy négykomponensű rendparaméter írja le a rendszert a négyfajta térátlónak, illetve a ferromágneses sík négyfajta ekvivalens orientációjának megfelelően. A Hamilton-operátornak a rendparaméterből úgy kell felépülnie, hogy a paramágneses fázis tércsoportjának szimmetriaelemei invariánsul hagyják, így egyszerű szimmetria-megfontolásokkal a következő adódik:

$$H = \int d^d x \left\{ \frac{r_0}{2} \varphi^2(x) + \frac{1}{2} [\nabla \varphi(x)]^2 + \frac{u_0}{4!} A^\varepsilon [\varphi^2(x)]^2 + \right. \\ \left. + \frac{v_0}{4!} A^\varepsilon \sum_{i=1}^4 \varphi_i^4(x) + w_0 A^\varepsilon \varphi_1(x) \varphi_2(x) \varphi_3(x) \varphi_4(x) \right\}. \quad (6.122)$$

Ugyanúgy kell eljárunk, mint a köbös anizotropia tárgyalásánál. A háromfajta csatolás miatt azonban most három vertexet kell definiálnunk, éspedig a következőképpen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = & u_0 A^\varepsilon \tilde{\Gamma}_u (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + 3v_0 A^\varepsilon \tilde{\Gamma}_v \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\alpha\delta} + \\ & + 3w_0 A^\varepsilon \tilde{\Gamma}_w (1 - \delta_{\alpha\beta})(1 - \delta_{\alpha\gamma})(1 - \delta_{\alpha\delta})(1 - \delta_{\beta\gamma})(1 - \delta_{\beta\delta})(1 - \delta_{\gamma\delta}). \end{aligned} \quad (6.123)$$

A skálaegyenletek pedig ennek megfelelően a következők:

$$d\left(\frac{p^2}{A'^2}, \frac{\kappa^2}{A'^2}, u'_0, v'_0, w'_0\right) = z_d \left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right) d\left(\frac{p^2}{A^2}, \frac{\kappa^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right), \quad (6.124)$$

$$\tilde{\Gamma}_u\left(\frac{p_i^2}{A'^2}, \frac{\kappa^2}{A'^2}, u'_0, v'_0, w'_0\right) = z_u^{-1} \left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right) \tilde{\Gamma}_u\left(\frac{p_i^2}{A^2}, \frac{\kappa^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right), \quad (6.125)$$

$$\tilde{\Gamma}_v\left(\frac{p_i^2}{A'^2}, \frac{\kappa^2}{A'^2}, u'_0, v'_0, w'_0\right) = z_v^{-1} \left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right) \tilde{\Gamma}_v\left(\frac{p_i^2}{A^2}, \frac{\kappa^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right), \quad (6.126)$$

$$\tilde{\Gamma}_w\left(\frac{p_i^2}{A'^2}, \frac{\kappa^2}{A'^2}, u'_0, v'_0, w'_0\right) = z_w^{-1} \left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right) \tilde{\Gamma}_w\left(\frac{p_i^2}{A^2}, \frac{\kappa^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right), \quad (6.127)$$

$$u'_0 A'^\varepsilon = u_0 A^\varepsilon z_u \left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right) z_d^{-2} \left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right), \quad (6.128)$$

$$v'_0 A'^\varepsilon = v_0 A^\varepsilon z_v \left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right) z_d^{-2} \left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right), \quad (6.129)$$

$$w'_0 A'^\varepsilon = w_0 A^\varepsilon z_w \left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right) z_d^{-2} \left(\frac{A'^2}{A^2}, u_0, v_0, w_0\right). \quad (6.130)$$

Ezeket a skálaegyenleteket a perturbációs kifejezések felhasználásával ellenőriztük, mind p^2 -, mind κ^2 -függést véve. A vertexek és a Green-függvény alakját a függelékben adjuk meg. Az analitikus alakok ismeretében a skálaegyenletek ellenőrzése egyszerű algebrai feladat. A skálaegyenletek valóban teljesülnek csak a levágástól függő multiplikatív szorzókkal. Az invariáns csatolásokra végül a következő

perturbációs kifejezést kapjuk:

$$u'_0 = u_0 \left(\frac{A'^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon/2} \left\{ 1 + \left(2u_0 + v_0 + 6 \frac{w_0^2}{u_0} \right) \frac{1}{2} K_d \frac{2}{\varepsilon} \left[1 - \left(\frac{A'^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon/2} \right] + \right. \\ \left. + \left(u_0^2 + u_0 v_0 + \frac{5}{16} v_0^2 + \frac{21}{4} w_0^2 + \frac{3}{4} \frac{v_0 w_0^2}{u_0} \right) K_d^2 \ln^2 \frac{A'^2}{A^2} - \right. \\ \left. - \left(\frac{13}{12} u_0^2 + \frac{11}{12} u_0 v_0 + \frac{5}{24} v_0^2 + \frac{29}{4} w_0^2 + \frac{3}{2} \frac{v_0 w_0^2}{u_0} \right) K_d^2 \ln \frac{A'^2}{A^2} + \dots \right\}, \quad (6.131)$$

$$v'_0 = v_0 \left(\frac{A'^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon/2} \left\{ 1 + \left(2u_0 + \frac{3}{2} v_0 - 6 \frac{w_0^2}{v_0} \right) \frac{1}{2} K_d \frac{2}{\varepsilon} \left[1 - \left(\frac{A'^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon/2} \right] + \right. \\ \left. + \left(u_0^2 + \frac{11}{8} u_0 v_0 + \frac{9}{16} v_0^2 - \frac{9}{2} \frac{u_0 w_0^2}{v_0} - \frac{3}{4} w_0^2 \right) K_d^2 \ln^2 \frac{A'^2}{A^2} - \right. \\ \left. - \left(\frac{17}{12} u_0^2 + \frac{23}{12} u_0 v_0 + \frac{17}{24} v_0^2 - 6 \frac{u_0 w_0^2}{v_0} - \frac{7}{4} w_0^2 \right) K_d^2 \ln \frac{A'^2}{A^2} + \dots \right\}, \quad (6.132)$$

$$w'_0 = w_0 \left(\frac{A'^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon/2} \left\{ 1 + u_0 K_d \frac{2}{\varepsilon} \left[1 - \left(\frac{A'^2}{A^2} \right)^{-\varepsilon/2} \right] + \right. \\ \left. + \left(u_0^2 + \frac{1}{4} u_0 v_0 + \frac{3}{2} w_0^2 \right) K_d^2 \ln^2 \frac{A'^2}{A^2} - \right. \\ \left. - \left(\frac{17}{12} u_0^2 + \frac{5}{12} u_0 v_0 - \frac{1}{24} v_0^2 + \frac{5}{4} w_0^2 \right) K_d^2 \ln \frac{A'^2}{A^2} + \dots \right\}. \quad (6.133)$$

A perturbációs alak alapján felírva a Lie-egyenleteket, az invariáns csatolásokra az alábbi egyenletek adódnak:

$$\frac{du_R(s)}{ds} = \frac{u_R(s)}{s} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} + \left(u_R + \frac{1}{2} v_R + 3 \frac{w_R^2}{u_R} \right) K_d - \right. \\ \left. - \left(\frac{13}{12} u_R^2 + \frac{11}{12} u_R v_R + \frac{5}{24} v_R^2 + \frac{29}{4} w_R^2 + \frac{3}{2} \frac{v_R w_R^2}{u_R} \right) K_d^2 + \dots \right\}, \quad (6.134)$$

$$\frac{dv_R(s)}{ds} = \frac{v_R(s)}{s} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} + \left(u_R + \frac{3}{4} v_R - 3 \frac{w_R^2}{v_R} \right) K_d - \right. \\ \left. - \left(\frac{17}{12} u_R^2 + \frac{23}{12} u_R v_R + \frac{17}{24} v_R^2 - 6 \frac{u_R w_R^2}{v_R} - \frac{7}{4} w_R^2 \right) K_d^2 + \dots \right\}, \quad (6.135)$$

$$\frac{dw_R(s)}{ds} = \frac{w_R(s)}{s} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} + u_R K_d - \right. \\ \left. - \left(\frac{17}{12} u_R^2 + \frac{5}{12} u_R v_R - \frac{1}{24} v_R^2 + \frac{5}{4} w_R^2 \right) K_d^2 + \dots \right\}. \quad (6.136)$$

Az egyenletek megoldását

$$u_R(s) = u_0^* + A_u s^{\omega_1/2} + B_u s^{\omega_2/2} + C_u s^{\omega_3/2} + \dots, \quad (6.137)$$

$$v_R(s) = v_0^* + A_v s^{\omega_1/2} + B_v s^{\omega_2/2} + C_v s^{\omega_3/2} + \dots, \quad (6.138)$$

$$w_R(s) = w_0^* + A_w s^{\omega_1/2} + B_w s^{\omega_2/2} + C_w s^{\omega_3/2} + \dots \quad (6.139)$$

alakban keresve, hatféle megoldást kapunk:

$$1) u_0^* = v_0^* = w_0^* = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = -\varepsilon, \quad (6.140)$$

$$2) u_0^* = w_0^* = 0, \quad K_d v_0^* = \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{34}{81} \varepsilon^2,$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{3} \varepsilon + \frac{19}{81} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = \varepsilon - \frac{17}{27} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = -\varepsilon + \frac{1}{27} \varepsilon^2, \quad (6.141)$$

$$3) K_d u_0^* = \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{13}{48} \varepsilon^2, \quad v_0^* = w_0^* = 0,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{13}{24} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = -\frac{1}{6} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = -\frac{1}{6} \varepsilon^2, \quad (6.142)$$

$$4) K_d u_0^* = \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{5}{48} \varepsilon^2, \quad K_d v_0^* = \frac{1}{3} \varepsilon^2, \quad w_0^* = 0,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{13}{24} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = \frac{1}{6} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = -\frac{1}{2} \varepsilon^2, \quad (6.143)$$

$$5) K_d u_0^* = \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{17}{48} \varepsilon^2, \quad K_d v_0^* = -\frac{1}{6} \varepsilon^2, \quad K_d w_0^* = \pm \frac{1}{12} \varepsilon^2,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{13}{24} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = \frac{1}{6} \varepsilon^2, \quad (6.144)$$

$$6) K_d u_0^* = \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{17}{54} \varepsilon^2, \quad K_d v_0^* = -\frac{1}{3} \varepsilon - \frac{17}{81} \varepsilon^2, \quad K_d w_0^* = \pm \left(\frac{1}{6} \varepsilon + \frac{17}{162} \varepsilon^2 \right),$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{17}{27} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = -\varepsilon + \frac{1}{27} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = -\frac{1}{3} \varepsilon + \frac{19}{81} \varepsilon^2. \quad (6.145)$$

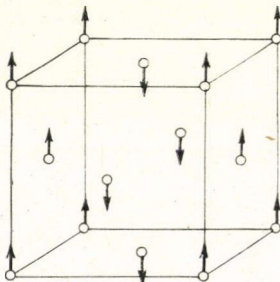
Az ω_i exponensekből leolvashatóan egyik fix-pont sem stabilis, mindig van legalább egy negatív ω_i . Az ε^2 rendű korrekciók mindig pozitív együtthatóval szerepelnek ezekben a negatív ω_i -kben, de $\varepsilon=1$ esetén még mindig negatív az érték. Azt a következtetést vonhatjuk le, hogy nemcsak ε -ban lineáris, hanem ε -ban négyzetes rendig sem stabilis egyik fix-pont sem. Ez megerősíti azt a konklúziót, hogy ez a mágneses rendszer csak elsőrendű átalakulással alakulhat ki a paramágneses fázisból.

Még egy rendszert vizsgáltunk, mégpedig egy I-típusú antiferromágnest. Ez is lapcentrált köbös struktúrában alakul ki, de a ferromágneses síkok most az egyik élre merőlegesen. Azt az esetet vizsgáljuk, amikor a mágneses momentumok benne vannak a ferromágneses síkokban. Egy ilyen szerkezetet mutat a 7. ábra.

A ferromágneses síkoknak három ekvivalens elhelyezkedése lehetséges, a három élre merőlegesen, egy síkon belül pedig a momentumot a két komponensével adhatjuk meg, ezért végül is egy hatkomponensű rendparaméter írja le ezt a rendszert. A szimmetria-követelményeknek megfelelő Hamilton-operátor:

$$\begin{aligned}
 H = \int d^d x \left\{ \frac{r_0}{2} \varphi^2(x) + \frac{1}{2} [\nabla \varphi(x)]^2 + \frac{u_0}{4!} A^\epsilon [\varphi^2(x)]^2 + \frac{v_0}{4!} A^\epsilon \sum_{i=1}^6 \varphi_i^4(x) + \right. \\
 + \frac{w_1}{12} A^\epsilon (\varphi_1^2(x) \varphi_4^2(x) + \varphi_3^2(x) \varphi_2^2(x) + \varphi_5^2(x) \varphi_6^2(x)) + \\
 + \frac{w_2}{12} A^\epsilon (\varphi_1^2(x) \varphi_6^2(x) + \varphi_3^2(x) \varphi_4^2(x) + \varphi_5^2(x) \varphi_2^2(x)) + \\
 \left. + \frac{w_3}{12} A^\epsilon (\varphi_1^2(x) \varphi_2^2(x) + \varphi_3^2(x) \varphi_6^2(x) + \varphi_5^2(x) \varphi_4^2(x)) \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.146}$$

Az ötfajta csatolásnak megfelelően ötfajta vertexet kell definiálnunk, a skálaegyenleteket is ennek megfelelően minden csatolásra és vertexre más z faktossal kell felírunk. Minden formulát a függelékre hagyva itt csak azt említjük meg, hogy 20 különböző megoldást találtunk a fix-pont egyenletre, de ezek közül egyik sem stabilis sem ϵ , sem ϵ^2 rendben. A kísérletileg jól ismert UO_2 ilyen antiferromágneses struktúrával rendelkezik, így elméleti magyarázat van arra, miért tapasztaltak elsőrendű fázisátalakulást a mágneses szerkezet kialakulásánál.



7. ábra. I-típusú antiferromágneses szerkezet

A fentiekkel kapcsolatban egy általános tételre érdemes felhívni a figyelmet. *Brézin, Le Guillou és Zinn-Justin* (1974b) bebizonyította, hogy ϵ -ban lineáris rendig mindig létezik legalább egy stabilis fix-pont, mégpedig az izotróp esetnek megfelelő fix-pont, amennyiben a komponensek száma négynél kevesebb. A fluktuációk tehát csak olyan rendszerben tudják az átalakulást elsőrendűvé tenni, amelyben a komponensek száma legalább négy. A fentiekben valóban ilyen eseteket vizsgáltunk.

6.9. Az átalakulás rendjének változása nyomás alatt

Az előző fejezetben arra láttunk példát, hogy köbös mágneses rendszerekben a rendparaméter komponenseinek a száma elég nagy lehet, nagyobb mint négy, s a fluktuációk úgy felerősödhetnek, hogy bennük másodrendű fázisátalakulás nem játszódhat le. Alacsonyabb szimmetriájú, tetragonális vagy ortorombos esetben például, a kritikus komponensek száma mindig kisebb négynél, mindig létezik stabilis fix-pont, s a fázisátalakulás másodrendű lehet. Köbös rendszert nem izotróp

módon megnyomva a köbös szimmetria elromlik, s várható, hogy az egyébként elsőrendű mágneses fázisátalakulás a külső nyomás hatására másodrendűvé válik.

Az átalakulás rendjének megváltozása nem izotróp nyomás esetén kísérletileg is megfigyelt jelenség. *Bloch* és munkatársai (1975) megmutatták, hogy nagy nyomáson MnO mágneses fázisátalakulása másodrendű átalakulás, míg nyomás nélkül elsőrendű. *Bak*, *Krinsky* és *Mukamel* (1976b) a fent vázolt módon elvileg értelmezte a jelenséget, de nem adott matematikai leírást, mely például választ adhatna arra, vajon a köbös szimmetriát elrontó tetszőlegesen kis nyomás másodrendűvé tudja-e tenni az átalakulást, vagy csak egy kritikus nyomás felett válik az átalakulás másodrendűvé.

Ezt a problémát Gresttel (*Sólyom* és *Grest* 1977) vizsgáltam. Konkrét példaként az UO_2 mágneses szerkezetének megfelelő I.-típusú antiferromágneses rendszert vizsgáltuk. Ez az előző fejezet végén említett hatkomponensű rendszer. Az MnO-nak megfelelő nyolckomponensű rendszert az itt leírtakhoz teljesen hasonlóan lehet tárgyalni. Az egyik kristálytani él irányában alkalmazott nyomást tételezve fel, az eddig ekvivalens hat komponens kettes csoportokra bomlik fel, s csak két komponens lesz kritikus, ezekre lesz végtelen nagy a fluktuáció. A másik négy komponensre a fluktuációk végesek maradnak, de kis nyomás esetén a nagy fluktuációk befolyásolhatják a kritikus viselkedést. Éppen ezt a befolyást kívánjuk matematikailag leírni.

A nyomás alatt tetragonálissá váló rendszer szimmetriájának megfelelő Hamilton-operátor

$$\begin{aligned}
 H = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} r_{01} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2} [(\nabla\varphi_1)^2 + (\nabla\varphi_2)^2] + \right. \\
 + \frac{1}{2} r_{02} (\varphi_3^2 + \varphi_4^2) + \frac{1}{2} [(\nabla\varphi_3)^2 + (\nabla\varphi_4)^2] + \\
 + \frac{1}{2} r_{03} (\varphi_5^2 + \varphi_6^2) + \frac{1}{2} [(\nabla\varphi_5)^2 + (\nabla\varphi_6)^2] + \\
 + \frac{1}{4!} g_1 A^\varepsilon (\varphi_1^4 + \varphi_2^4) + \frac{1}{4!} g_2 A^\varepsilon (\varphi_3^4 + \varphi_4^4) + \frac{1}{4!} g_3 A^\varepsilon (\varphi_5^4 + \varphi_6^4) + \\
 + \frac{1}{12} g_4 A^\varepsilon (\varphi_1^2 \varphi_4^2 + \varphi_3^2 \varphi_2^2) + \frac{1}{12} g_5 A^\varepsilon \varphi_5^2 \varphi_6^2 + \\
 + \frac{1}{12} g_6 A^\varepsilon (\varphi_1^2 \varphi_6^2 + \varphi_5^2 \varphi_2^2) + \frac{1}{12} g_7 A^\varepsilon \varphi_3^2 \varphi_4^2 + \\
 + \frac{1}{12} g_8 A^\varepsilon (\varphi_5^2 \varphi_4^2 + \varphi_3^2 \varphi_6^2) + \frac{1}{12} g_9 A^\varepsilon \varphi_1^2 \varphi_2^2 + \\
 + \frac{1}{12} g_{10} A^\varepsilon (\varphi_1^2 \varphi_3^2 + \varphi_2^2 \varphi_4^2) + \frac{1}{12} g_{11} A^\varepsilon (\varphi_1^2 \varphi_5^2 + \varphi_2^2 \varphi_6^2) + \\
 \left. + \frac{1}{12} g_{12} A^\varepsilon (\varphi_3^2 \varphi_5^2 + \varphi_4^2 \varphi_6^2) \right\}. \tag{6.147}
 \end{aligned}$$

Abból a feltételből, hogy a külső feszültség eltűnésekor vissza kell kapnunk a (6.146)-ban megadott Hamilton-operátort, következik, hogy a nyomás eltűnésével

$$\begin{aligned}
 r_{01}, r_{02}, r_{03} &\rightarrow r_0 \\
 g_1, g_2, g_3 &\rightarrow u_0 + v_0 \\
 g_4, g_5 &\rightarrow u_0 + w_1 \\
 g_6, g_7 &\rightarrow u_0 + w_2 \\
 g_8, g_9 &\rightarrow u_0 + w_3 \\
 g_{10}, g_{11}, g_{12} &\rightarrow u_0
 \end{aligned} \tag{6.148}$$

Látni fogjuk, hogy a nyomás hatásának vizsgálatánál nem annyira a csatolások felhasadása és megsokszorozódása számít, mint r_0 felhasadása.

A korábban mindig alkalmazott eljárásnak megfelelően most is elvégezzünk egy tömegrenormálást, bevezetve κ^2 -t, de a három különböző r_{0i} -nek megfelelően három κ_i^2 -t kell definiálnunk. Azt követeljük meg, hogy a φ_1 és φ_2 komponensnek megfelelő G_1 Green-függvény a $p^2 = -\kappa_1^2$ helyen legyen szinguláris,

$$G_1^{-1}(p^2, \kappa_1^2, \kappa_2^2, \kappa_3^2, g_i)|_{p^2 = -\kappa_1^2} = 0. \tag{6.149}$$

Hasonlóan a φ_3 és φ_4 -nek megfelelő G_2 Green-függvényre teljesüljön

$$G_2^{-1}(p^2, \kappa_1^2, \kappa_2^2, \kappa_3^2, g_i)|_{p^2 = -\kappa_2^2} = 0, \tag{6.150}$$

a φ_5 és φ_6 -nak megfelelő G_3 Green-függvényre pedig

$$G_3^{-1}(p^2, \kappa_1^2, \kappa_2^2, \kappa_3^2, g_i)|_{p^2 = -\kappa_3^2} = 0. \tag{6.151}$$

Az így definiált három κ_i közül csak egy fog eltűnni T_c -ben, mégpedig a két kritikus komponensnek megfelelő κ_i , a másik két κ_i véges marad. Fel fogjuk tenni, hogy φ_1 és φ_2 a kritikus komponens, κ_1 tűnik el T_c -ben. Ezután meg lehet mutatni, hogy κ_1^2 , κ_2^2 és κ_3^2 értékétől függetlenül a skálaegyenletek most is igazak, csak a háromféle Green-függvénynek és a 12 csatolásnak megfelelően 27 egyenletet kellene felírni. A három Green-függvény három dimenziótlan d_i -re vezet a

$$d_i = G_i/G_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{6.152}$$

definíció alapján. Ezekre a skálaegyenlet:

$$\begin{aligned}
 d_i \left(\frac{p^2}{\Lambda'^2}, \frac{\kappa_1^2}{\Lambda'^2}, \frac{\kappa_2^2}{\Lambda'^2}, \frac{\kappa_3^2}{\Lambda'^2}, g'_1, \dots, g'_{12} \right) = \\
 = z_{di} \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right) d_i \left(\frac{p^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_1^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_2^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_3^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right).
 \end{aligned} \tag{6.153}$$

A vertexekre és csatolásokra vonatkozó skálaegyenletekből csak két-két tipikus példát írok fel:

$$\tilde{\Gamma}_1 \left(\frac{p_i^2}{\Lambda'^2}, \frac{\kappa_1^2}{\Lambda'^2}, \frac{\kappa_2^2}{\Lambda'^2}, \frac{\kappa_3^2}{\Lambda'^2}, g'_1, \dots, g'_{12} \right) = \quad (6.154)$$

$$= z_1^{-1} \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right) \tilde{\Gamma}_1 \left(\frac{p_i^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_1^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_2^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_3^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right),$$

$$g'_1 = g_1 \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2} \right)^{-\varepsilon/2} z_1 \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right) z_{d1}^{-2} \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right), \quad (6.155)$$

$$\tilde{\Gamma}_4 \left(\frac{p_i^2}{\Lambda'^2}, \frac{\kappa_1^2}{\Lambda'^2}, \frac{\kappa_2^2}{\Lambda'^2}, \frac{\kappa_3^2}{\Lambda'^2}, g'_1, \dots, g'_{12} \right) = \quad (6.156)$$

$$= z_4^{-1} \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right) \tilde{\Gamma}_4 \left(\frac{p_i^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_1^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_2^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_3^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right),$$

$$g'_4 = g_4 \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2} \right)^{-\varepsilon/2} z_4 \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right) \times \quad (6.157)$$

$$\times z_{d1}^{-1} \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right) z_{d2}^{-1} \left(\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right).$$

Ezeket a skálaegyenleteket addig értelmes használni, míg az új levágás, Λ' nagyobb a tömegek bármelyikénél. A vizsgált rendszerünkben T_c közelében $\kappa_1 \ll \ll \kappa_2, \kappa_3$, feltesszük még például, hogy $\kappa_2 < \kappa_3$. Λ skálázásban ekkor $\Lambda' = \kappa_3$ -nál megállunk. A skálaegyenletekbe ezt beírva

$$d_i \left(\frac{p^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_1^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_2^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_3^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right) = \quad (6.158)$$

$$= z_{di}^{-1} \left(\frac{\kappa_3^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right) d_i \left(\frac{p^2}{\kappa_3^2}, \frac{\kappa_1^2}{\kappa_3^2}, \frac{\kappa_2^2}{\kappa_3^2}, 1, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{12} \right),$$

$$\tilde{\Gamma}_1 \left(\frac{p_i^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_1^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_2^2}{\Lambda^2}, \frac{\kappa_3^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right) = \quad (6.159)$$

$$= z_1 \left(\frac{\kappa_3^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right) \tilde{\Gamma}_1 \left(\frac{p_i^2}{\kappa_3^2}, \frac{\kappa_1^2}{\kappa_3^2}, \frac{\kappa_2^2}{\kappa_3^2}, 1, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{12} \right),$$

$$\bar{g}_1 = g_1 \left(\frac{\kappa_3^2}{\Lambda^2} \right)^{-\varepsilon/2} z_1 \left(\frac{\kappa_3^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right) z_{d1}^{-2} \left(\frac{\kappa_3^2}{\Lambda^2}, g_1, \dots, g_{12} \right), \quad (6.160)$$

és még 22 egyenlet adódik. Ezen egyenletek szerint a minket érdeklő fizikai Green-függvény és vertex egy számszorozótól eltekintve, mely κ_3^2/Λ^2 függvénye, kapcsolatba hozható egy olyan rendszer Green-függvényével, melyben κ_3 az effektív levágás. Ennek a rendszernek a Green-függvényét és vertexét perturbációs sorba megnézve,

a logaritmikus járulékok miatt könnyen belátható, hogy ekvivalens annak a rendszernek a Green-függvényével és vertexével, melyben csak a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ és φ_4 komponens szerepel a $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_4, \bar{g}_7, \bar{g}_9$ és \bar{g}_{10} csatolásokkal. A fenti eljárással, legalábbis elvben, ezek a csatolások meghatározhatók.

Erre az új, hat csatolású problémára is alkalmazhatjuk tovább a skálaegyenleteket, a levágást mindaddig csökkentve, míg Λ' -vel κ_2 -t el nem érjük. Ekkor úgy, mint előbb, a négykomponensű problémát egy kétkomponensű problémára képezzük le, melyben csak φ_1 és φ_2 marad meg \bar{g}_1 és \bar{g}_7 csatolásokkal. Ezek az effektív csatolások is a fentihez hasonló módon számolhatók. A rendszer átalakulása akkor lesz másodrendű, ha a \bar{g}_1 és \bar{g}_7 csatolásból egy stabilis fix-pontba lehet beskalázni. Ennek feltétele az, amint az a kétkomponensű rendszer vizsgálatával könnyen belátható, hogy $\bar{g}_1 > 0$ és $\bar{g}_1^2 - \bar{g}_7^2 > 0$ teljesüljön. Kis nyomás alkalmazásánál teljesülhet-e ez a feltétel?

A hatkomponensű probléma skálaegyenleteinek (ezeket kell használnunk addig, amíg Λ' -vel κ_3 -ig lejutunk), nincs stabilis fix-pont megoldásuk. Igen kis nyomás esetén a kritikus pontban κ_3 is kicsi, s ezért míg Λ' -vel κ_3 -ig lejutunk, a skálagörbén igen hosszú utat teszünk meg. A $\Lambda' \rightarrow 0$ esetben a renormált g_1 mínusz végtelenhez tart, kis $\Lambda' = \kappa_3$ értékeknél tehát \bar{g}_1 nagy negatív értékű lehet. Negatív \bar{g}_1 -ből már további skálázással nem juthatunk be a kétkomponensű rendszer stabilis fix-pontjába. Ha azonban a nyomás nagy, κ_3 is olyan értékű lehet, hogy a $\Lambda' = \kappa_3$ esetben \bar{g}_1 még pozitív, s innen további skálázással stabilis fix-pontba jutunk. Ez a megfontolás világosan mutatja, hogy egy véges nyomásértéknél válik az átalakulás másodrendűvé és elvben módunk is van ennek a nyomásnak a meghatározására.

Ha olyan a nyomás, hogy a kétkomponensű rendszer stabilis fix-pontjához jutunk, a kritikus viselkedést teljesen a fix-pont érték szabja meg, s a kritikus exponensek olyanok lesznek, mint egy kétkomponensű tetragonális rendszer esetén.

6.10. További fejlemények

Az ötödik fejezetben kidolgozott multiplikatív renormálási módszert a kritikus jelenségek területén további problémák vizsgálatára is használták mások. Így *Forgács* és *Zawadowski* (1977) a trikritikus jelenséget tanulmányozták. Az átlagcér elmélet a trikritikus jelenségeknél háromdimenziós rendszerekre ad jó kritikus exponenseket. *Forgács* és *Zawadowski* megmutatta, hogy három dimenzió körül is alkalmazható a fent leírt eljárás, de a trikritikus ponttól távoli tartományban nem ad számszerű kifejezéseket a kritikus exponensekre.

Az itt közölt eredmények egyszerű kiterjesztéseként, *Forgács* (1977) egyszerű eljárást írt le a mágneses térbeli állapotegyenlet meghatározására. Külső mágneses térben, vagy a kritikus pont alatti tartományban írva fel a skálaegyenleteket, a szabadenergia mágneses részére is egyszerű skálaösszefüggés adódik, s az erre felírt Lie-differenciálegyenlet közvetlenül adja az állapotegyenletet.

Végül a kritikus jelenségek vizsgálatában a legfontosabb továbbfejlesztésről kell megemlékezni. Mi mindig csak a sztatikus, időfüggetlen kritikus jelenségekkel foglalkoztunk. *Zawadowski* és *Grest* (1977) kiterjesztették a módszert a kritikus jelenségek dinamikájának tanulmányozására is. Ennél a kiterjesztésnél igen lényeges volt annak felismerése, hogy nem lehet az időfüggést, illetve az annak megfelelő frekvenciafüggést minden további nélkül beírni a Green-függvénybe és vertexbe. Csak akkor kapunk a levágás skálázásakor használható skálaösszefüggéseket, ha

a frekvenciaváltozó mellé egy új paramétert is bevezetünk, mely lehetővé teszi, hogy a propagáló módusból a túlszillapított kritikus módust megkapjuk. Meg kell azonban említenünk, hogy a kritikus dinamika távolról sem lezárt fejezet, s itt még sok további munkára van szükség.

7. Az új eljárás kapcsolata a többi renormálási módszerrel

A térelméleti multiplikatív renormálásnak a 4. fejezetben bemutatott, szokásos alkalmazásánál a normálási feltételeket, s ezzel a multiplikatív szorzók számértékeit úgy szabtuk meg, hogy a megoldásból nem tudjuk visszakapni a $Z_1 = Z_3 = 1$ -nek megfelelő fizikai esetet. Az 5. fejezetben leírt új renormálási eljárásban ugyanakkor z_d és z_r csak segédmenntiségek, arra szolgálnak, hogy segítségükkel a renormálási transzformációt definiáljuk, de végülis a fizikai problémát oldjuk meg, mely a $z_d = z_r = 1$ -nek felel meg. Kérdés az, hogy a térelméleti renormálásban nem lehet-e úgy megválasztani a normálási feltételt, hogy az új eljárással ekvivalens leírást kapjunk.

Ebben a fejezetben azt mutatjuk meg, hogy lehetséges a normálási feltételnek ilyen megválasztása (Forgács, Sólyom és Zawadowski 1976). A (4.21) és (4.22) normálási feltételek helyett tegyük a következő választást

$$d_R(p, \kappa^2 = 0, g_R)|_{p^2 = \mu^2} = d\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}, \kappa^2 = 0, u\right)\Big|_{p^2 = \Lambda^2}, \quad (7.1)$$

$$\tilde{\Gamma}_R(p_i, \kappa^2 = 0, g_R)|_{p_i^2 = \mu^2} = \tilde{\Gamma}\left(\frac{p_i^2}{\Lambda^2}, \kappa^2 = 0, u\right)\Big|_{p_i^2 = \Lambda^2}. \quad (7.2)$$

A jobb oldalon szereplő u -t (4.20) definiáljuk. A jobb oldal, ha csak a vezető logaritmikus tagokat néznénk, eggyel egyenlő, s így a régi normálási feltételt kapjuk vissza. A logaritmikus járulékok mellett megjelenő konstansok miatt viszont korrekciók jelennek meg, melyek lényegesek, ha túlmegyünk a vezető logaritmikus közelítésen. Észre kell még vennünk, hogy nem pontosan a d és $\tilde{\Gamma}$ függvénynek a levágás helyén felvett értékére normáltunk, a jobb oldalon is a renormált dimenziótlan csatolást használjuk.

Ezzel a normálással meghatározva a multiplikatív faktorokat és azután a renormált függvényeket, a $\kappa^2 = 0$ esetben

$$d_R\left(\frac{p^2}{\mu^2}, u\right) = 1 + \frac{n+2}{144} u^2 K_d^2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \ln \frac{p^2}{\mu^2} - \frac{5}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ln^2 \frac{p^2}{\mu^2} + \dots \right] + \quad (7.3)$$

$$+ \frac{(n+2)(n+8)}{12^3} u^3 K_d^3 \left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)^{-\frac{3}{2}\varepsilon} \left[\ln^2 \frac{p^2}{\mu^2} - 5 \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \frac{15}{2} + \dots \right] + \dots,$$

$$\tilde{\Gamma}_R\left(\frac{p_i^2}{\mu^2}, u\right) = 1 + \frac{n+8}{12} u K_d \left(\frac{p_i^2}{\mu^2}\right)^{-\varepsilon/2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p_i^2}{\mu^2}\right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\} + \quad (7.4)$$

$$+ \frac{n^2+6n+20}{144} u^2 K_d^2 \left(\frac{p_i^2}{\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p_i^2}{\mu^2}\right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\}^2 +$$

$$+ \frac{5n+22}{36} u^2 K_d^2 \left(\frac{p_i^2}{\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 \frac{p_i^2}{\mu^2} - 2 \ln \frac{p_i^2}{\mu^2} + 2 + \dots \right\} + \dots,$$

a renormált csatolásra pedig a következő adódik:

$$u_R \left(\frac{\mu'^2}{\mu^2}, u \right) = u \left(\frac{\mu'^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon/2} \left\{ 1 + \frac{n+8}{12} u K_d \frac{2}{\varepsilon} \left[1 - \left(\frac{\mu'^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon/2} \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{n+8}{12} \right)^2 u^2 K_d^2 \ln^2 \frac{\mu'^2}{\mu^2} - \frac{9n+42}{72} u^2 K_d^2 \ln \frac{\mu'^2}{\mu^2} + \dots \right\}. \quad (7.5)$$

Összehasonlítva ezeket a kifejezéseket a Green-függvény (4.34)-ben és a vertex (4.36)-ban megadott alakjával, közvetlenül adódik, hogy az így választott normálás után a renormált függvények analitikus alakja pontosan megegyezik a fizikai függvények alakjával, csak a Λ levágás helyett a μ skálaparaméter, a g_0 csatolás helyett pedig a g_R renormált csatolás jelenik meg. A renormált függvények ilyen választása esetén a skálaparaméter változtatásával tehát ugyanazt csináljuk, mintha a levágást skáláznánk s az invariáns csatolásra is ugyanazt a kifejezést kapjuk, mint az új módszerben (lásd (6.8) egyenletet).

Hangsúlyoznunk kell, hogy ezzel a normálási választással nemcsak a p -függő mennyiségeket, hanem a κ -függő d -t és $\tilde{\Gamma}$ -t is jól kapjuk vissza, vagyis d_R és $\tilde{\Gamma}_R$ κ^2 -függése is pontosan olyan lesz, mint a fizikai függvényeké.

Ebből az összehasonlításból azt a következtetést lehet levonni, hogy a térelméleti multiplikatív renormálásnál lehet olyan, nem szokásos normálási feltételt választani, hogy legalábbis a perturbációszámítás vizsgált rendjeiben a nemfizikai μ skálaparaméternek értelmet tulajdoníthatunk, s a renormált függvényekben μ -t a fizikai Λ levágással azonosítva, u -t pedig u_0 -lal, a fizikai Green-függvényt és vertexet kapjuk vissza. Ekkor éppen az új renormálási eljárással ekvivalens leírásunk kapunk. Ily módon utólag igazolást nyer a térelméleti renormálás oldaláról is a módszer, bár így sem igazolható tetszőleges rendben a levágással történő skálázás lehetősége.

Vissza kell még térnünk a Wilson-féle elmélettel való összehasonlításra is. A Wilson-féle tárgyalásban az új csatolások úgy kerülnek bevezetésre, hogy a szabadenergia változatlan maradjon a renormálási transzformáció után. A szokásos módon mindig be kell vezetnünk a kétrészecskés kölcsönhatáson kívül három-, négy-, stb. részecskés kölcsönhatásokat is. A leírt új renormálási eljárás azt igazolja, hogy a Wilson-féle tárgyalásban a magasabbrendű kölcsönhatások mindig visszavezethetők effektív kétrészecskés kölcsönhatásokra, ezen visszavezetés után a Kadanoff—Wilson-féle levágás-skálázás egy multiplikatív renormálást generál.

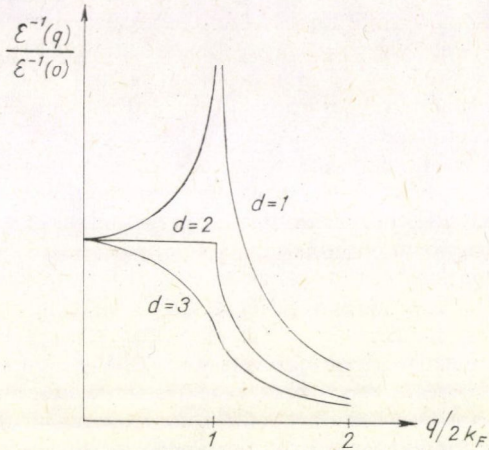
8. Az egysziméziós elektrongáz vizsgálata

8.1. A modell és fizikai jelentősége

A szupravezetés elméletének kidolgozása után (Bardeen, Cooper és Schrieffer 1958) több irányban indult meg kutatás arra vonatkozóan, nem lehet-e másfajta kölcsönhatási mechanizmusok feltételezésével is szupravezető állapotot kapni. Little (1964) vetette fel azt az ötletet, hogy hosszú molekulákból láncszerűen felépülő szerves kristályok elég magas hőmérsékleten, akár szobahőmérsékleten is, szupra-

vezetővé válhatnak. A Cooper-párok nem az elektron-fonon kölcsönhatás következtében alakulnának ki, hanem a láncok mentén haladó elektronok a molekula jól polarizálható részeit polarizálva effektív vonzást gyakorolhatnak a többi elektronra, s ez a vonzás a Coulomb-taszítást legyőzve vezethet a párok kialakulására.

Little elképzelése szerint elsősorban olyan szerves kristályok jöhetnek számításba, melyekben az elektronok a molekulaláncokon egy irányban tudnak terjedni, s kis valószínűséggel ugranak át az egyik láncról a másikra. Ez az ötlet többeket arra indított, hogy az egydimenziós, vagy kváziegydimenziós elektrongáz tulajdonságait vizsgálják. Itt elsősorban *Bicskov, Gorkov* és *Dzjalosinszkij* (1966) munkáját kell megemlítenem. Ők a vezető szinguláris járulékok figyelembevételével, az úgynevezett parketta-közelítésben próbálták az egydimenziós kölcsönható elektrongáz tulajdonságait megérteni. Ez a rendszer önmagában is sok érdekes tulajdonsággal rendelkezik, s a háromdimenziós esettel szemben dimenzionalitási effektusok is megjelennek. Például a dielektromos állandó az impulzus függvényeként a 8. ábrán látható egy-, két- és háromdimenziós elektrongáz esetén.



8. ábra. A dielektromos állandó inverze egy-, két- és háromdimenziós elektrongáz esetén

A dielektromos állandó inverzében a Fermi-impulzus kétszeresénél megjelenő logaritmikus szingularitás az egydimenziós elektrongáz egyéb tulajdonságaiban is érezteti hatását, például töltéssűrűség-hullámok kialakulását eredményezheti, vagy az elektron—fonon kölcsönhatáson keresztül a fononok energiáját lényegesen befolyásolhatja.

Az egydimenziós rendszerek iránti érdeklődés akkor nőtt meg igazán, amikor az első kísérleti eredmények megjelentek olyan anyagokon, melyek közel egydimenziósoknak voltak tekinthetők. Az első időben az izgalmat az váltotta ki, hogy felcsillant a magas hőmérsékletű szupravezetés megvalósításának a lehetősége. Ezek a remények nem váltak valóra, ennek ellenére igen intenzív kutatás folyik mind elméletileg, mind kísérletileg a majdnem egydimenziósoknak tekinthető anyagokon. Az ilyen irányú vizsgálatok az utóbbi években a szilárdtestfizikai kutatások egyik legérdekesebb területét jelentették. Itt csak néhány összefoglaló munkát említek meg: *Shchegolev* (1972), *Zeller* (1975), *Heeger* és *Garito* (1975); ezen kívül az 1976-ban Siófokon rendezett *Organic Conductors and Semiconductors* konferencia anyaga tartalmaz sok összefoglaló cikket (megjelent az Akadémiai Kiadónál).

Az eddig vizsgált anyagokat szerkezeti szempontból két nagy osztályba sorolhatjuk. Az egyikbe az ún. vegyes valenciájú komplex vegyületek tartoznak. Ezek tipikus képviselője a $K_2[Pt(Cn)_4]Br_{0,3} \cdot 3(H_2O)$, melyben a Pt atomok egy irányban közel helyezkednek el, s a Pt atomok $5d$ nivóján ülő elektronok hullám függvénye ebben az irányban erősen átfedődik, jó vezetőképességet adva. A Pt atomokból így kialakuló jól vezető láncok között az elektronok kis valószínűséggel ugranak át, a láncokra merőlegesen a vezetőképesség nagyságrendekkel kisebb.

A másik, ennél sokkal gazdagabb osztály a tetracián-kinodimetán (TCNQ) különböző sóiból, illetve az ezekkel rokon vegyületekből áll. Ezekben a vegyületekben a nagy kiterjedésű TCNQ és a hozzá hasonló molekulák úgy helyezkednek el, hogy a lapos molekulák egymás fölött szorosan illeszkedve és π -kötésekkel összekötve láncokat alkotnak. A legtöbb ilyen szerves kristályban a donor és akceptor molekulák donor, illetve akceptor láncokat képeznek, s az elektron-nívók betöltöttségétől függően mindkét vagy csak az egyik típusú láncban mozoghatnak könnyen az elektronok. A TCNQ sók között is vannak rosszul vezető anyagok, de ugyanakkor vannak szinte fémes vezetőképességgel rendelkezők is. Az egyik legismertebb és legtöbbet vizsgált anyag a tetratiofulvalén-tetracián-kinodimetán (TTF—TCNQ), melyben a TTF donor-láncban, és a TCNQ akceptor-láncban is folyhat áram, a láncokra merőleges irányban viszont a vezetőképesség nagyon rossz, a két irányban mért vezetőképesség hányadosa az ezret is elérheti. A vezetőképességből a szabad úthosszat megőcsülve, az adódik, hogy míg a láncok mentén a szabad úthossz a rácscellánál nagyobb, addig a láncokra merőleges irányban a rácscellánál kisebb szabad úthossz adódna. Ez arra utal, hogy a láncok között az elektronok csak diffúz átugrással terjedhetnek, s az egydimenziós láncokkal való közelítés sok szempontból igen jó.

Ezek alapján természetes és fizikailag igen jól érthető, hogy a tisztán egydimenziós rendszereket, melyeket korábban matematikai fikciónak tekintettek, alapos elméleti vizsgálatnak vetették alá. Vigyázni kell azonban azzal, hogy mennyiben segít ez a reális rendszerek viselkedésének megértésében. Mindig van ugyanis valamilyen csatolás a láncok között, s ez lényeges lehet. Általános tételként ismeretes (*Landau és Lifsic* 1964), hogy tisztán egydimenziós rendszerekben, rövid hatótávolságú erőket tételezve fel, nem lehetséges hosszú távú rend semmilyen véges hőmérsékleten, tehát fázisátalakulás sem történhet. Nyilvánvalóan a gyenge, de véges, láncok közötti csatolás stabilizálhat egy rendezett fázist, és teheti az átalakulási hőmérsékletet végeessé.

Még egy minket érdeklő általános kijelentés tehető az egydimenziós elektrongázról. *Peierls* (1955) mutatott rá arra, hogy nem teljesen betöltött vezetési sávval rendelkező egydimenziós elektron-rendszer mindig instabilis egy olyan rácstorzulással szemben, amely során a rácspériódus megváltozik, mégpedig úgy, hogy az új periódusnak megfelelő sávstruktúrában a Fermi-energiánál gap nyílik és a rendszer szigetelővé válik. Ez az ún. Peierls-torzulás, illetve Peierls-átalakulás. Az egydimenziós rendszerekre kidolgozott elméletnek erről is számot kell adnia.

Ebben a fejezetben a tisztán egydimenziós rendszerek tanulmányozásában elért eredményeinket ismertetem. A következő, 9. fejezetben fogok áttérni a gyengén kölcsönható láncok esetére.

Az egydimenziós esetet nézve most, kétfajta lényegesen különböző megközelítés lehet, attól függően, elsősorban az elektron—elektron kölcsönhatást tekintjük-e felelősnek a rendszer viselkedéséért, vagy az elektron—fonon kölcsönhatásnak tulajdonítunk fontosabb szerepet. Az elektron—fonon kölcsönhatást sok esetben, mint például a szupravezetés BCS elméletében, effektív elektron—elektron kölcsönhatással helyettesíthetjük, elhagyva a fonon-kicszerelésből adódó retardációs effektusokat. Mi számolásainkban mindig csak az elektron—elektron kölcsönhatás következményeit vizsgáltuk. A retardációs effektusok fontosságát külön meg kellene vizsgálni. Erre még csak próbálkozások vannak az irodalomban (*Barišić* 1976, *Horovitz* 1976).

Az elektron—elektron kölcsönhatásokra korlátozódva is még két alapvetően más fizikai kép létezik, attól függően, hogy szabad elektron képből indulunk-e ki, s itt vesszük figyelembe a kölcsönhatásokat, vagy egy jól lokalizált elektronrendszert képzelünk el, erős atomon belüli Coulomb-taszítással, s ehhez képest az atomi helyek közötti átugrás kis perturbáció. A két fizikai képnek megfelelően a tárgyalás-mód is általában különböző, noha egy pontos elméletnek mindkét határesetet is vissza kell adnia.

Az ebben a fejezetben ismertetett tárgyalás a szabad elektrongáz kép felől közelíti meg a problémát, az elektronok kölcsönhatásában próbáljuk meg a leglényegesebb járulékokat figyelembe venni. Kiindulásként *Bicskov, Gorkov és Dzsjaloszinkij* (1966) munkája szolgált. Ebben ők a kölcsönhatás egy speciális választása mellett vizsgálták a szupravezető, illetve Peierls-torzulásos állapot kialakulásának lehetőségét. Az eredmények világosan mutatták az alkalmazott közelítés elégtelenségét. A renormálási csoport módszer nyújt lehetőséget arra, hogy ezen a közelítésen túlmenve az egydimenziós rendszerek viselkedését jobban megértsük.

Egy egydimenziós kölcsönható elektrongázt vizsgálva, a rendszer Hamilton-operátorát a következőképpen írhatjuk:

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \quad (8.1)$$

ahol

$$H_0 = \sum_{k, \alpha} \varepsilon_k c_{k\alpha}^+ c_{k\alpha}, \quad (8.2)$$

és

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2L} \sum_{k_1, \alpha, \beta} g(k_1, k_2, k_3, k_4) c_{k_1 \alpha}^+ c_{k_2 \beta}^+ c_{k_3 \beta} c_{k_4 \alpha}, \quad (8.3)$$

ahol $c_{k\alpha}^+$ egy k impulzusú, α spinű elektron keltő operátora, ε_k az elektronok kinetikus energiája és $g(k_1, k_2, k_3, k_4)$ a kölcsönhatási mátrixelem.

Az elektrongáz-rendszerek fizikai viselkedésének meghatározásában a Fermi-energia körüli elektronoknak van lényeges szerepük. Egy egydimenziós rendszerben a Fermi-felület két pontból, a $+k_F$ és $-k_F$ pontból áll. Az energiát linearizálhatjuk $\pm k_F$ körül, s ezentúl mindig feltesszük, hogy

$$\varepsilon_k = v_F(|k| - k_F), \quad (8.4)$$

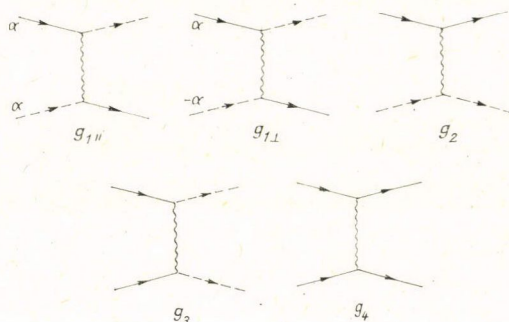
ahol v_F a Fermi-sebesség. Azt a tartományt, amelyen belül az elektronokat figyelembe akarjuk venni, a Fermi-energiára szimmetrikusan választjuk meg egy $2\omega_D$ szélességű tartományként. Az impulzusreprezentációban ez annak felel meg, hogy a $(-k_F - k_c, -k_F + k_c)$ és $(k_F - k_c, k_F + k_c)$ tartományokba eső impulzussal rendelkező elektronokat kell csak figyelembe vennünk, ahol $k_c = \omega_D/v_F$. Feltételezzük még, hogy k_c lényegesen kisebb k_F -nél.

Ezután célszerű az elektronokat két osztályba sorolni, s a továbbiakban jelölésben is megkülönböztetni őket. Az a_k és a_k^+ operátorok a $+k_F$ körüli elektronállapotokra, míg a b_k és b_k^+ operátorok a $-k_F$ körüli elektronállapotokra vonatkoznak. A gráfokon folytonos vonallal jelöljük a $+k_F$ körüli $(k_F - k_c, k_F + k_c)$ tartományban levő elektronok propagátorát, a $-k_F$ körüli elektronokét pedig szaggatott vonallal. A lehető legáltalánosabb kölcsönhatást tételezve fel, a kölcsönhatási Hamil-

ton-operátort öt tag összegeként állíthatjuk elő:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{int}} = & \frac{1}{L} \sum_{k_i, \alpha, \beta} g_{1\parallel}(k_i) a_{k_1\alpha}^+ b_{k_2\beta}^+ a_{k_3\beta} b_{k_4\alpha} \delta_{\alpha\beta} + \\
 & + \frac{1}{L} \sum_{k_i, \alpha, \beta} g_{1\perp}(k_i) a_{k_1\alpha}^+ b_{k_2\beta}^+ a_{k_3\beta} b_{k_4\alpha} \delta_{\alpha, -\beta} + \\
 & + \frac{1}{L} \sum_{k_i, \alpha, \beta} g_2(k_i) a_{k_1\alpha}^+ b_{k_2\beta}^+ b_{k_3\beta} a_{k_4\alpha} + \\
 & + \frac{1}{2L} \sum_{k_i, \alpha, \beta} g_3(k_i) (a_{k_1\alpha}^+ a_{k_2\beta}^+ b_{k_3\beta} b_{k_4\alpha} + b_{k_1\alpha}^+ b_{k_2\beta}^+ a_{k_3\beta} a_{k_4\alpha}) + \\
 & + \frac{1}{2L} \sum_{k_i, \alpha, \beta} g_4(k_i) (a_{k_1\alpha}^+ a_{k_2\beta}^+ a_{k_3\beta} a_{k_4\alpha} + b_{k_1\alpha}^+ b_{k_2\beta}^+ b_{k_3\beta} b_{k_4\alpha}).
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Az ötfajta kölcsönhatásnak megfelelő gráfok pedig



A $g_{1\perp}$ és g_3 kölcsönhatásban az átadott impulzus nagy, $2k_F$ közelébe esik, a $g_{1\parallel}$, g_2 és g_4 kölcsönhatásnál viszont közel nulla az impulzusátadás. Látni fogjuk, hogy a nagy impulzusátadású folyamatok figyelembevétele teszi a problémát igazán nehézé. Ezek nélkül, csak a $g_{1\parallel}$, g_2 és g_4 kölcsönhatást tartva meg, a feladat egzaktul megoldható (Theumann 1967, Dzijaloszinszkij és Larkin 1973, Luther és Peschel 1974). Ez az ún. Tomonaga-modell (Tomonaga 1950) határeset.

A $g_{1\parallel}$ és $g_{1\perp}$ tagok az úgynevezett visszaszórás tagok, g_2 és g_4 írja le az előreszórást, g_3 pedig az umklapp folyamatoknak felel meg, és csak félig betöltött sáv esetén játszik szerepet, amikor $4k_F$ egy reciprokrács vektorral azonos.

A további számolásokban fel fogom tételni még, hogy a kölcsönhatási mátrixelemek lassan változó függvényei az impulzusoknak, s mivel minden impulzus a $(-k_F - k_c, -k_F + k_c)$, illetve $(k_F - k_c, k_F + k_c)$ tartományra van korlátozva, ezen tartományokon belül az impulzusfüggéstől eltekinthetünk. A rendszert így végül az öt csatolás állandó, a (8.4) diszperziós összefüggés és az impulzustérbeli k_c , illetve energiatérbeli $\omega_D = v_F k_c$ levágás jellemzi.

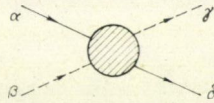
8.2. A renormálási csoport alkalmazása az invariáns csatolások meghatározására

A mi vizsgálataink előtt az egydimenziós Fermi-gáz rendszernek csak a parketta-közelítésben való tárgyalása volt ismeretes. A renormálási csoport módszerrel való tárgyalást Menyhárddal kezdtük (Menyhárd és Sólyom 1973, Sólyom 1973). Itt került publikálásra először az új renormálási eljárás is, amelyben a levágás skálázásával értünk el multiplikatív renormálást. Ezekben a publikációkban még csak két csatolás állandót használtunk, $g_1 = g_{1\parallel} = g_{1\perp}$ -t és g_2 -t; g_3 -t és g_4 -t elhagytuk, mert csak félig betöltött sáv esetén, illetve logaritmikus közelítésben eggyel alacsonyabb rendben adnak járulékot. Egy későbbi publikációban (Sólyom 1975) vizsgáltam a négy csatolású esetet, melyben $g_1 = g_{1\parallel} = g_{1\perp}$, g_2 , g_3 és g_4 szerepelt. Az értekezésben az öt csatolású esetet is vizsgálni fogom, egyszerűség kedvéért azonban a két csatolású esettel kezdem a módszer bemutatását és az eredmények leírását.

Azt a speciális esetet vizsgáljuk tehát először, amikor a $g_1 = g_{1\parallel} = g_{1\perp}$ és g_2 csatolást vesszük csak figyelembe. A korábbiakból már jól ismert módon azt tételezzük fel, hogy a levágás (k_c , illetve ω_D) és a csatolások egyidejű és korrelált megváltoztatásakor a Green-függvény és a vertexek számszorosukba mennek át. A dimenziótlan d Green-függvényt a szokásos módon a

$$G(k, \omega) = d \left(\frac{k}{k_c}, \frac{\omega}{\omega_D} \right) G^{(0)}(k, \omega) \quad (8.6)$$

összefüggés alapján definiáljuk, a két csatolásnak megfelelően pedig két dimenziótlan vertexet vezetünk be. A két vertexet a spinfüggés alapján különböztetjük meg. A teljes Γ vertexet,



mely egy $+k_F$ és egy $-k_F$ körüli impulzusú elektron szóródását írja le, így bontjuk fel:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_1 \tilde{\Gamma}_1 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - g_2 \tilde{\Gamma}_2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}. \quad (8.7)$$

Ezeknek a mennyiségeknek a segítségével fogalmazva meg a skálázási feltételt,

$$d \left(\frac{k}{k_c}, \frac{\omega}{\omega_D}, g'_1, g'_2 \right) = z_d \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_1, g_2 \right) d \left(\frac{k}{k_c}, \frac{\omega}{\omega_D}, g_1, g_2 \right), \quad (8.8)$$

$$\tilde{\Gamma}_j \left(\frac{k_i}{k_c}, \frac{\omega_i}{\omega_D}, g'_1, g'_2 \right) = z_j^{-1} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_1, g_2 \right) \tilde{\Gamma}_j \left(\frac{k_i}{k_c}, \frac{\omega_i}{\omega_D}, g_1, g_2 \right), \quad j = 1, 2 \quad (8.9)$$

$$g'_j = g_j z_j \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_1, g_2 \right) z_d^{-2} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_1, g_2 \right). \quad (8.10)$$

Most is az első feladat a skálaegyenletek felírásának jogosultságát vizsgálni. Először ezt egy speciális változóválasztásnál tettük meg. Később még visszatérünk a több változós vertexek vizsgálatánál a skálázás konzisztenciájára. Az impulzusokat a Fermi-impulzusnál rögzítettük, d -ben $+k_F$ -nél, a vertexekben pedig a gráfokból leolvashatóan $+k_F$ -nél, illetve $-k_F$ -nél. A vertex frekvenciaváltozóinak megválasztása pedig úgy történt, hogy a szokásos $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_3$ és $\omega_1 - \omega_4$ kombinációk mind ω értéket adjanak

$$\omega_1 = \frac{3}{2}\omega, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\omega, \quad \omega_4 = \frac{1}{2}\omega.$$

Az első korrekciókat véve figyelembe a vertexben, a következő gráfok járulékát kell kiszámolnunk:

$$r = \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} + \text{[diagram 3]} \quad (8.11)$$

A kölcsönhatást most egy ponttal jelöltük, minden kölcsönhatási pont helyére a g_1 és g_2 kölcsönhatás is beírandó.

A következő rendben már sajátenergiás korrekció is megjelenik,

$$\text{[diagram 8.12]} \quad (8.12)$$

a vertexben pedig a következő gráfokat kell figyelembe vennünk:

$$\begin{aligned} & \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} + \text{[diagram 3]} + \\ & + \text{[diagram 4]} + \text{[diagram 5]} + \text{[diagram 6]} + \\ & + \text{[diagram 7]} + \text{[diagram 8]} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Az egyes gráfoknak megfelelő analitikus járulékok meghatározva, itt csak az összeget írrom fel:

$$d = 1 + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_1^2 - g_1 g_2 + g_2^2) \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \dots, \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1 = 1 + \frac{g_1}{\pi v_F} \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \frac{g_1^2}{\pi^2 v_F^2} \left(\ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - i\pi \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right) + \\ + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_1 g_2 - g_2^2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots, \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_2 = 1 + \frac{1}{2\pi v_F} \frac{g_1^2}{g_2} \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} \frac{g_1^3}{g_2} \left(\ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - i\pi \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right) + \\ + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} \frac{1}{g_2} (g_1^3 - 2g_1^2 g_2 + 2g_1 g_2^2 - 2g_2^3) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \end{aligned} \quad (8.16)$$

Ezek a mennyiségek valóban eleget tesznek a (8.8)–(8.10) skálaegyenleteknek valós, ω -tól független z -vel, a renormált csatolások perturbációs alakja pedig:

$$g'_1 = g_1 + \frac{g_1^2}{\pi v_F} \ln \frac{\omega_D'}{\omega_D} + \frac{g_1^3}{\pi^2 v_F^2} \ln^2 \frac{\omega_D'}{\omega_D} + \frac{g_1^3}{2\pi^2 v_F^2} \ln \frac{\omega_D'}{\omega_D} + \dots, \quad (8.17)$$

$$g'_2 = g_2 + \frac{g_1^2}{2\pi v_F} \ln \frac{\omega_D'}{\omega_D} + \frac{g_1^3}{2\pi^2 v_F^2} \ln^2 \frac{\omega_D'}{\omega_D} + \frac{g_1^3}{4\pi^2 v_F^2} \ln \frac{\omega_D'}{\omega_D} + \dots \quad (8.18)$$

Az invariáns csatolásokra vonatkozó Lie-egyenletek ebben a közelítésben,

$$\frac{d g'_1(s)}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{\pi v_F} g_1'^2(s) + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} g_1'^3(s) + \dots \right\}, \quad (8.19)$$

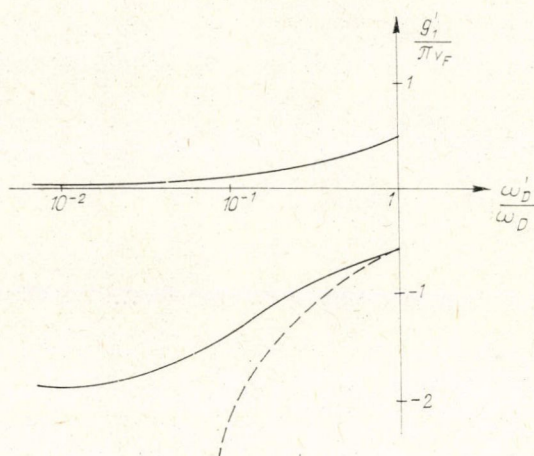
$$\frac{d g'_2(s)}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{2\pi v_F} g_1'^2(s) + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} g_1'^3(s) + \dots \right\}, \quad (8.20)$$

ahol $s = \omega_D'/\omega_D$, és az invariáns csatolásra is a g'_1 , g'_2 jelölést használom.

Ezek az egyenletek implicit módon megoldhatók. Az implicit alak felírása helyett szemléletesebb az invariáns csatolást a levágás függvényében felrajzolni. Ezt mutatja a 9. ábra.

Pozitív g_1 csatolást választva, a renormált csatolás a levágás csökkentésével csökken, s nullához tart. Negatív g_1 csatolás esetén a renormálás során a csatolás abszolút értékben erősödik, s a dimenziótlan $g'_1/\pi v_F$ a -2 értékhez tart. A g_2 csatolás renormált értékére a Lie-egyenletekből közvetlenül adódik, hogy

$$g'_2(s) = \frac{1}{2} g_1'(s) + g_2 - \frac{1}{2} g_1. \quad (8.21)$$



9. ábra. A renormált csatolás változása a levágás skálázásánál

Érdeemes egy kicsit megnézni, minek felel meg a renormálási csoport egyenleteinek ez a közelítése a gráfok nyelvén. Vizsgáljuk ehhez először az alacsonyabb rendű közelítést, melyben csak a másodrendű tagot tartjuk meg. Ekkor a megoldás:

$$g_1'(s) = \frac{g_1}{1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln s}. \quad (8.22)$$

A vertexre vonatkozó Lie-egyenletekben is csak az elsőrendű tagokat tartva meg, és az invariáns töltés ilyen alakját beírva,

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{g_1}{1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln \frac{\omega}{2\omega_D}} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \left(g_2 + \frac{\frac{g_1^2}{2\pi v_F} \ln \frac{\omega}{2\omega_D}}{1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln \frac{\omega}{2\omega_D}} \right) \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}, \quad (8.23)$$

ahol az imaginárius részeket elhagytam. Ez az eredmény a $g_1 = g_2 = g$ esetben pontosan visszaadja Bicskov, Gorkov és Dzjalosinszkij (1966) eredményét, melyet a parketta-gráfok figyelembevételével kaptak. A perturbációs számítás első logaritmus korrekciójának ismeretében tehát a renormálási csoport alkalmazásával az összes vezető logaritmus járulékot helyesen kapjuk. A gráfokat nézve, az első logaritmus járulékok olyan buborékoktól jön, melyekben párhuzamosan vagy ellentétesen halad egy folytonos és egy szaggatott vonal. A parketta gráfok, (8.13) első hat gráfja, mind ilyen elemekből építhető fel. A sajátenergia és (8.13) utolsó két gráfja már más típusú, ezek eggyel alacsonyabb logaritmus járulékot adnak. Most is igaz azonban, hogy az első ilyen korrekciók ismeretében a renormálási csoport segítségével az összes, vezető rend utáni logaritmus járulékot fel tudjuk összegezni.

A parketta-közelítéshez képest a mi közelítésünknek az a lényeges előnye, hogy nem tartalmaz semmilyen szingularitást. Tudjuk, hogy egydimenziós rendszerekben

véges hőmérsékleten hosszútávú rend nem alakulhat ki, márpedig egy (8.22) típusú szinguláris invariáns csatolás feltétlenül arra vezet, hogy véges hőmérsékleten fázisátalakulást kapnánk. Ugyanakkor az invariáns csatolásra az itt vizsgált közelítésben kapott kifejezés sem tekinthető végleges megoldásnak, hiszen negatív g_1 -nél a csatolás egységnyi nagyságrendűvé válik, s a magasabbrendű tagok nem hanyagolhatók el (8.19)-ben. Ezért a csatolás $g'_1/\pi v_F = -2$ fix-pont értékét nem szabad számszerűen nagyon komolyan venni. Csak azt fogjuk feltételezni a továbbiakban, hogy a csatolás egységnyi nagyságrendű lesz.

8.3. A válaszfüggvények vizsgálata, a rendszer alapállapotának meghatározása

Az előző fejezetben láttuk, hogy a renormálási csoport segítségével a parketta-közelítésen túlmenve a vertexek nem szingulárisak véges hőmérsékleten s ez már arra utal, hogy az általános tételnek megfelelően ebben a közelítésben nem adódik fázisátalakulás a rendszerben. Az abszolút zérus hőmérsékleten azonban létrejöhet egy hosszútávú rend, s ez adja meg a rendszer alapállapotát. Azt vizsgálom most meg, hogy a csatolások előjelétől és nagyságától függően milyen típusú rend alakulhat ki.

Ezt legcélszerűbben a Kubo-formalizmus segítségével kapott válaszfüggvények ismeretében tehetjük meg. A fizikailag érdekes, közel egydimenziós rendszerekben megfigyelt vagy várt fázisátalakulásoknak megfelelően a Peierls-típusú átalakulás, a mágneses átalakulás és a szupravezető átalakulás érdekel. Ezeknek megfelelően háromféle válaszfüggvényt vizsgáltam (Sólyom 1973).

A Peierls-típusú átalakulás egy fononok nélküli elektrongáz modellben úgy jelentkezhet, mint az elektrongáz sűrűségében egy sűrűség hullám stabilizálódása, a megfelelő válaszfüggvény pedig a sűrűség—sűrűség korrelációs függvény,

$$N(k, \omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left\langle \hat{T} \left\{ \sum_{\alpha, \beta} \int \frac{dp}{2\pi} c_{p\alpha}^+(t) c_{p+k\alpha}(t) \int \frac{dp'}{2\pi} c_{p'\beta}^+(0) c_{p'-k\beta}(0) \right\} \right\rangle. \quad (8.24)$$

A válaszfüggvényt rögtön nulla hőmérsékleten határoztam meg az ω energia-változó függvényeként. Logaritmikusan problémákban véges hőmérsékleten számolva, T és ω szimmetrikusan jelenik meg, ezért az ω -függés ismeretében a válaszfüggvény hőmérsékletfüggése is ismeretes. Az ebben a függvényben megjelenő szingularitás $T=0$ -nál arra utal, hogy az alapállapot egy sűrűség hullámmal rendelkező állapot.

A mágneses alapállapot akkor várható, ha a mágneses szuszeptibilitásban van szingularitás $T=0$ -nál. A dinamikus mágneses szuszeptibilitást egy elektrongáz esetén így lehet definiálni:

$$\chi(k, \omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left\langle \hat{T} \left\{ \int \frac{dp}{2\pi} c_{p\uparrow}^+(t) c_{p+k\uparrow}(t) \int \frac{dp'}{2\pi} c_{p'\uparrow}^+(0) c_{p'-k\uparrow}(0) \right\} \right\rangle. \quad (8.25)$$

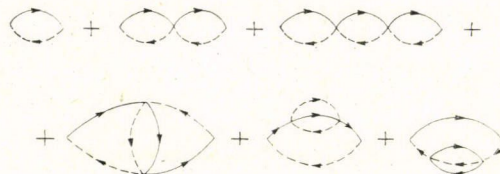
A transzverzális szuszeptibilitást vizsgáltam, de könnyen beláthatóan a longitudinális szuszeptibilitás is hasonló eredményre vezetne. Ha a szingularitás a $k=0$ -nál jelenik meg, a rendszer alapállapota ferromágneses, ha véges k -nál, akkor antiferromágneses, az alapállapotban egy sztatikus spinsűrűség hullám alakul ki.

Végül a szupravezetés kialakulásának feltétele az, hogy a rendszerben spontán módon Cooper-párok keletkezzenek, vagyis a Cooper-párok korrelációs függvényében kell szingularitásnak megjelennie.

$$\Delta(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left\langle \hat{T} \left\{ \int \frac{dp}{2\pi} c_{p\uparrow}(t) c_{-p\downarrow}(t) \int \frac{dp'}{2\pi} c_{-p'\uparrow}^+(0) c_{p'\downarrow}^+(0) \right\} \right\rangle. \quad (8.26)$$

Ezeket a mennyiségeket a parketta-közelítés keretében *Dzjalosinszkij* és *Larkin* (1971) vizsgálta. Az előző fejezetben azonban láttuk, hogy a parketta-közelítésben egy nem fizikai szingularitás jelenik meg. Szükség van tehát ennél jobb közelítésre. A renormálási csoport alkalmazásával lehet ezt a jobb közelítést elérni. Ehhez az szükséges, hogy a válaszfüggvényekre is lehessen skálaegyenleteket felírni. Erről a perturbációs sor alapján győződhetünk meg, ezért meghatároztam N , χ és Δ perturbációs alakját a csatolásban másodrendig. N és χ a k hullámszámnak is függvénye. A perturbációs járulékok a $k = 2k_F$ esetén lesznek szingulárisak, a felösszegzett alakban is itt várjuk a szingularitás megjelenését, így csak ezt a speciális k értéket vizsgáltam.

N és χ perturbációs alakjának meghatározásához a következő gráfokat kell figyelembe vennünk:



$$(8.27)$$

a megfelelő analitikus kifejezések pedig:

$$\begin{aligned} N(\omega) = N(2k_F, \omega) = & \frac{1}{\pi v_F} \ln \frac{\omega}{2\omega_D} \left[1 + \frac{1}{2\pi v_F} (2g_1 - g_2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \right. \\ & + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (2g_1 - g_2)^2 \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{12\pi^2 v_F^2} (g_1^2 - 4g_1 g_2 + g_2^2) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \\ & \left. + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_1^2 - g_1 g_2 + g_2^2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right], \end{aligned} \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned} \chi(\omega) = \chi(2k_F, \omega) = & \frac{1}{2\pi v_F} \ln \frac{\omega}{2\omega_D} \left[1 - \frac{g_2}{2\pi v_F} \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \right. \\ & + \frac{g_2^2}{4\pi^2 v_F^2} \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{12\pi^2 v_F^2} (g_1^2 + g_2^2) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \\ & \left. + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_1^2 - g_1 g_2 + g_2^2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (8.29)$$

A Cooper-párok korrelációs függvényében a következő folyamatokat vettem figyelembe:

$$(8.30)$$

az analitikus kifejezés pedig:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) = & -\frac{1}{\pi v_F} \ln \frac{\omega}{2\omega_D} \left[1 + \frac{1}{2\pi v_F} (g_1 + g_2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \right. \\ & + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_1 + g_2)^2 \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \frac{1}{12\pi^2 v_F^2} (2g_1^2 - 2g_1 g_2 - g_2^2) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \\ & \left. + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_1^2 - g_1 g_2 + g_2^2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Mindenütt csak a valós részeket írtam ki. Az analitikus alakok ismeretében könnyen belátható, hogy ezek a mennyiségek nem tesznek eleget a skálázásnak. Ugyanaz a helyzet, mint a röntgenabszorpció él problémánál a válaszfüggvény valós részével, vagy a kritikus jelenségeknél a fajhővel. Az ottaniakhoz hasonlóan itt is segédmennyiségeket vezetünk be a

$$\bar{N}(\omega) = \pi v_F \omega \frac{dN(\omega)}{d\omega}, \quad (8.32)$$

$$\bar{\chi}(\omega) = 2\pi v_F \omega \frac{d\chi(\omega)}{d\omega}, \quad (8.33)$$

$$\bar{\Delta}(\omega) = -\pi v_F \omega \frac{d\Delta(\omega)}{d\omega}, \quad (8.34)$$

definíciókkal. Ezek a mennyiségek,

$$\begin{aligned} \bar{N}(\omega) = & 1 + \frac{1}{\pi v_F} (2g_1 - g_2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \frac{3}{4\pi^2 v_F^2} (2g_1 - g_2)^2 \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - \\ & - \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_1^2 - 4g_1 g_2 + g_2^2) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_1^2 - g_1 g_2 + g_2^2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots, \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(\omega) = & 1 - \frac{1}{\pi v_F} g_2 \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \frac{3}{4\pi^2 v_F^2} g_2^2 \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - \\ & - \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_1^2 + g_2^2) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_1^2 - g_1 g_2 + g_2^2) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots, \end{aligned} \quad (8.36)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\omega) = & 1 + \frac{1}{\pi v_F} (g_1 + g_2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \frac{3}{4\pi^2 v_F^2} (g_1 + g_2)^2 \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \\ & + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (2g_1^2 - 2g_1 g_2 - g_2^2) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_1^2 - g_1 g_2 + g_2^2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \end{aligned} \quad (8.37)$$

már eleget tesznek a skálaegyenleteknek, a Lie-egyenletek megfelelő alakja pedig:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \bar{N}(x) = \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{\pi v_F} [2g_1'(x) - g_2'(x)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} [g_1'^2(x) - g_1'(x)g_2'(x) + g_2'^2(x)] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (8.38)$$

$$\frac{d}{dx} \ln \bar{\chi}(x) = \frac{1}{x} \left\{ -\frac{1}{\pi v_F} g_2'(x) + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} [g_1'^2(x) - g_1'(x)g_2'(x) + g_2'^2(x)] + \dots \right\}, \quad (8.39)$$

$$\frac{d}{dx} \ln \bar{\Delta}(x) = \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{\pi v_F} [g_1'(x) + g_2'(x)] + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} [g_1'^2(x) - g_1'(x)g_2'(x) + g_2'^2(x)] + \dots \right\}, \quad (8.40)$$

ahol $x = \omega/2\omega_D$.

Ezeket az egyenleteket az invariáns csatolások ismeretében megoldva, majd magukat a válaszfüggvényeket meghatározva, a vezető szinguláris járulék

$$N(\omega) \sim \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^\alpha & \text{ha } g_1 > 0 \\ \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^{-\frac{3}{2}+\alpha} & \text{ha } g_1 < 0 \end{cases} \quad (8.41)$$

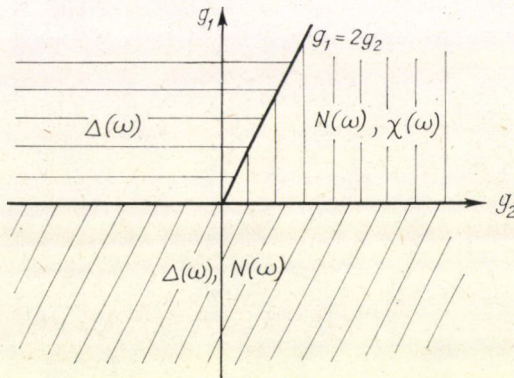
$$\chi(\omega) \sim \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^\alpha & \text{ha } g_1 > 0 \\ \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^{\frac{5}{2}+\alpha} & \text{ha } g_1 < 0 \end{cases} \quad (8.42)$$

$$\Delta(\omega) \sim \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^{-\alpha} & \text{ha } g_1 > 0 \\ \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^{-\frac{3}{2}-\alpha} & \text{ha } g_1 < 0 \end{cases} \quad (8.43)$$

és $\alpha = (g_1 - 2g_2)/2\pi v_F + \dots$. Pozitív g_1 -nél ezek a megoldások igen jó közelítést adnak, mert az invariáns csatolás kicsi, negatív g_1 esetén az exponensekben levő $-3/2$, $5/2$ számokat nem szabad szigorúan venni, csak azt, hogy egységnyi nagyságrendű negatív, illetve pozitív kitevőket kapunk. Ezekből az eredményekből felrajzolhatjuk a rendszer fázisdiagramját. A 10. ábra mutatja a fázisdiagramot a g_1 és g_2 csatolások síkján.

Az egyes tartományokba azokat a válaszfüggvényeket jelöltem be, melyek ott szingulárisak. Pozitív g_1 és $g_1 > 2g_2$ esetén $\Delta(\omega)$ rendelkezik szingularitással, a rendszer szupravezető lehet, ha viszont $g_1 < 2g_2$, $\chi(\omega)$ és $N(\omega)$ szinguláris, a rendszerben spinsűrűség-hullám és töltéssűrűség-hullám stabilizálódhat. Negatív g_1 esetén $\Delta(\omega)$ és $N(\omega)$ szinguláris, a rendszer szupravezetővé válhat, és sztatikus töltéssűrűség-hullám alakulhat ki benne.

Ez a fázisdiagram a szigorúan egydimenziós rendszerre vonatkozik, s csak az alapállapot típusát adja meg, véges hőmérsékleten nem történik meg az átalakulás az ilyen állapotba. Természetesnek látszik az az ötlet, hogy ezekből a láncokból egy gyengén csatolt, közel egydimenziósnak tekinthető rendszert összeépítve, ezek a fázisok már véges hőmérsékleten stabilizálódnak. A következő, 9. fejezetben fogok ezzel a problémával foglalkozni. Most még néhány, a tisztán egydimenziós rendszerrel kapcsolatos kérdést vizsgállok meg.



10. ábra. A két csatolással jellemzett egydimenziós Fermi-gáz rendszerek fázisdiagramja

8.4. A többváltozós vertexek meghatározása

Az egydimenziós elektrongáz (8.8)–(8.10) skálaegyenleteit általános impulzus- és energiaváltozók esetére írtuk fel, a tényleges számolást azonban a változók egy igen speciális választásával végeztük el, a vertexekben is csak egy változót tartva meg. A skálázási feltétel teljesülését is csak erre a speciális esetre igazoltuk. Az eljárás jogosultságának további vizsgálata céljából megvizsgáltuk a problémát (Menyhárd és Solyom 1975) általánosabb változéválasztás mellett is. A leglényegesebb eredmény az, hogy a skálázási feltétel teljesülését most is igazolni tudjuk. Ugyanakkor mellék-eredményként a vertexeket több változó függvényében is meg tudjuk határozni, s összevetésre nyílik újabb alkalom a parketta-közelítés eredményével.

Az előzőekben a Γ vertex impulzusváltozóit a Fermi-impulzusnál rögzítettük, az energiaváltozókat pedig úgy választottuk, hogy mind a négy energiaváltozó egy ω segítségével kifejezhető volt. Most ezt a megkötést fogom elejteni, és a három független energiaváltozó tetszőleges értékére vizsgálom a skálázást. Az energiaváltozókat célszerű a következő módon választani. $\omega_1 + \omega_2 = x\omega_D$, $\omega_1 - \omega_3 = y\omega_D$, $\omega_1 - \omega_4 = z\omega_D$.

Ezek segítségével az eredeti ω_i változók így fejezhetők ki:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{2}(x+y+z)\omega_D, \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}(x-y-z)\omega_D, \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}(x-y+z)\omega_D, \\ \omega_4 &= \frac{1}{2}(x+y-z)\omega_D.\end{aligned}\tag{8.44}$$

A skálázhatóság vizsgálatához a vertexben a vezető logaritmikus járulékokat kell csak meghatározni. Ezért minden járulékot logaritmikus közelítésben fogunk vizsgálni. A változók viszonyától függően hat esetet kell megkülönböztetnünk:

$$\begin{aligned}1) \quad z > x, y & \qquad 4) \quad y \sim z > x \\ 2) \quad x \sim z > y & \qquad 5) \quad y > x, z \\ 3) \quad x > y, z & \qquad 6) \quad x \sim y \gtrsim z\end{aligned}\tag{8.45}$$

Az első esetben a vertex mindhárom változótól logaritmikusan függ, az utolsó esetben az egyváltozós problémát kapjuk vissza, míg a többi esetben x -től és y -től is függ a vertex, z -től azonban nem.

Mindegyik esetet megvizsgáltuk s megállapítottuk, hogy a változók választásától függetlenül a skálaegyenletek mindig teljesülnek, a multiplikatív z_i szorzók függetlenek a változók választásától. Itt most példaként az első esetre mutatom be a formulákat. A vezető logaritmikus korrekciókat határozva meg a $z > x, y$ esetre,

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_1 &= 1 + \frac{g_2}{\pi v_F} \ln x + \frac{g_1 - g_2}{\pi v_F} \ln y + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_1^2 + 3g_2^2) \ln^2 x + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (4g_1^2 - 6g_1 g_2 + 3g_2^2) \ln^2 y + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (4g_1 g_2 - 6g_2^2) \ln x \ln z + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (-2g_1^2 + 8g_1 g_2 - 6g_2^2) \ln y \ln z + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_1^2 - 6g_1 g_2 + 6g_2^2) \ln^2 z + \dots\end{aligned}\tag{8.46}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_2 &= 1 + \frac{1}{2\pi v_F} \frac{g_1^2 + g_2^2}{g_2} \ln x - \frac{g_2}{2\pi v_F} \ln y + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (3g_1^2 + g_2^2) \ln^2 x + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} g_2^2 \ln^2 y + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} \left(4 \frac{g_1^3}{g_2} - 4g_1^2 - 2g_2^2 \right) \ln x \ln z + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (-2g_1^2 - 2g_2^2) \ln y \ln z + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} \left(-2 \frac{g_1^3}{g_2} + 3g_1^2 + 2g_2^2 \right) \ln^2 z + \dots\end{aligned}\tag{8.47}$$

A skálázás feltételét megadó (8.9) egyenletbe beírva ezeket a kifejezéseket, valóban ugyanazokat a multiplikatív z_i faktorokat és ugyanazt az invariáns csatolás értéket kapjuk, mint az egyváltozós esetben. A skálázási egyenleteink tehát valóban konzisztensek több változó esetén is.

Ezután érdemes még néhány szót szólni a többváltozós vertexek renormálási csoportos meghatározásáról. Egyszerűség kedvéért a kétváltozós esetre írva fel a Lie-egyenleteket,

$$\frac{\partial \ln \tilde{\Gamma}_i(x, y, g_1, g_2)}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \tilde{\Gamma}_i \left(\xi, \frac{y}{x}, g'_1(x), g'_2(x) \right) \Big|_{\xi=1}, \quad (8.48)$$

$$\frac{\partial \ln \tilde{\Gamma}_i(x, y, g_1, g_2)}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \tilde{\Gamma}_i \left(\frac{x}{y}, \eta, g'_1(y), g'_2(y) \right) \Big|_{\eta=1}. \quad (8.49)$$

A dimenziótlan x és y változókat úgy vezettük be, hogy $|x|, |y| \leq 1$, ezért a (8.48) Lie-egyenletet csak az $|y| \leq |x|$, a (8.49) egyenletet pedig csak a $|x| \leq |y|$ esetben használjuk. Ezek figyelembevételével az $x > y$ esetben az egyenleteket a

$$\begin{aligned} \ln \frac{\tilde{\Gamma}_i(x, y, g_1, g_2)}{\tilde{\Gamma}_i(1, 1, g_1, g_2)} &= \int_y^x \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \tilde{\Gamma}_i \left(\xi, \frac{y}{x'}, g'_1(x'), g'_2(x') \right) \Big|_{\xi=1} dx' - \\ &- \int_y^1 \frac{1}{y'} \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \tilde{\Gamma}_i(\eta, \eta, g'_1(y'), g'_2(y')) \Big|_{\eta=1} dy', \end{aligned} \quad (8.50)$$

az $y > x$ esetben pedig a

$$\begin{aligned} \ln \frac{\tilde{\Gamma}_i(x, y, g_1, g_2)}{\tilde{\Gamma}_i(1, 1, g_1, g_2)} &= \int_x^y \frac{1}{y'} \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \tilde{\Gamma}_i \left(\frac{x}{y'}, \eta, g'_1(y'), g'_2(y') \right) \Big|_{\eta=1} dy' - \\ &- \int_x^1 \frac{1}{x'} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \tilde{\Gamma}_i(\xi, \xi, g'_1(x'), g'_2(x')) \Big|_{\xi=1} dx' \end{aligned} \quad (8.51)$$

alakban oldhatjuk meg.

Az egyváltozós probléma Lie-egyenleteihez képest lényeges különbség, hogy az y/x , illetve x/y változók is megjelennek a (8.48), (8.49) Lie-egyenletekben, s nem elegendő a levágás helyén ismerni a függvényeket, illetve deriváltjukat. Emiatt a Lie-egyenletek integrálásával általában gyengébb közelítést kapunk, mint az egyváltozós esetben.

Ez a probléma nem lép fel, ha a vertex szeparálható a két változójában, vagyis

$$\tilde{\Gamma}(x, y, g_1, g_2) = \tilde{\gamma}_x(x, g_1, g_2) \tilde{\gamma}_y(y, g_1, g_2). \quad (8.52)$$

Ekkor ugyanis két független Lie-egyenletet kapunk,

$$\frac{\partial \ln \tilde{\gamma}_x(x, g_1, g_2)}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \tilde{\gamma}_x(\xi, g'_1(x), g'_2(x)) \Big|_{\xi=1}, \quad (8.53)$$

$$\frac{\partial \ln \tilde{\gamma}_y(y, g_1, g_2)}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \tilde{\gamma}_y(\eta, g'_1(y), g'_2(y)) \Big|_{\eta=1}. \quad (8.54)$$

Maguk a vertexek a legtöbb esetben nem szeparálhatók. Előfordulhat azonban, hogy lineárkombinációval faktorizálódó vertexeket lehet bevezetni. Ha $\tilde{\Gamma}_1$ és $\tilde{\Gamma}_2$ eleget tesz a skálafeltételnek, akkor könnyen beláthatóan egy

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\alpha g_1 \tilde{\Gamma}_1 + \beta g_2 \tilde{\Gamma}_2}{\alpha g_1 + \beta g_2} \quad (8.55)$$

alakú lineárkombináció is skálázódik, s a Lie-egyenletek erre a mennyiségre is felírhatók. Erre mutatunk most be két példát. A négy kétváltozós eset közül annál a kettőnél kaphatunk faktorizálódó vertexeket, amelynél $x \sim z > y$ vagy $y \sim z > x$, vagyis a z változó a nagyobbik változóval azonos nagyságrendű. Ezekben az esetekben, $x \sim z > y$ esetén a vertexek

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = g_1 \tilde{\Gamma}_1 = g_1 + \frac{g_1 g_2}{\pi v_F} \ln x + g_1 \frac{g_1 - g_2}{\pi v_F} \ln y + \\ + \frac{1}{8\pi^2 v_F^2} [(3g_1^3 + 3g_1 g_2^2) \ln^2 x + (7g_1^3 + 3g_1 g_2^2 - 8g_1^2 g_2) \ln^2 y + \\ + (-2g_1^3 + 8g_1^2 g_2 - 6g_1 g_2^2) \ln x \ln y] + \dots, \end{aligned} \quad (8.56)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = g_2 \tilde{\Gamma}_2 = g_2 + \frac{g_1^2 + g_2^2}{2\pi v_F} \ln x - \frac{g_2^2}{2\pi v_F} \ln y + \\ + \frac{1}{8\pi^2 v_F^2} [(4g_1^3 + 3g_1^2 g_2 + g_2^3) \ln^2 x + (g_2^3 - g_1^2 g_2) \ln^2 y - (2g_1^2 g_2 + 2g_2^3) \ln x \ln y] + \dots, \end{aligned} \quad (8.57)$$

az $y \sim z > x$ esetén pedig

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = g_1 + \frac{g_1 g_2}{\pi v_F} \ln x + g_1 \frac{g_1 - g_2}{\pi v_F} \ln y + \\ + \frac{1}{8\pi^2 v_F^2} [(2g_1^3 + 2g_1^2 g_2 + 3g_1 g_2^2) \ln^2 x + (6g_1^3 - 6g_1^2 g_2 + 3g_1 g_2^2) \ln^2 y + \\ + (4g_1^2 g_2 - 6g_1 g_2^2) \ln x \ln y] + \dots, \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = g_2 + \frac{g_1^2 + g_2^2}{2\pi v_F} \ln x - \frac{g_2^2}{2\pi v_F} \ln y + \frac{1}{8\pi^2 v_F^2} [(2g_1^3 + 4g_1^2 g_2 + g_2^3) \ln^2 x + \\ + (-2g_1^3 + g_2^3) \ln^2 y + (4g_1^3 - 4g_1^2 g_2 - 2g_2^3) \ln x \ln y] + \dots \end{aligned} \quad (8.59)$$

Ezen mennyiségek helyett a $\tilde{\Gamma}_3 = (2\Gamma_1 - \Gamma_2)/(2g_1 - g_2)$ és $\tilde{\Gamma}_2$ kombinációkat használva az első esetben, a $\tilde{\Gamma}_+ = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/(g_1 + g_2)$ és $\tilde{\Gamma}_- = (\Gamma_1 - \Gamma_2)/(g_1 - g_2)$ kombinációkat pedig a második esetben, a Lie-egyenletekben nem jelenik meg az y/x , illetve x/y változó, arra mutatva, hogy ezek a vertexkombinációk szeparálódnak az x és y vál-

tozókban. A Lie-egyenleteket a megfelelő módon felírva és megoldva, a következő eredményre jutunk:

$$\Gamma_3(x, y) = \left(\frac{3}{2} \frac{g_1}{1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln x} - g_2 + \frac{1}{2} g_1 \right) \frac{\left(1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln x \right)^{3/4}}{\left(1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln y \right)^{3/4}} \times \exp \left[-\frac{g_1 - 2g_2}{4\pi v_F} (\ln x - \ln y) \right], \quad (8.60)$$

$$\Gamma_2(x, y) = \left(g_2 + g_1 \frac{g_1 - 2g_2}{2\pi v_F} \ln x \right) \frac{\left(1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln x \right)^{1/4}}{\left(1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln y \right)^{5/4}} \exp \left[-\frac{g_1 - 2g_2}{4\pi v_F} (\ln x - \ln y) \right], \quad (8.61)$$

illetve

$$\Gamma_+(x, y) = \left(\frac{3}{2} \frac{g_1}{1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln y} + g_2 - \frac{1}{2} g_1 \right) \frac{\left(1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln y \right)^{3/4}}{\left(1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln x \right)^{3/4}} \times \exp \left[-\frac{g_1 - 2g_2}{4\pi v_F} (\ln x - \ln y) \right], \quad (8.62)$$

$$\Gamma_-(x, y) = \left(\frac{1}{2} \frac{g_1}{1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln y} - g_2 + \frac{1}{2} g_1 \right) \frac{\left(1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln x \right)^{1/4}}{\left(1 - \frac{g_1}{\pi v_F} \ln y \right)^{1/4}} \times \exp \left[-\frac{g_1 - 2g_2}{4\pi v_F} (\ln x - \ln y) \right]. \quad (8.63)$$

A kétváltozós vertexeket a parketta-közelítés keretében *Bicskov*, *Gorkov* és *Dzjalosinszkij* (1966) vizsgálta a $g_1 = g_2 = g$ esetben. A mi eredményeink visszaadják ezeket a formulákat, ha a csatolásokat azonosnak vesszük. Ez újabb bizonyíték arra, hogy a vezető logaritmikus járulékokat, a parketta-gráfok összegét a renormálási csoport első közelítése helyesen adja. Hangsúlyozzuk, hogy a Lie-egyenletben csak az elsőrendű korrekciókat vettük figyelembe. A logaritmusban négyzetes tagokat csak azért kellett meghatározni, hogy a faktorizálódó kombinációkat megtaláljuk.

8.5. Az általános, öt csatolású eset vizsgálata

A skálázási eljárást eddig a két csatolású esetre mutattam be, s a rendszer viselkedését is a két paraméter függvényében határoztam meg. A modell a legáltalánosabb esetben öt csatolást tartalmaz ($g_{1\parallel}$, $g_{1\perp}$, g_2 , g_3 , g_4). Azt vizsgálom most meg (*Sólyom*, publikálatlan), hogy ebben az általános esetben is alkalmazható-e a renormálási csoport és mennyiben módosul a fizikai viselkedés.

Az öt csatolásnak megfelelően öt dimenziótlan vertexet vezetünk be. Ezeket a következő vertexekből definiáljuk:

$$(8.64)$$

A spinfüggésnek megfelelően Γ -t három tagra bontjuk fel,

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{1\parallel} \tilde{\Gamma}_{1\parallel} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha\beta} + g_{1\perp} \tilde{\Gamma}_{1\perp} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha,-\beta} - g_2 \tilde{\Gamma}_2 \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}, \quad (8.65)$$

a másik két vertexnél pedig a dimenziótlan vertexek definíciója:

$$\Gamma_3 = g_3 \tilde{\Gamma}_3 (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}), \quad (8.66)$$

$$\Gamma_4 = g_4 \tilde{\Gamma}_4 (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}). \quad (8.67)$$

Ezeknek a mennyiségeknek a segítségével fogalmazva meg a skálázási feltételt,

$$d\left(\frac{k}{k_c}, \frac{\omega}{\omega_D}, g'_{1\parallel}, \dots, g'_4\right) = z_d \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right) d\left(\frac{k}{k_c}, \frac{\omega}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right), \quad (8.68)$$

$$\tilde{\Gamma}_{1\parallel} \left(\frac{k_i}{k_c}, \frac{\omega_i}{\omega_D}, g'_{1\parallel}, \dots, g'_4\right) = z_{1\parallel}^{-1} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right) \tilde{\Gamma}_{1\parallel} \left(\frac{k_i}{k_c}, \frac{\omega_i}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right), \quad (8.69)$$

$$\tilde{\Gamma}_{1\perp} \left(\frac{k_i}{k_c}, \frac{\omega_i}{\omega_D}, g'_{1\parallel}, \dots, g'_4\right) = z_{1\perp}^{-1} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right) \tilde{\Gamma}_{1\perp} \left(\frac{k_i}{k_c}, \frac{\omega_i}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right), \quad (8.70)$$

$$\tilde{\Gamma}_j \left(\frac{k_i}{k_c}, \frac{\omega_i}{\omega_D}, g'_{1\parallel}, \dots, g'_4\right) = z_j^{-1} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right) \tilde{\Gamma}_j \left(\frac{k_i}{k_c}, \frac{\omega_i}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right), \quad (8.71)$$

$$j = 2, 3, 4$$

$$g'_{1\parallel} = g_{1\parallel} z_{1\parallel} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right) z_d^{-2} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right), \quad (8.72)$$

$$g'_{1\perp} = g_{1\perp} z_{1\perp} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right) z_d^{-2} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right), \quad (8.73)$$

$$g'_j = g_j z_j \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right) z_d^{-2} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1\parallel}, \dots, g_4\right), \quad j = 2, 3, 4. \quad (8.74)$$

Az általános eset vizsgálatát csak annál a speciális változóválasztásnál végeztem el, amikor az impulzusok a Fermi-impulzusnál vannak rögzítve, a frekvenciákat pedig

mind egy ω -val fejezhetjük ki. Először csak az elsőrendű korrekciókat véve figyelembe a renormálandó mennyiségekben a következő gráfokat kell vizsgálnunk:

$$\Gamma = \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \\ \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \end{array} \quad (8.75)$$

$$\Gamma_3 = \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \end{array} \quad (8.76)$$

$$\Gamma_4 = \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \\ \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \end{array} \quad (8.77)$$

A következő rendben megjelennek az első sajátenergiás korrekciók,

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad (8.78)$$

A Γ vertexben 45, a Γ_3 és Γ_4 vertexben pedig 30—30 harmadrendű gráfot kell figyelembe venni. Mindezeket a járulékokat meghatározva, végül a következő kifejezéseket kapjuk:

$$d(\omega) = 1 + \frac{1}{8\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel}^2 + g_{1\perp}^2 - 2g_{1\parallel}g_2 + 2g_2^2 + g_3^2) \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \dots, \quad (8.79)$$

$$\tilde{\Gamma}_{1\parallel} = 1 + \frac{1}{\pi v_F} \frac{g_{1\perp}^2}{g_{1\parallel}} \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \frac{1}{\pi^2 v_F^2} g_{1\perp}^2 \left(\ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - i\pi \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right) + \quad (8.80)$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} \left(-g_{1\parallel}^2 + g_{1\perp}^2 + 2g_{1\parallel}g_2 - 2g_2^2 + 2\frac{g_{1\perp}^2}{g_{1\parallel}} g_4 - g_3^2 \right) \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \dots,$$

$$\tilde{\Gamma}_{1\perp} = 1 + \frac{1}{\pi v_F} g_{1\parallel} \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel}^2 + g_{1\perp}^2) \left(\ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - i\pi \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right) + \quad (8.81)$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (2g_{1\parallel}g_2 - 2g_2^2 + 2g_{1\parallel}g_4 - g_3^2) \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \dots,$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_2 = & 1 + \frac{1}{2\pi v_F} \frac{1}{g_2} (g_{1\perp}^2 - g_3^2) \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \\
 & + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} \frac{1}{g_2} [g_{1\parallel} g_{1\perp}^2 - (g_{1\parallel} - 2g_2) g_3^2] \left(\ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - i\pi \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right) + \\
 & + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} \left(\frac{g_{1\parallel} g_{1\perp}^2}{g_2} - g_{1\parallel}^2 - g_{1\perp}^2 + 2g_{1\parallel} g_2 - 2g_2^2 + \frac{g_{1\perp}^2 g_4}{g_2} - \frac{g_{1\parallel} g_3^2}{g_2} + \right. \\
 & \left. + g_3^2 + \frac{g_3^2 g_4}{g_2} \right) \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \dots,
 \end{aligned} \tag{8.82}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_3 = & 1 + \frac{1}{\pi v_F} (g_{1\parallel} - 2g_2) \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \\
 & + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} [(g_{1\parallel} - 2g_2)^2 + g_3^2] \left(\ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - i\pi \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right) + \\
 & + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (-g_{1\perp}^2 - 2g_{1\parallel} g_2 + 2g_2^2 - 2g_{1\parallel} g_4 + 4g_2 g_4) \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \dots,
 \end{aligned} \tag{8.83}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_4 = & 1 + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} \left(-g_{1\perp}^2 - g_{1\parallel}^2 + 2g_{1\parallel} g_2 - 2g_2^2 - 3g_{1\parallel} \frac{g_{1\perp}^2}{g_4} + \right. \\
 & \left. + 3g_{1\parallel} \frac{g_3^2}{g_4} - 6g_2 \frac{g_3^2}{g_4} - g_3^2 \right) \left(\ln \frac{\omega}{2\omega_D} - \frac{1}{2} i\pi \right) + \dots.
 \end{aligned} \tag{8.84}$$

Ezek a kifejezések valóban eleget tesznek a skálázási feltevésünknek, s a renormált csatolások perturbációs alakja:

$$g'_{1\parallel} = g_{1\parallel} + \frac{g_{1\perp}^2}{\pi v_F} \ln \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \frac{g_{1\parallel} g_{1\perp}^2}{\pi^2 v_F^2} \ln^2 \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel} + g_4) g_{1\perp}^2 \ln \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \dots, \tag{8.85}$$

$$\begin{aligned}
 g'_{1\perp} = & g_{1\perp} + \frac{1}{\pi v_F} g_{1\parallel} g_{1\perp} \ln \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel}^2 g_{1\perp} + g_{1\perp}^3) \ln^2 \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \\
 & + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel}^2 g_{1\perp} + g_{1\perp}^3 + 2g_{1\parallel} g_{1\perp} g_4) \ln \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \dots,
 \end{aligned} \tag{8.86}$$

$$\begin{aligned}
 g'_2 = & g_2 + \frac{1}{2\pi v_F} (g_{1\perp}^2 - g_3^2) \ln \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} [g_{1\parallel} g_{1\perp}^2 - (g_{1\parallel} - 2g_2) g_3^2] \ln^2 \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \\
 & + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} [g_{1\parallel} g_{1\perp}^2 + g_{1\perp}^2 g_4 - (g_{1\parallel} - 2g_2) g_3^2 + g_3^2 g_4] \ln \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \dots,
 \end{aligned} \tag{8.87}$$

$$\begin{aligned}
 g'_3 = & g_3 + \frac{1}{\pi v_F} (g_{1\parallel} - 2g_2) g_3 \ln \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} [(g_{1\parallel} - 2g_2)^2 g_3 + \\
 & + g_3^3] \ln^2 \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} [(g_{1\parallel} - 2g_2)^2 g_3 - 2(g_{1\parallel} - 2g_2) g_3 g_4 + g_3^3] \ln \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \dots,
 \end{aligned} \tag{8.88}$$

$$g'_4 = g_4 + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} [-3g_{1\parallel} g_{1\perp}^2 + 3(g_{1\parallel} - 2g_2) g_3^2] \ln \frac{\omega'_D}{\omega_D} + \dots. \tag{8.89}$$

Ezekből az alakokból a Lie-egyenleteket már felírhatjuk. g_2' helyett célszerű a $g_{1\parallel}' - 2g_2'$ kombinációt használni, s így

$$\frac{dg_{1\parallel}'(s)}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{\pi v_F} g_{1\perp}'^2(s) + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} [2g_{1\parallel}'(s) g_{1\perp}'^2(s) + 2g_{1\perp}'^2(s) g_4'(s)] + \dots \right\}, \quad (8.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg_{1\perp}'(s)}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{\pi v_F} g_{1\parallel}'(s) g_{1\perp}'(s) + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} [g_{1\parallel}'^2(s) g_{1\perp}'(s) + \right. \\ \left. + g_{1\perp}'^3(s) + 2g_{1\parallel}'(s) g_{1\perp}'(s) g_4'(s)] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (8.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(g_{1\parallel}'(s) - 2g_2'(s))}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{\pi v_F} g_3'^2(s) + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} [2(g_{1\parallel}'(s) - 2g_2'(s)) g_3'^2(s) - \right. \\ \left. - 2g_3'^2(s) g_4'(s)] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (8.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg_3'(s)}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{\pi v_F} (g_{1\parallel}'(s) - 2g_2'(s)) g_3'(s) + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} [(g_{1\parallel}'(s) - 2g_2'(s))^2 g_3'(s) + \right. \\ \left. + g_3'^3(s) - 2(g_{1\parallel}'(s) - 2g_2'(s)) g_3'(s) g_4'(s)] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (8.93)$$

$$\frac{dg_4'(s)}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} [-3g_{1\parallel}'(s) g_{1\perp}'^2(s) + 3(g_{1\parallel}'(s) - 2g_2'(s)) g_3'^2(s)] + \dots \right\}. \quad (8.94)$$

Ezeknek a csatolt differenciálegyenleteknek a megoldása ilyen általános esetben analitikusan nem adható meg. Bizonyos általános következtetéseket mégis le tudunk vonni. Először a g_4 csatolással foglalkozunk. Az egzaktul megoldható Tomonaga-modellben (Tomonaga 1950, Dzjalosinszkij és Larkin 1973, Nozières (publikálatlan), Fogedby 1976) a $g_{1\perp}$ és g_3 csatolás nem szerepel, a többi kölcsönhatás viszont, amint az a Lie-egyenletekből leolvasható, nem renormálódik. A g_4 csatolás szerepe az, hogy a Fermi-sebességet renormálja. Valószínűnek látszik, hogy véges nagy impulzusátadású szórások ($g_{1\perp}$, g_3) esetén g_4 hatása nem vehető ilyen egyszerűen figyelembe, de közelítésként megpróbálkozhatunk ezzel. Valóban, bevezetve a

$$v_F' = v_F \left(1 - \frac{g_4}{2\pi v_F} \right), \quad v_F'' = v_F \left(1 + \frac{g_4}{2\pi v_F} \right) \quad (8.95)$$

renormált Fermi-sebességeket, a (8.90)–(8.93) egyenletekben g_4 hatását harmadrendig helyesen vesszük figyelembe a következő egyenletek:

$$\frac{dg'_{1\parallel}(s)}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{\pi v'_F} g'_{1\perp}(s) + \frac{1}{2\pi^2 v_F'^2} g'_{1\parallel}(s) g'_{1\perp}(s) + \dots \right\}, \quad (8.96)$$

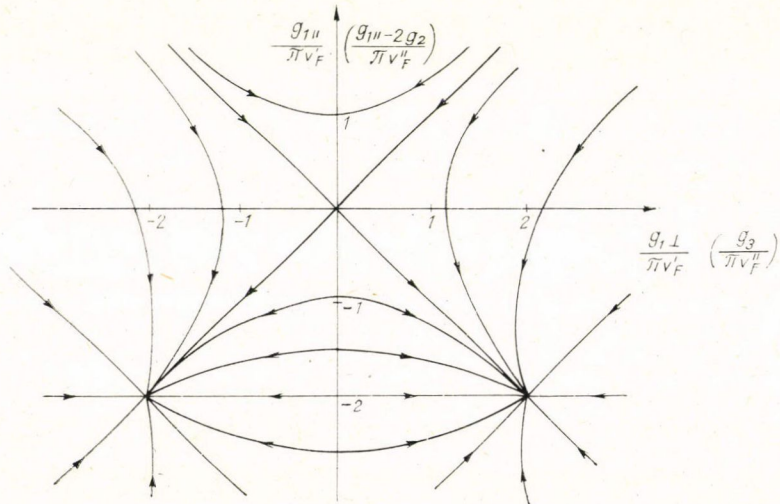
$$\frac{dg'_{1\perp}(s)}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{\pi v'_F} g'_{1\parallel}(s) g'_{1\perp}(s) + \frac{1}{4\pi^2 v_F'^2} [g'_{1\parallel}(s) g'_{1\perp}(s) + g'_{1\perp}(s)] + \dots \right\}, \quad (8.97)$$

$$\frac{d(g'_{1\parallel}(s) - 2g'_2(s))}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{\pi v_F''} g_3'^2(s) + \frac{1}{2\pi^2 v_F''^2} (g'_{1\parallel}(s) - 2g'_2(s)) g_3'^2(s) + \dots \right\}, \quad (8.98)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg'_3(s)}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{\pi v_F''} (g'_{1\parallel}(s) - 2g'_2(s)) g'_3(s) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi^2 v_F''^2} [(g'_{1\parallel}(s) - 2g'_2(s))^2 g'_3(s) + g_3'^3(s)] + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (8.99)$$

Két teljesen analóg egyenletrendszeret kaptunk. Az egyikben $g_{1\parallel}$ és $g_{1\perp}$ szerepel v'_F -vel, míg a másikban $g_{1\parallel} - 2g_2$ és g_3 v_F'' -vel. Sőt ezek az egyenletek formailag teljesen hasonlóak az anizotrop Kondo-probléma (2.35)-ben és (2.36)-ban megadott skálaegyenleteihez. Felrajzolva az ekvivalens problémákat megadó skálatrajektóriákat, a 11. ábrán látható skálagörbékét kapjuk.

Két fix-pontot és egy fix-pontokból álló vonalat kapunk mindkét egyenletrendszerből. A fix-pontok: $g_{1\parallel}/\pi v'_F = -2$, $g_{1\perp}/\pi v'_F = 2$, illetve $g_{1\parallel}/\pi v'_F = g_{1\perp}/\pi v'_F = -2$; a fix-pontokból álló vonal pedig $g_{1\perp} = 0$. Ez utóbbi akkor stabilis, ha $g_{1\parallel} \geq 0$. A $(g_{1\parallel} - 2g_2, g_3)$ síkon teljesen analóg módon írhatók fel a fix-pontok. Az eddig vizsgált két csatolású esethez képest tehát a fix-pontok száma megnövekedett, a csatolások terében a fázisdiagram is bonyolultabbá válik. Ennek a vizsgálatához a szuszceptibilitásokat kell meghatároznunk az öt csatolás esetén. Ezelőtt azonban célszerű



11. ábra. Az egydimenziós elektrongáz rendszer skálagörbéi spinfüggő kölcsönhatás esetén és umklapp folyamatok figyelembevételével

néhány szó erejéig arról beszélni, mennyire veendő szigorúan ezek a fix-pont értékek. A két csatolású problémánál láttuk, hogy $g_1/\pi v_F$ egységnyi nagyságrendű fix-pontjánál a számérték nem vehető szigorúan, ezért csak azt tételeztük fel, hogy jobb közelítést véve is egységnyi nagyságrendű lesz. Most viszont a Kondo-probléma skálagörbéivel való összevetés arra indíthat, hogy komolyan vegyünk egy olyan feltevést, amely szerint itt is a végtelen erősségű csatoláshoz skálázunk. Jelenleg erre nincs semmilyen, a Wilson-féle tárgyaláshoz hasonló elmélet, s azt sem próbálta meg senki, hogy feltételezve egy végtelen erős csatolást, a fizikai viselkedést ebből próbálja leírni. Ezért a továbbiakban is véges, egységnyi nagyságrendű fixpontot tételezünk fel.

Visszatérve a fázisdiagramhoz, a válaszfüggvények perturbációs alakja most

$$\begin{aligned}
 N(\omega) = & \frac{1}{\pi v_F} \ln \frac{\omega}{2\omega_D} \left[1 + \frac{1}{2\pi v_F} (g_{1\parallel} + g_{1\perp} - g_2 + g_3) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \right. \\
 & + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel} + g_{1\perp} - g_2 + g_3)^2 \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - \\
 & - \frac{1}{12\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel}^2 - 2g_{1\parallel} g_2 - 2g_{1\perp} g_2 + g_2^2 + 2g_{1\perp} g_3 + 2g_2 g_3) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \\
 & + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_{1\perp} g_4 + g_2 g_4 - g_3 g_4) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \\
 & \left. + \frac{1}{8\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel}^2 + g_{1\perp}^2 - 2g_{1\parallel} g_2 + 2g_2^2 + g_3^2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right], \quad (8.100)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi(\omega) = & \frac{1}{2\pi v_F} \ln \frac{\omega}{2\omega_D} \left[1 - \frac{1}{2\pi v_F} (g_2 + g_3) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \right. \\
 & + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_2 + g_3)^2 \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - \\
 & - \frac{1}{12\pi^2 v_F^2} (g_{1\perp}^2 + g_2^2 + 2g_{1\parallel} g_3 - 2g_2 g_3) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} - \\
 & - \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel} g_4 - g_2 g_4 - g_3 g_4) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \\
 & \left. + \frac{1}{8\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel}^2 + g_{1\perp}^2 - 2g_{1\parallel} g_2 + 2g_2^2 + g_3^2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right], \quad (8.101)
 \end{aligned}$$

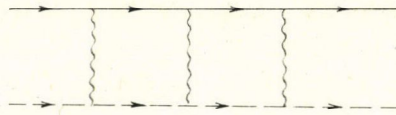
$$\begin{aligned}
 \Delta(\omega) = & -\frac{1}{\pi v_F} \ln \frac{\omega}{2\omega_D} \left[1 + \frac{1}{2\pi v_F} (g_{1\perp} + g_2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_{1\perp} + g_2)^2 \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \right. \\
 & + \frac{1}{12\pi^2 v_F^2} (2g_{1\parallel} g_{1\perp} - 2g_{1\perp} g_2 - g_2^2 - g_3^2) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \\
 & + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel} g_4 + g_{1\perp} g_4 - g_2 g_4) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \\
 & \left. + \frac{1}{8\pi^2 v_F^2} (g_{1\parallel}^2 + g_{1\perp}^2 - 2g_{1\parallel} g_2 + 2g_2^2 + g_3^2) \ln \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots \right]. \quad (8.102)
 \end{aligned}$$

Itt is igaz, hogy a g_4 -et tartalmazó tagok beolvaszthatók úgy, hogy a csatolásban lineáris tagoknál v_F helyett v_F' -t írunk $g_{1\parallel}$ és $g_{2\perp}$ mellett és v_F'' -t $g_{1\parallel} - 2g_2$ és g_3 mellett. A továbbiakban ezért a g_4 tagokkal nem törődünk. A fázisdiagramot most a $g_{1\parallel}$, $g_{1\perp}$, g_2 és g_3 csatolások terében kellene felrajzolnunk. A két csatolású esethez képest a lényeges változás az, hogy abban a tartományban, ahol az umklapp folyamatok lényegessé válnak, a rendszerben vagy egy sűrűség hullám stabilizálódik, vagy normál fémes állapot marad zérus hőmérsékleten is.

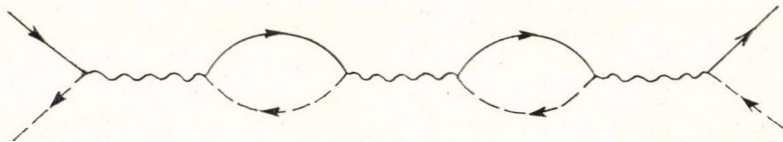
8.6. Egydimenziós elektrongáz modell kétfajta levágási energiával

Az eddig vizsgált modellben a levágást, amelynek a segítségével a skálázást végeztük, a Fermi-impulzusra szimmetrikusan választottuk, s mindazok az elektronok, melyek a levágási impulzusnál kisebb impulzussal rendelkeznek, részt vesznek a szórási folyamatban. Ez az ún. sávlevágás. Egy alternatív módszer az, amikor az impulzusátadásban vezetünk be levágást. Chui, Rice és Varma (1974) megmutatta, hogy bizonyos fononközvetítette effektív elektron—elektron kölcsönhatásos folyamatoknál ez a fizikailag jogosabb levágás, ugyanakkor egy sávlevágásra is szükség van az elektronsáv szélességének megfelelően. Ezt továbbfejlesztve Grest, Abrahams, Chui, Lee és Zawadowski (1976) a renormálási csoport módszert általánosította erre a két levágást tartalmazó modellre. Megmutatták, hogy ez a modell leképezhető az egylevágásos modellre, így annak minden fizikai eredménye könnyen átvihető a kétlevágásos modellre is.

Igaz ugyan, hogy egyes folyamatoknál az impulzusátadásbeli levágás a jogos, más folyamatoknál viszont a sávlevágás a fizikailag indokolható. Ez a helyzet a Cooper-párok terjedését leíró gráfoknál, például a



folyamatnál, az elektron—lyuk gerjesztések terjedését megadó polarizációs buborékoknál, például a



folyamatnál viszont az energiaátadásban van a levágás. Egy olyan modellt, mely ezt a megkülönböztetést megteszi a gráfoknál, igen nehéz matematikailag kezelni, ezért vizsgálták Grest és munkatársai azt a modellt, melyben minden kölcsönhatásnál az impulzusátadásban van a levágás. Mi (Sólyom és Szabó 1976) ezzel szemben egy olyan kétlevágásos modellt vizsgáltunk, melyben a fononok közvetítette kölcsönhatáshoz egy ω_D sávlevágás, a direkt elektron—elektron kölcsönhatáshoz pedig egy másik E_0 sávlevágás tartozik. A fononok közvetítette csatolás erőssége g_{1ph} és g_{2ph} (csak ezzel a két csatolással dolgozunk), a direkt csatolás erőssége g_{1c} és g_{2c} . A g_{1ph} és g_{2ph}

csatolás tehát csak azon elektronok között létezik, melyek a Fermi-energia körüli $2\omega_D$ szélességű sávban vannak, míg g_{1c} és g_{2c} egy $2E_0$ szélességű sávban hat.

Ennek a modellnek a vizsgálatában úgy jártunk el, hogy a korábbiakból ismert fizikai képet intuitív módon általánosítottuk a két levágás esetére, s ezután megmutattuk, hogy így valóban jól állítjuk elő az érdekes fizikai mennyiségeket. Feltéve, hogy $E_0 \gg \omega_D$, a levágás csökkentését E_0 -val kezdjük. Mivel g_{1ph} és g_{2ph} nem hat azon elektronokra, melyek energiája ω_D és E_0 között van, E_0 skálázásával csak g_{1c} és g_{2c} renormálódik, mégpedig ugyanolyan módon, mint az egylevágású esetben, vagyis most is igaz (8.19) és (8.20), de most $s = E'_0/E_0$ és a határfeltétel az, hogy

$$g'_1(s = 1) = g_{1c}, \quad g'_2(s = 1) = g_{2c}. \quad (8.103)$$

A skálázást folytatva addigi míg $E'_0 = \omega_D$, a

$$\bar{g}_{1c} = g'_1\left(\frac{\omega_D}{E_0}\right), \quad \bar{g}_{2c} = g'_2\left(\frac{\omega_D}{E_0}\right) \quad (8.104)$$

csatolásokhoz jutunk. Miután az ω_D és E_0 közötti fázisteret kitranszformáltuk, az ω_D -nél kisebb energiáknál g_{1ph} -t és g_{2ph} -t is figyelembe kell vennünk, vagyis az effektív csatolás $\bar{g}_{1c} + g_{1ph}$, $\bar{g}_{2c} + g_{2ph}$. Most már ezzel a csatolással indulva és az ω_D levágást skálázva újra használhatjuk az egylevágásos probléma szokásos skálaegyenleteit.

Ugyanígy kell eljárunk tetszőleges fizikai mennyiség meghatározásánál is. Nézzük például az $N(\omega)$ válaszfüggvényt. Ezt meg akarjuk határozni $\omega \ll \omega_D \ll E_0$ energiákra. Először a renormálási csoporttal az $\omega_D \ll \omega \ll E_0$ energiákra határozzuk meg a szokásos (8.38) Lie-egyenlet segítségével, x -nek most ω/E_0 -t mint egyetlen változót választva.

Ennek az egyenletnek a megoldása:

$$\begin{aligned} \bar{N}\left(\frac{\omega}{E_0}\right) = & 1 + \frac{1}{\pi v_F} (2g_{1c} - g_{2c}) \ln \frac{\omega}{2E_0} + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (2g_{1c} - g_{2c})^2 \ln^2 \frac{\omega}{2E_0} + \\ & + \frac{3}{4\pi^2 v_F^2} g_{1c}^2 \ln^2 \frac{\omega}{2E_0} + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g_{1c}^2 - g_{1c}g_{2c} + g_{2c}^2) \ln \frac{\omega}{2E_0} + \dots \end{aligned} \quad (8.105)$$

Az $\omega = \omega_D$ -nél felvett értéket jelöljük \bar{N}_0 -val.

$$\bar{N}\left(\frac{\omega_D}{E_0}\right) = \bar{N}_0. \quad (8.106)$$

Az ω_D -nél kisebb energiákra folytatva az eljárást, most is a (8.38) Lie-egyenletet használjuk, de a határfeltétel az, hogy $\omega = \omega_D$ -nél \bar{N}_0 -t kapjuk vissza, az invariáns töltésre pedig a $\bar{g}_{1c} + g_{1ph}$ és $\bar{g}_{2c} + g_{2ph}$ csatolásokból számolt invariáns csatolásokat írjuk be. Ilyen módon véghezvive a számolást, majd \bar{N} -ből az N válaszfüggvényt

meghatározva, az eredményt a csatolások hatványai szerint kifejtve,

$$\begin{aligned}
 N(\omega) = & \frac{1}{\pi v_F} \ln \frac{\omega}{2E_0} + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (2g_{1c} - g_{2c}) \ln^2 \frac{\omega}{2E_0} + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (2g_{1ph} - g_{2ph}) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \\
 & + \frac{1}{4\pi^3 v_F^3} (2g_{1c} - g_{2c})^2 \ln^3 \frac{\omega}{2E_0} + \frac{1}{4\pi^3 v_F^3} (2g_{1ph} - g_{2ph})^2 \ln^3 \frac{\omega}{2\omega_D} + \\
 & + \frac{1}{2\pi^3 v_F^3} (2g_{1c} - g_{2c})(2g_{1ph} - g_{2ph}) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} \ln \frac{\omega}{2E_0} - \\
 & - \frac{1}{12\pi^3 v_F^3} (g_{1c}^2 - 4g_{1c}g_{2c} + g_{2c}^2) \ln^3 \frac{\omega}{2E_0} - \\
 & - \frac{1}{12\pi^3 v_F^3} (g_{1ph}^2 - 4g_{1ph}g_{2ph} + g_{2ph}^2) \ln^3 \frac{\omega}{2\omega_D} - \\
 & - \frac{1}{6\pi^3 v_F^3} (g_{1c}g_{1ph} - 2g_{1c}g_{2ph} - 2g_{1ph}g_{2c} + g_{2c}g_{2ph}) \ln^3 \frac{\omega}{2\omega_D} + \\
 & + \frac{1}{4\pi^3 v_F^3} (g_{1c}^2 - g_{1c}g_{2c} + g_{2c}^2) \ln^2 \frac{\omega}{2E_0} + \\
 & + \frac{1}{4\pi^3 v_F^3} (g_{1ph}^2 - g_{1ph}g_{2ph} + g_{2ph}^2) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \\
 & + \frac{1}{2\pi^3 v_F^3} (g_{1c}g_{1ph} - g_{1c}g_{2ph} - g_{1ph}g_{2c} + g_{2c}g_{2ph}) \ln^2 \frac{\omega}{2\omega_D} + \dots
 \end{aligned} \tag{8.107}$$

Ez pedig megegyezik a direkt perturbációs számításos eredménnyel.

Ebből azt a következtetést lehet levonni, hogy ez a kétlevágásos modell, ω_D és E_0 sávlevágással és g_{1ph} , g_{2ph} , g_{1c} és g_{2c} csatolással valóban leképezhető egy ω_D sávlevágással rendelkező problémára, melyben a csatolások $\bar{g}_{1c} + g_{1ph}$ és $\bar{g}_{2c} + g_{2ph}$. Mivel a fázisdiagram szempontjából a csatolások kezdő értékei, határesetektől eltekintve, lényegtelenek, a kétlevágásos modell is olyan fizikai tulajdonságokkal rendelkezhet, mint az egylevágásos modell. Hasonló következtetésre jutottak Grest és munkatársai is az általuk vizsgált modellben, így azt mondhatjuk, hogy a levágás milyenségének nincs lényeges szerepe a fizikai tulajdonságok meghatározásában.

8.7. További fejlemények

Az első cikkeink megjelenése után az irodalomban igen sok közlemény jelent meg, mely az egydimenziós modell különböző tulajdonságaival foglalkozott. A cikkek egy részében az általunk javasolt renormalizációs eljárást alkalmazták további mennyiségek meghatározására. Így például *Fukuyama, Rice, Varma* és *Halperin* (1974) a szokásos szinglett Cooper-párok mellett a tripllett Cooper-párok válaszfüggvényét, valamint a $k=0$ esetre vonatkozó szuszceptibilitást és a fahőt vizsgálta. *Fukuyama, Rice* és *Varma* (1974) a szennyezésszórásból adódó ellenállásjárulékot határozta meg, fel-

használva a válaszfüggvényekre kapott eredményeimet. Ennek a számolásnak a kiterjesztéseként megvizsgáltuk (Sólyom és Mihály 1975) az umklapp folyamatok szerepét az ellenállás hőmérsékletfüggésében. A csatolások értékétől függően az ellenállás hőmérsékletfüggésében maximum vagy minimum is megjelenhet, de monoton viselkedés is adódhat. Kimura (1975) tölem függetlenül vizsgálta az umklapp (g_3) folyamatok hatását renormalási csoporttal. Már említettem Chui, Rice és Varma (1974) valamint Grest, Abrahams, Chui, Lee és Zawadowski (1976) munkáit, ők más levágás-választással vizsgálták az egydimenziós elektrongáz modellt. Kimura és Fukuyama (1975) a rendszer kritikus módusait vizsgálta a renormalási csoporttal. Az általunk használt közelítésen egy lépéssel túlmenve, az invariáns csatolásra felírt Lie-egyenletekben a negyedrendű tagot is meghatározta Ting (1976). A kapott eredmény kvalitatíve ugyanaz, mint az általunk vizsgált közelítésben.

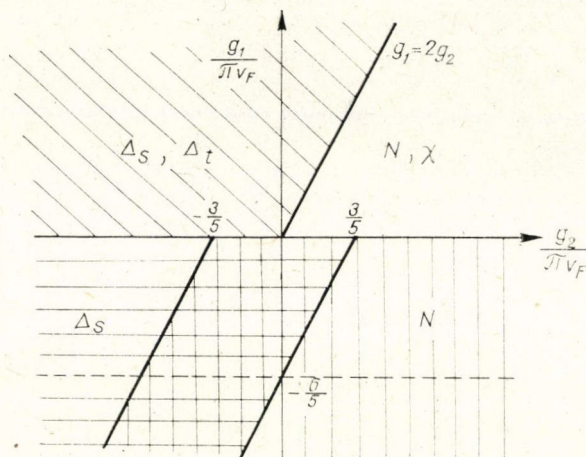
A cikkek egy másik része nem a renormalási csoport módszert alkalmazta, hanem az úgynevezett Tomonaga-transzformációt (Tomonaga 1950). Ennek a transzformációnak a segítségével a kölcsönható fermionok problémája bozonok rendszerére képezhető le. Kétfajta bozontér jelenik meg, az egyik a töltéssűrűségnek, a másik a spinsűrűségnek felel meg. A kétfajta bozon egymással nem hat kölcsön. A töltéssűrűségre vonatkozó problémában a $g_{1\parallel} - 2g_2$ és g_3 csatolások jelennek meg, a spinsűrűségre vonatkozó problémában $g_{1\parallel}$ és $g_{1\perp}$. A g_4 csatolás csak a Fermi-sebesség renormalálásában jelenik meg. A Tomonaga-modell határesetben ($g_{1\perp} = g_3 = 0$) ez a leképezés egzakt (Theumann 1967, Luther és Peschel 1974). A nagy impulzusátadású folyamatok figyelembevétele esetén matematikailag nem egzakt az eljárás (Grest 1976), de feltehetően a lényeges járulékokat ezzel az eljárással is helyesen kapjuk. Ezt elfogadva, Luther és Emery (1974) majd Emery, Luther és Peschel (1976) megmutatta, hogy a csatolásokra tett bizonyos feltevések mellett a nagy impulzusátadású szórást tartalmazó probléma is egzaktul megoldható. A töltéssűrűségre vonatkozó részben a $(g_{1\parallel} - 2g_2)/\pi v_F = -6/5$ választásnál, g_3 tetszőleges értékére, a spinsűrűségre vonatkozó részben $g_{1\parallel}/\pi v_F = -6/5$ esetén $g_{1\perp}$ tetszőleges értékére megadható a megoldás. Ebből a válaszfüggvények és az alapállapot is meghatározható. A $g_{1\parallel} = g_{1\perp}$ esetben Lee (1975) vizsgálta a fázisdiagramot, a $g_1/\pi v_F = -6/5$ -ből skálázással határozva meg az ekvivalens problémákat. Az általa kapott fázisdiagramot a 12. ábra mutatja. Δ_s a szinglett, Δ , pedig a tripllett Cooper-párok korrelációs függvényére utal.

Kis csatolások esetén a fázisdiagram ugyanaz, mint amit korábban a renormalási csoporttal kaptam (10. ábra). A renormalási egyenletek megoldásán is látszik az a tendencia, hogy $\alpha = (g_1 - 2g_2)/2\pi v_F$ nagy pozitív értékeinél csak Δ_s lesz szinguláris, míg nagy negatív α esetén N , de a fix-pont csatolás értékének a bizonytalansága miatt a korábbi számolások biztosan nem terjeszthetők ki nagy α értékekre.

Többen vizsgálták a Tomonaga- és a nagy impulzusátadású modellt más közelítésekkel is. Everts és Schulz (1974) a mozgásegyenlet módszert, Ohmi, Nakajima és Tsuneto (1976) a szkeleton gráf kifejtést alkalmazták. Ezekkel a módszerekkel a korábbi eredményeket lehetett reprodukálni, de nem alkalmasak arra, hogy a renormalási csoporttal kapott közelítésen túllépjenek.

Az utóbbi időben az egydimenziós rendszerek problémájának egészen új tárgyalását adta Luther (1976), amikor a térelméleti Thirring-moddellel és a sine-Gordon-egyenlettel való analógia felhasználásával az egydimenziós rendszerekben megjelenő szoliton állapotokat kezdte vizsgálni. A Thirring-moddellel és a sine-Gordon-egyenlettel való kapcsolat olyan transzformációkon alapszik, melyek matematikai értelemben nem egzaktak, de a közelítő lépések jogosultsága bizonyos értelemben indokolha-

tó. Amennyiben ezeket a transzformációkat elfogadjuk, s így a szoliton állapotok létezését is elfogadjuk, kérdésessé válik a skálázhatóságnak az erős csatolásokra való kiterjeszhetősége. Az lenne igaz, hogy az általunk javasolt skálaegyenletek csak gyenge csatolásoknál igazak ($g_1/\pi v_F > -6/5$), ezen értéken túl viszont már megváltozik a rendszer fizikai viselkedése. Mindezek még nyitott problémák, s további vizsgálatokat igényelnek.



12. ábra. Az egydimenziós elektrongáz rendszer fázisdiagramja a Luther—Emery-megoldás alapján

9. Gyengén csatolt láncok rendszerének vizsgálata

9.1. A modell és renormálhatóságának vizsgálata

A szigorúan egydimenziós elektrongáz viselkedésének leírása után rátérhetünk a közel egydimenziós rendszerek tárgyalására. A 8. fejezet elején említettem, hogy olyan fizikai rendszereket szeretnénk tanulmányozni, melyekben a molekulák elhelyezkedése és az elektronpályák átfedésének erős anizotrópiája miatt az elektronok bizonyos molekulaláncon egy irányban kis ellenállással haladhatnak, erre merőlegesen viszont igen kis valószínűséggel ugranak át az egyik láncról a másikra. Ennek a fizikai képnek megfelelően egy olyan rendszert vizsgálok most (Mihály és Sólyom 1976), melyben az elektronok csak egy irányban terjedhetnek. Az elektronokhoz az impulzuson és a spinen kívül még egy kvantumszámot rendelünk, mely azt mutatja meg, melyik lánc van az elektron. A láncok közötti csatolást egy Coulomb-típusú elektron—elektron kölcsönhatás hozza létre. A rendszer Hamilton-operátorát most így írhatjuk:

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \quad (9.1)$$

$$H_0 = \sum_{i,k,\alpha} \varepsilon_k c_{ik\alpha}^\dagger c_{ik\alpha}, \quad (9.2)$$

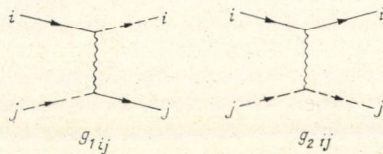
$$H_{\text{int}} = \frac{1}{L} \sum_{ijlm} \sum_{\substack{k_i \\ \alpha\beta}} g_{ijlm}(k_i) c_{ik_1\alpha}^\dagger c_{jk_2\beta}^\dagger c_{lk_3\beta} c_{mk_4\alpha}, \quad (9.3)$$

ahol $c_{ik\alpha}^+$ az i . láncon kelt egy k impulzusú, α spinű elektront. A láncok menti terjedés azt jelenti, hogy az energiaspektrum most

$$\varepsilon_k = v_F(|k_{\parallel}| - k_F), \quad (9.4)$$

ahol k_{\parallel} a láncok irányával párhuzamos impulzuskomponenst jelenti.

Föltéve, hogy a kölcsönhatás révén sem tudnak az elektronok az egyik láncrel a másikra átugrani, és a kicserélődési folyamatokat is elhagyva, még mindig — az egydimenziós esethez hasonlóan — olyan nagyszámú csatolást kapnánk, hogy kezelhetetlen egyenletrendszerhez jutnánk. Látni fogjuk, hogy a láncok közötti csatolásban a távoli szomszédok szerepe is fontos lesz, nem korlátozódhatunk a láncokon belüli és a szomszédos láncok közötti kölcsönhatásra. Hasonló megfontolásból, mint a 8.2. fejezetben, itt is csak a spinfüggetlen g_1 és g_2 típusú csatolást vettük figyelembe. A visszaszórási és előreszórási folyamatok erőssége természetesen a láncok közötti távolság függvénye. Gráfokon a következőképp ábrázolhatjuk ezeket a folyamatokat



$$(9.5)$$

A kölcsönhatási Hamilton-operátor a 8. fejezetben bevezetett a_k és b_k ($+k_F$, illetve $-k_F$ körüli elektronállapotokra vonatkozó) elektron-operátorok segítségével így írható:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{L} \sum_{ij} \sum_{k_1\alpha\beta} g_{1ij} a_{ik_1\alpha}^+ b_{jk_2\beta}^+ a_{jk_3\beta} b_{ik_4\alpha} \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) + \frac{1}{L} \sum_{ij} \sum_{k_1\alpha\beta} g_{2ij} a_{ik_1\alpha}^+ b_{jk_2\beta}^+ b_{jk_3\beta} a_{ik_4\alpha} \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4). \quad (9.6)$$

Ebben a modellben is a lehetséges fázisátalakulások érdekelnek, és ezért a válaszfüggvényeket akarjuk vizsgálni. Itt is a renormálási csoportot kívánjuk felhasználni, ezért első lépésként a renormálhatóságot kell megnézni, majd az invariáns csatolásokat kell meghatározni.

Az egydimenziós esethez teljesen hasonlóan definiáljuk a d dimenziótlan Green-függvényt, a $\tilde{\Gamma}_{1ij}$ és $\tilde{\Gamma}_{2ij}$ dimenziótlan vertexeket pedig a teljes $\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(ijlm)}$ vertexből a

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(ijlm)} = g_{1ij} \tilde{\Gamma}_{1ij} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \delta_{il} \delta_{jm} - g_{2ij} \tilde{\Gamma}_{2ij} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{im} \delta_{jl} \quad (9.7)$$

összefüggés definiálja. α, β, γ és δ a spinindexet, i, j, l és m a láncindexet jelöli. Az egyváltozós esetet fogjuk csak vizsgálni, ezért a skálaegyenleteket is egy változó esetére

írjuk fel. Tetszőleges energiajellegű változót, ω -t, $v_F k$ -t vagy T -t ($k_B=1$) x -szel jelölve, föltételezzük, hogy

$$d\left(\frac{x}{\omega_D}, g'_{1ij}, g'_{2ij}\right) = z_d d\left(\frac{x}{\omega_D}, g_{1ij}, g_{2ij}\right), \quad (9.8)$$

$$\tilde{\Gamma}_{1ij}\left(\frac{x}{\omega_D}, g'_{1ij}, g'_{2ij}\right) = z_{1ij}^{-1} \tilde{\Gamma}_{1ij}\left(\frac{x}{\omega_D}, g_{1ij}, g_{2ij}\right), \quad (9.9)$$

$$\tilde{\Gamma}_{2ij}\left(\frac{x}{\omega_D}, g'_{1ij}, g'_{2ij}\right) = z_{2ij}^{-1} \tilde{\Gamma}_{2ij}\left(\frac{x}{\omega_D}, g_{1ij}, g_{2ij}\right), \quad (9.10)$$

$$g'_{1ij} = g_{1ij} z_{1ij} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1ij}, g_{2ij}\right) z_d^{-2} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1ij}, g_{2ij}\right), \quad (9.11)$$

$$g'_{2ij} = g_{2ij} z_{2ij} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1ij}, g_{2ij}\right) z_d^{-2} \left(\frac{\omega'_D}{\omega_D}, g_{1ij}, g_{2ij}\right). \quad (9.12)$$

A perturbációs számítással másodrendig meghatározott mennyiségek valóban eleget tesznek ezeknek a feltételeknek. Ugyanolyan típusú gráfokat kell itt is figyelembe vennünk, mint az egydimenziós esetben, az analitikus járulékokban csak a csatolásokból adódó szorzófaktorok jelennek meg új kombinációkban. Az invariáns töltéseket meghatározva, végül a következő Lie-egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{dg'_{1ij}(s)}{ds} = & \frac{1}{s} \left\{ \sum_k \frac{1}{\pi v_F} g'_{1ik}(s) g'_{1kj}(s) + \frac{1}{\pi v_F} g'_{1ij}(s) (g'_{2ij}(s) - g'_{2ii}(s)) + \right. \\ & \left. + \sum_k \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} (g'_{1ik}(s) + g'_{2ik}(s) - g'_{2ik}(s) g'_{2kj}(s)) g'_{1ij}(s) + \right. \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} g'_{1ij}(s) g'_{1ii}(s) (g'_{2ij}(s) - g'_{2ii}(s)) + \dots \right\},$$

$$\begin{aligned} \frac{dg'_{2ij}(s)}{ds} = & \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{2\pi v_F} g'_{1ij}(s) + \frac{1}{4\pi^2 v_F^2} g'_{1ij}(s) g'_{1ii}(s) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} \sum_k g'_{1ik}(s) (g'_{2ij}(s) - g'_{2kj}(s)) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

A jobb oldalon csak a másodrendű tagokat tartva meg, ugyanazokra az egyenletekre jutunk, mint *Gorkov és Dzjalosinszkij* (1974) a parketta-gráfok felösszegezésével. Itt ennél jobb közelítésben vizsgáljuk a csatolt láncok problémáját.

Ebben a formában ezek az egyenletek kezelhetetlenek. Amint említettem, nem korlátozódhatunk első szomszéd kölcsönhatásra, az átalakulási pont közelében a renormált csatolás távoli láncok között is erős lesz. Ezért további egyszerűsítéseket kell tennünk. Egyrészt, az egydimenziós problémánál láttuk, hogy a g_1 csatolás jelenléte okozza azt, hogy erős csatolású esethez renormálunk. Másrészt, a (9.13)–(9.14) egyenletek jobb oldalán a másodrendű tagokat nézve azt látjuk, hogy g_1 renormáló-

dása erősebb, mint g_2 -é. Ezért g_2 -t elhagyjuk az egyenletekből, s csak a g_1 -t tartalmazó tagokat tartjuk meg. Ugyanakkor azt is beláthatjuk, hogy abban az esetben, amikor a kritikus pont közelében a renormált csatolások a távolságtól függetlenné válnak, g_2 elhagyása szelf-konzisztens közelítés. A fejezet végén g_2 szerepére még visszatérünk.

A g'_1 -re fennálló egyenletet,

$$\frac{dg'_{1ij}(s)}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ \sum_k \frac{1}{\pi v_F} g'_{ik}(s) g'_{kj}(s) + \sum_k \frac{1}{2\pi^2 v_F^2} g'_{ij}(s) g'_{ik}(s) + \dots \right\}, \quad (9.15)$$

célszerű Fourier-tranzformált alakban felírni a

$$\gamma(q, s) = \frac{1}{2\pi v_F} \sum_i g'_{ij}(s) e^{-iq(R_i - R_j)} \quad (9.16)$$

segítségével, s akkor

$$\frac{d\gamma(q, s)}{ds} = \frac{1}{s} \left\{ 2\gamma^2(q, s) + 2\gamma(q, s) \frac{1}{N} \sum_{q'} \gamma^2(q', s) + \dots \right\}. \quad (9.17)$$

A renormálási egyenletek megoldásához $\gamma(q, s)$ -t célszerű szorzat formájában előállítani,

$$\gamma(q, s) = J(s) f(q, s), \quad (9.18)$$

és (9.17) helyett J -re és f -re egy-egy egyenletet felírni. Az általánosság korlátozása nélkül a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\frac{dJ(s)}{ds} = \frac{1}{s} 2J^3(s) \frac{1}{N} \sum_{q'} f^2(q', s), \quad (9.19)$$

$$\frac{df(q, s)}{ds} = \frac{1}{s} 2J(s) f^2(q, s). \quad (9.20)$$

Az s változó helyett egy $\alpha(s)$ függvényt vezetve be a

$$\frac{d\alpha(s)}{ds} = -\frac{1}{s} 2J(s) \quad (9.21)$$

definícióval, (9.19) és (9.20) átírható a

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = -J^2(\alpha) \frac{1}{N} \sum_{q'} f^2(q', \alpha), \quad (9.22)$$

$$\frac{df(q, \alpha)}{d\alpha} = -f^2(q, \alpha) \quad (9.23)$$

alakba. A megoldáshoz még a határfeltételt kell megadnunk. Az $s=1$ helyen a fizikai csatolásból kell kiindulnunk, melyet Fourier-transzformált alakban

$$\gamma(q, s=1) = \gamma^{(0)}(q) = \frac{J_0}{w(q)+1} \quad (9.24)$$

formában írunk fel. J_0 -t és $w(q)$ -t úgy választjuk meg, hogy $\gamma^{(0)}(q)$ abszolút minimuma helyén $w(q)$ legyen nulla. Q -val jelölve a megfelelő hullámszámot, $w(Q)=0$ és $w(q) \geq 0$. Ez a választás egyértelműen rögzíti J_0 értékét és $w(q)$ alakját. Ezzel a határfeltétellel megoldva a (9.23) egyenletet,

$$f(q, \alpha) = \frac{1}{w(q)+\alpha} \quad (9.25)$$

α s függvénye, és

$$\alpha(s=1) = 1, \quad (9.26)$$

és az is következik, hogy

$$J(\alpha(s=1)) = J_0. \quad (9.27)$$

Az eljárás tehát az, hogy (9.25) felhasználásával (9.22)-ből meghatározzuk J függését α -tól, majd (9.21)-ből α függését s -től. Ezek kombinálásával J és f s függése is közvetlenül adódik.

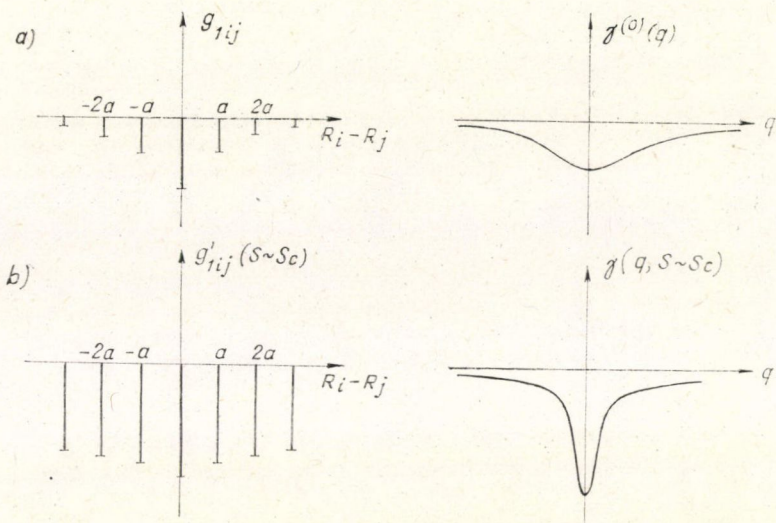
Három esetben vizsgáltuk ezeknek az egyenleteknek a megoldását. A renormálatlan csatolásról feltételeztük, hogy a távolsággal exponenciálisan csökken, illetve vonzó vagy taszító első szomszéd kölcsönhatást vettünk. Az első eset analitikusan végigszámolható, a másik két esetre az invariáns csatolás viselkedésének jellege és az átalakulás típusa az egyenletekből leolvasható. Általános megjegyzésként igaz, hogy az eljárás akkor konzisztens, azaz akkor teljesül, hogy a g_1 csatolás felerősödik és g_2 elhagyható, ha J_0 negatív. Mindhárom vizsgálandó eset ide tartozik. Pozitív J_0 esetén a harmadrendű tagok elhagyhatók, és a parketta közelítés jó eredményeket ad. Olyan esetet nézve, amikor $\gamma^{(0)}(q)$ minimuma negatív értékű, meg kell különböztetnünk azt a tartományt, ahol a minimum környékén $f(q, s)$ pozitív, attól a tartománytól, ahol $f(q, s)$ negatív. A minimum körül a renormálás során $f(q, s)$ növekszik, s egy idő után eldivergál, míg abban a tartományban, ahol $f(q, s)$ negatív, a függvény nullához renormálódik. $f(q, s)$ renormálódása a legerősebb a minimum helynél, $q=Q$ -nál, a divergencia is ott jelenik meg legelőször. A divergencia megjelenése $f(q, s)$ (9.25)-beli alakjából leolvashatóan azt jelenti, hogy α nullához renormálódik. Ugyanakkor (9.22)-ből leolvashatóan $J(s)$ a renormálás során csökken.

Az analitikus kifejezések elhagyásával, itt ábrákon mutatom be a csatolás távolságfüggésének alakulását a renormálás során. A láncokat a távolságban egy síkban helyezve el, az exponenciálisan lecsengő kölcsönhatás esetén a csupasz csatolás távolságfüggését és annak Fourier-transzformáltját a 13a ábra adja meg. A 13b ábrán a renormált csatolásokat ábrázolom a divergencia megjelenésének megfelelő s_c érték közelében.

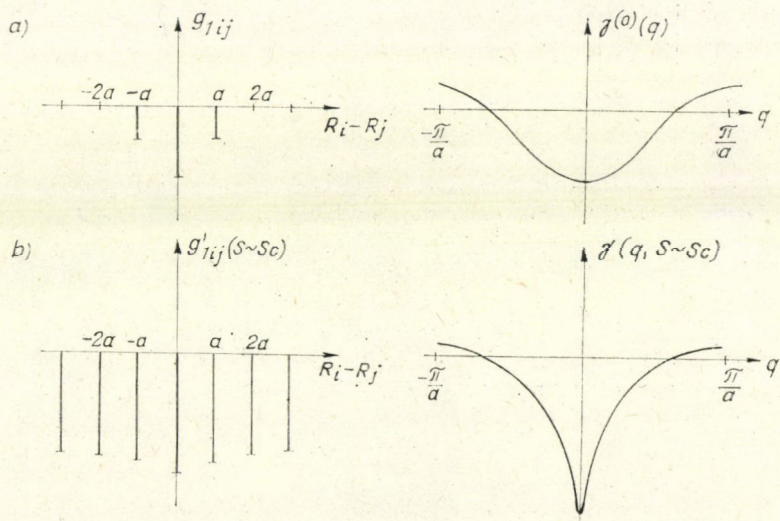
A 14. ábrán azt az esetet ábrázolom, amikor a láncon belüli erős vonzás mellett az első szomszéd láncokon levő elektronok is vonzó kölcsönhatást éreznek.

A 15. ábra pedig azt az esetet mutatja, amikor a láncon belüli erős vonzás mellett az első szomszéd láncok között taszító a kölcsönhatás.

Egy véges s_c értéknél jelenik meg a divergencia mind a három esetben. Az s változó a régi és új levágás hányadosa, viszont a Lie-egyenletekben a renormált csa-

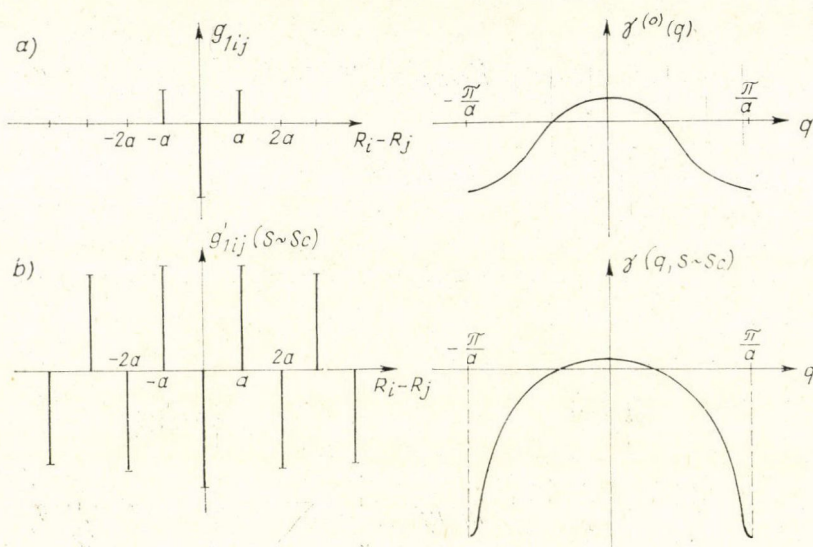


13. ábra. A renormálatlan (a) és renormált (b) csatolás távolságfüggése és Fourier-transzformáltjuk impulzusfüggése exponenciálisan lecsengő láncok közötti vonzó kölcsönhatás esetén



14. ábra. A renormálatlan (a) és renormált (b) csatolás távolságfüggése és Fourier-transzformáltjuk impulzusfüggése első szomszéd láncok közötti vonzó kölcsönhatás esetén

tolás mindig olyan argumentummal jelenik meg, mint ami a meghatározandó mennyiség argumentuma. Mi a hőmérsékletfüggő válaszfüggvényeket akarjuk meghatározni, ezért a válaszfüggvényekre vonatkozó Lie-egyenletekben az invariáns csatolás mindig T/ω_D argumentummal fog megjelenni. Ennek megfelelően beszélhetünk a hőmérsékletfüggő invariáns csatolásról és az $s_c = T_c/\omega_D$ definiálja azt a kritikus hőmérsékletet, ahol a szingularitások megjelennek. A hőmérsékletfüggő invariáns csatolásokról tehát azt mondhatjuk, hogy T_c -ben végtelen hatótávolságúvá válnak, s az első szomszéd kölcsönhatás előjelétől függően minden kölcsönhatás vonzó lesz, vagy váltakozva vonzó vagy taszító kölcsönhatás jelenik meg.



15. ábra. A renormálatlan (a) és renormált (b) csatolás távolságfüggése és Fourier-transzformáltjuk impulzusfüggése első szomszéd láncok közötti taszító kölcsönhatás esetén

A renormálási eljárással igen szemléletes képet kaptunk a fázisátalakulásról. A hőmérséklet csökkentésével a láncok közötti renormált, effektív csatolás erősödik, hatótávolsága is növekszik, míg végül a kritikus pontba végtelen hatótávolságúvá válik.

9.2. A lehetséges fázisátalakulások vizsgálata

A fázisátalakulások típusának meghatározására most is a válaszfüggvényeket vizsgáljuk, de most véges hőmérsékleten. Az impulzusváltozóban megkülönböztetve a láncok irányával párhuzamos és arra merőleges komponenseket, az előbbi k -val, az utóbbit q -val jelölve, a hőmérsékletfüggő válaszfüggvényt az ω síkon történő

analitikus folytatással kapjuk az alábbi korrelációs függvényekből:

$$N(k, q, \omega_\nu) = - \int_0^{1/T} d\tau e^{i\omega_\nu \tau} \sum_{ij} e^{iq(R_i - R_j)} \times \left\langle \hat{T}_\tau \left\{ \sum_{\alpha\beta} \int \frac{dp}{2\pi} c_{i p \alpha}^+(\tau) c_{i p + k \alpha}(\tau) \int \frac{dp'}{2\pi} c_{j p' \beta}^+(0) c_{j p' - k \beta}(0) \right\} \right\rangle, \quad (9.28)$$

$$\chi(k, q, \omega_\nu) = - \int_0^{1/T} d\tau e^{i\omega_\nu \tau} \sum_{ij} e^{iq(R_i - R_j)} \times \left\langle \hat{T}_\tau \left\{ \int \frac{dp}{2\pi} c_{i p \uparrow}^+(\tau) c_{i p + k \uparrow}(\tau) \int \frac{dp'}{2\pi} c_{j p' \uparrow}^+(0) c_{j p' - k \uparrow}(0) \right\} \right\rangle, \quad (9.29)$$

$$\Delta(\omega_\nu) = - \int_0^{1/T} d\tau e^{i\omega_\nu \tau} \sum_{ij} \left\langle \hat{T}_\tau \left\{ \int \frac{dp}{2\pi} c_{i p \uparrow}(\tau) c_{i - p \uparrow}(\tau) \int \frac{dp'}{2\pi} c_{j - p' \uparrow}^+(0) c_{j p' \uparrow}^+(0) \right\} \right\rangle, \quad (9.30)$$

ahol $\omega_\nu = 2\pi\nu T$ és ν egész szám. Az N és χ mennyiségekben az egydimenziós esethez hasonlóan a $k=2k_F$ -nél jelenik meg először a szingularitás, az ω változóban pedig $\omega=0$ -nál, ezért csak ezeket az értékeket vizsgáljuk és q -t tartjuk meg a hőmérséklet mellett változónak.

Most is, mint korábban láttuk, segédmennyiségeket kell bevezetnünk, mégpedig a $\xi = \ln(T/\omega_D)$ változóban felírva, a

$$\bar{N}(q, \xi) = \pi v_F \frac{\partial N(q, \xi)}{\partial \xi}, \quad (9.31)$$

$$\bar{\chi}(q, \xi) = 2\pi v_F \frac{\partial \chi(q, \xi)}{\partial \xi}, \quad (9.32)$$

$$\bar{\Delta}(\xi) = -\pi v_F \frac{\partial \Delta(\xi)}{\partial \xi} \quad (9.33)$$

mennyiségeket. Ezek már eleget tesznek a skálázási feltételeknek, s a rájuk vonatkozó Lie-egyenletek:

$$\frac{\partial \ln \bar{N}(q, \xi)}{\partial \xi} = 4\gamma(q, \xi) + 2 \frac{1}{N} \sum_{q'} \gamma^2(q', \xi) + \dots, \quad (9.34)$$

$$\frac{\partial \ln \bar{\chi}(q, \xi)}{\partial \xi} = 2 \frac{1}{N} \sum_{q'} \gamma^2(q', \xi) + \dots, \quad (9.35)$$

$$\frac{\partial \ln \bar{\Delta}(\xi)}{\partial \xi} = 2 \frac{1}{N} \sum_{q'} \gamma(q', \xi) + 2 \frac{1}{N} \sum_{q'} \gamma^2(q', \xi) + \dots \quad (9.36)$$

Az invariáns csatolás fent leírt viselkedéséből következik, hogy az $1/N \sum_q \gamma(q', \xi)$ tag elhagyható $1/N \sum_q \gamma^2(q', \xi)$ mellett, ha az átalakulási pont közelében vagyunk. Ezért χ és Δ hasonló viselkedést fog mutatni, N viselkedése viszont ettől eltérhet. A (9.19) egyenlettel való összehasonlításból következik, hogy

$$\frac{\partial \ln \bar{\chi}(q, \xi)}{\partial J(\xi)} = \frac{\partial \ln \bar{\Delta}(\xi)}{\partial J(\xi)} = \frac{1}{J(\xi)}, \quad (9.37)$$

amiből

$$\bar{\chi}(q, \xi) \sim \bar{\Delta}(\xi) \sim J(\xi). \quad (9.38)$$

$\alpha(s)$ (9.21)-beli és $\bar{\chi}$ és $\bar{\Delta}$ (9.32), (9.33)-beli definíciójából következően

$$\chi(q, \xi) \sim \Delta(\xi) \sim \alpha(\xi). \quad (9.39)$$

Az előző fejezetben láttuk, hogy a renormálás során $\alpha(\xi)$ csökken és $\xi_c = \ln s_c$ -ben nullához tart, tehát χ és Δ semmilyen szingularitással nem rendelkezik. Antiferromágneses vagy szupravezető állapot nem alakulhat ki.

Az $\bar{N}(q, \xi)$ -re vonatkozó egyenletet átírva,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \bar{N}(q, \xi)}{\partial \xi} &= 4J(\xi)f(q, \xi) + 2J^2(\xi) \frac{1}{N} \sum_q f^2(q', \xi) + \dots = \\ &= \frac{2}{f(q, \xi)} \frac{\partial f(q, \xi)}{\partial \xi} + \frac{1}{J(\xi)} \frac{\partial J(\xi)}{\partial \xi} + \dots = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln (J(\xi)f^2(q, \xi)) + \dots \end{aligned} \quad (9.40)$$

Ebből az egyenletből

$$\bar{N}(q, \xi) \sim J(\xi)f^2(q, \xi). \quad (9.41)$$

(9.20) figyelembevételével pedig

$$N(q, \xi) \sim f(q, \xi). \quad (9.42)$$

$f(q, \xi)$ -ről tudjuk, hogy eldivergál $q=Q$ -nál, annál a hullámszámnál, ahol a csupasz csatolás Fourier-transzformáltjának minimuma van. Az exponenciálisan lecsengő és a vonzó első szomszéd kölcsönhatás esetén $Q=0$, egy olyan töltéssűrűség alakul ki a láncokon, hogy minden láncon azonos a fázis. Taszító első szomszéd kölcsönhatás esetén $Q=\pi/a$, a sűrűség hullámok a szomszédos láncokon ellentétes fázisban vannak.

Ennél a számolásnál is igaz, hogy az invariáns csatolás erősödése miatt a további korrekciók nem hagyhatók el, de ez valószínűleg nem változtat az itt kapott fizikai képen, melynek lényege, hogy a kritikus pont közelében az invariáns csatolás végtelen hatótávolságúvá válik, és ez egy sűrűség hullám-állapotot stabilizál véges hőmérsékleten. A sűrűség hullámok fázisviszonyait a renormálatlan csatolás előjele szabja meg.

Az egydimenziós rendszer fázisdiagramjához képest a lényeges eltérés az, hogy negatív g_1 -ből indulva nem kapunk szupravezető állapotot, míg egy lánc esetén szupravezető instabilitás is megjelent. A láncok közötti Coulomb-kölcsönhatás nem tud szupravezető állapotot stabilizálni véges hőmérsékleten.

9.3. Kapcsolat másfajta közelítések eredményeivel

Említettük, hogy *Gorkov* és *Dzjalosinszkij* (1974) a parketta-közelítésben vizsgálta a kölcsönható láncok problémáját. Megmutatták, hogy már ebben a közelítésben is stabilis megoldásként csak olyan $\gamma(q, \xi)$ jöhet számításba, amely

$$\gamma(q, \xi) \sim \frac{1}{\xi_0(q) - \xi} \quad (9.43)$$

alakú, $\xi_0(q)$ -t, mely lényegesen függ az impulzustól, a kezdőfeltételek szabják meg. Leválasztva $\xi_0(q)$ -ből a minimum értékét, $\xi_0(Q) = \min \xi_0(q)$, (9.43) átírható,

$$\gamma(q, \xi) \sim \frac{1}{w(q) + \alpha(\xi)},$$

ahol $w(q) = \xi_0(q) - \xi_0(Q)$ és $\alpha(\xi) = \xi_0(Q) - \xi$. A kapott alak nagyon hasonlít arra, amit az előző fejezetben vizsgáltunk, azzal a különbséggel, hogy ott egy $J(\xi)$ amplitúdó is volt, mely szintén renormálódott, míg itt az amplitúdó változatlan marad. A válaszfüggvények szingularitásának problémáján ez nem változtat, ezért azt állíthatjuk, hogy a fázisátalakulás leírása az általunk vizsgált közelítésben kielégítő.

Egy másfajta közelítéssel próbálkozott *Klemm* és *Gutfreund* (1976). A láncon belüli csatolást a Luther—Emery eljárás segítségével egzaktul veszik figyelembe, a láncok közötti csatolásra viszont egy átlagtér-közelítést alkalmaznak. Ennek segítségével határozva meg a válaszfüggvényeket, itt is ugyanaz az eredmény adódik, mint a mi közelítésünkben, csak a töltéssűrűség fluktuációk erősödnek fel, sűrűség-hullám-állapot alakulhat ki.

Mind *Gorkov* és *Dzjalosinszkij*, mind *Klemm* és *Gutfreund* megvizsgálta a láncok közötti átugrás, a láncokra merőleges elektronterjedés hatását is. Kiderül, hogy ennek a folyamatnak a figyelembevételével már lehetséges szupravezető és antiferromágneses állapotba történő átmenetet is leírni.

Még egy kérdés maradt hátra, ez pedig a g_2 típusú csatolás elhagyásának jogosága. Erre vonatkozóan *Lee*, *Rice* és *Klemm* (1977) és *Rice*, *Lee* és *Klemm* (1976) végeztek numerikus vizsgálatokat. A renormálási csoporttal az invariáns csatolásokra kapott Lie-egyenleteket numerikusan oldották meg egy kétdimenziós rendszerre. Eredményként azt kapták, hogy g_2 megtartásával is ugyanazok a fix-pont értékek adódtak g_1 -re, mint a mi számolásunkban, s a válaszfüggvények viselkedését sem befolyásolja g_2 . A g_2 csatolás szerepe abban van, hogy a taszító g_1 csatolást vonzóvá teheti, g_1 előjelet válthat a renormálás során, s ezért taszító g_1 csatolás esetén is a vonzó g_1 csatolásnak megfelelő fix-pontba skálázhatunk. A lehetséges fázisátalakulások típusai azonban változatlanul maradnak.

10. Összefoglalás

Az értekezésben a renormálási csoport módszer szilárdtestfizikai alkalmazásait vizsgáltam. Mindazok a problémák, melyeket itt tárgyaltam, az úgynevezett logaritmusos problémák körébe tartoznak. Ez azt jelenti, hogy a perturbációs számítás tetszőleges rendjében mindig logaritmusos sajátenergia és vertexkorrekciók jelennek meg, s ezért végtelen rendig fel kell összegeznünk a járulékokat. A renormálási cso-

porttal egy igen jól kezelhető módon, konzekvensen tudjuk a vezető logaritmikus járulékokat, az eggyel alacsonyabb logaritmikus járulékokat, stb. felösszegezni.

Először a Kondo-problémát vizsgáltam (Sólyom és Zawadowski 1974). Megmutattam, hogy az Anderson által javasolt egyszerű skálázási eljárás általánosításával az Anderson által egzaktan gondolt skálaegyenletekhez korrekciók adódnak, s az így levezetett skálaegyenletek megegyeznek a térelméleti renormálás alkalmazásával kapott skálaegyenletekkel.

A szokásos, térelméleti és Wilson-féle renormálási eljárás bemutatása után egy új renormálási eljárást írtam le (Sólyom 1974). Ez egyesíti a Wilson-féle eljárás egyszerű fizikai képét, a levágás skálázását, a szabadsági fokok kitranszformálását a térelméletben szokásos multiplikatív renormálási csoport egyszerű matematikai formalizmusával. Az eljárás lényege az, hogy a fizikai probléma természetéből adódó levágási impulzus vagy levágási energia megváltoztatásával, a szabadsági fokok csökkentésével a rendszert egy olyan ekvivalens rendszerre képezhetjük le, melyben a csatolások renormálódnak, viszont az új rendszer Green-függvénye és vertexei csak egy, az energia- és impulzusváltozóktól független számszorzóban különböznek az eredeti mennyiségektől. Amennyiben ez a transzformáció lehetséges, — a szilárdtestfizikai logaritmikus problémák, amint az értekezésben megmutattam, ennek a skála-transzformációnak eleget tesznek — a skálázhatóság felhasználásával egyszerű differenciálegyenletek adódnak a Green-függvényekre, vertexekre, válaszfüggvényekre, s így azok meghatározhatók.

Első példaként a röntgenabszorpciós él problémáját vizsgáltam. Ez a példa igen jól mutatja az eljárás alkalmazásának lehetőségeit. A gyenge csatolású esetben a parkettagráfok felösszegezésével igen hosszadalmasan kapott eredményeket a renormálási csoporttal igen egyszerűen kapjuk meg.

Ezután a kritikus jelenségeket vizsgáltam négy dimenzió körül, ε -sorfejtésben (Forgács, Sólyom és Zawadowski 1976). A kritikus jelenségeket mind a szokásos térelméleti módszerrel, mind a Wilson-féle eljárással igen kiterjedten tanulmányozták. Így az új módszerrel történő vizsgálat elsőrendű célja nem új fizikai eredmények szerzése volt, hanem a új módszer és a többi eljárás kapcsolatának felderítése, s annak bemutatása, hogy az új eljárással mindazok az eredmények megkaphatók, melyek a többi eljárással is levezethetők. Megmutattam, hogy a szokásos térelméleti renormálásnál lehet olyan normálási feltételt választani, hogy formálisan az új eljárás egyenleteit kapjuk, s ezzel a két módszer között kapcsolat teremthető. Másrészt, az is következik, hogy a Wilson-féle eljárást meg lehet úgy fogalmazni, hogy a levágás skálázása multiplikatív renormálást generáljon, s így a Wilson-féle eljárással is kapcsolatot kapunk. Végül az új módszer a térelméleti és Wilson-féle renormálási eljárás kapcsolatát is megmutatja.

A kritikus jelenségeknél új eredményként említem, hogy megvizsgáltam (Löser és Sólyom 1978) lapcentrált köbös mágneses szerkezetek esetén a lehetséges fix-pontok stabilitását az ε -sorfejtésben az eddigi eredményeknél egy renddel lépve túl, s az adódott, hogy egyik fix-pont sem stabilis, vagyis az átalakulás nem lehet másodrendű, amint pl. UO_2 -n a kísérletek is erre utalnak. A renormálási csoport transzformáció segítségével értelmeztem (Sólyom és Grest 1977) és elvi leírást adtam arra a jelenségre, hogy a fent említett rendszerekben nyomás alatt hogyan válik az átalakulás mégis másodrendűvé.

Az új renormálási módszer bevezetésének módszertani kérdésein túl az értekezés fő tudományos eredményei az egyszimmetriós és közel egyszimmetriós kölcsönható

elektronrendszerek vizsgálatával kapcsolatosak. Az utóbbi években igen intenzíven vizsgált, láncszerűen elhelyezkedő szerves molekulákból felépülő rendszereket modellezünk egydimenziós, kölcsönható elektrongázzal (Menyhárd és Sólyom 1973), majd ennek általánosításaként gyengén csatolt láncok rendszerével (Mihály és Sólyom 1976). Megmutattuk, hogy a renormálási csoport itt javasolt változatával ez a rendszer jól tárgyalható, és a renormálási csoport egyenleteiben végzett közelítéseket a vezető, eggyel alacsonyabb rendű, stb. logaritmikus közelítéssel azonosíthatjuk, így azoknak egyszerű fizikai jelentés tulajdonítható (Menyhárd és Sólyom 1975). Az előre- és visszaszórásos tagokon kívül félig betöltött sávú rendszereknél az umklapp folyamatok hatását is tanulmányoztam (Sólyom 1975). Speciális problémaként vizsgáltuk meg az egydimenziós modell olyan általánosítását (Sólyom és Szabó 1976), melyben a rendszert két levágási energia jellemzi. Megmutattuk, hogy ez a rendszer is leképezhető a renormálási csoport transzformáció segítségével a szokásos egydimenziós modellre. Mindezekre a rendszerekre megvizsgáltam a rendszer fázisdiagramját a csatolások függvényében (Sólyom 1973), s meghatároztuk a rendszer ellenállásának viselkedését alacsony hőmérsékleten (Sólyom és Mihály 1975). A gyengén csatolt láncok vizsgálatában elsőként mutattuk meg, hogy a kritikus ponthoz közeledve az invariáns csatolás végtelen hatótávolságúvá válik, s a fázisátalakulásnak egy igen szemléletes képét adtuk. Mind az egydimenziós esetben, mind a csatolt láncok esetén a renormálási csoporttal kapott eredményeinket a későbbi, más közelítéseket alkalmazó eljárások megerősítették. Ezen kívül többen alkalmazták a javasolt eljárást az egydimenziós rendszerek egyéb tulajdonságainak vizsgálatára.

Az értekezésben tárgyalt szilárdtestfizikai problémák mindegyikében igen lényeges előrehaladást lehetett elérni a fizikai lényeg megértésében a renormálási csoport alkalmazásával. Ugyanakkor a röntgenabszorpciós él problémájának a kivételével egyik esetben sem állíthatjuk, hogy teljesen tisztán áll előttünk a feladat megoldása.

A Kondo-problémában az alacsony hőmérsékleti viselkedés jól leírható a végtelen csatolású fix-pont feltételezésével, de eddig nem sikerült a vezetőképességet, amelyben a Kondo-effektust először észlelték, jól meghatározni.

A kritikus jelenségeknél a négy dimenzióhoz közeli dimenziószám esetén tudunk jó leírást adni. A háromdimenziós rendszerekre történő általánosítás még nem tisztázott.

Az egydimenziós elektrongáz esetén a szoliton állapotok megjelenése, illetve a kötött szoliton állapotok létezése jelent új problémát. Az eddigi tárgyalásban ezek az állapotok nincsenek figyelembe véve. A csatolt láncok rendszerében kialakuló fázisok meghatározásánál egyéb, itt nem vizsgált kölcsönhatások is lényegesek lehetnek. Ezek szerepéről jelenleg elég keveset tudunk.

Mindezek a problémák a szilárdtestfizikában a kutatások központi kérdései közé tartoznak, és remélhetőleg hamarosan közelebb jutunk a megoldásukhoz.

Köszönetnyilvánítás

Hálámat fejezem ki Pál Lénárd akadémikusnak, a Központi Fizikai Kutató Intézet főigazgatójának, aki a Központi Fizikai Kutató Intézetbe való kerülésem óta érdeklődéssel követte munkámat, s tanácsaival segítségemre volt.

A Központi Fizikai Kutató Intézet Szilárdtestelméleti Osztálya minden munkatársának köszönettel tartozom azért az alkotó tudományos légkörért, amely nélkül

ez a munka így nem készülhetett volna el. Különösen azon munkatársaim együttműködését, a velük folytatott hasznos eszmecseréket köszönöm, akik az értekezés alapjául szolgáló cikkeimben társszerzőim voltak. Itt elsősorban *Zawadowski Alfréd-nak*, a fizikai tudományok doktorának fejezem ki köszönetemet. A vele folytatott eszmecserék, s a vele végzett közös munka alapvető volt az értekezésben szereplő sok gondolat kialakulásában. *Menyhárd Nórával*, a fizikai tudományok kandidátusával az egydimenziós rendszerek vizsgálatában dolgoztam együtt. Ez az együttműködés vezetett az értekezés sok, igen lényeges eredményére, s ezért igen hálás vagyok neki.

Köszönettel tartozom *Forgács Gábor* és *Mihály László* tudományos segédmunkatársaknak és *Szabó György* tanársegédnek a velük folytatott diszkusszióért, s a közös eredmények elérésében vállalt részükért.

Az értekezés alapjául szolgáló témákon együtt dolgoztam még *Wolfgang Löser* és *Gary S. Grest* kutatókkal. Nekik is köszönettel tartozom.

Az értekezés témájának kidolgozásában igen nagy segítséget jelentettek azok az eszmecserék, melyeket *Igor Dzsjalosinszkij* és *Philippe Nozières* professzorokkal folytattam. Mindkettőjüknek köszönetemet fejezem ki.

Végül megköszönöm *Benke Emiliának* és *Simándi Józsefnének* az értekezés gépelésében, és *Gombai Lászlónénak* az ábrák rajzolásában nyújtott segítségét.

Függelék

F.1. A koherenciahossz meghatározása

A kritikus jelenségeknél a koherenciahossz inverzét, κ -t úgy vezetjük be, hogy az eredeti, (4.1)-ben megadott Hamilton-operátoron először egy azonos átalakítást végeztünk, bevezetve egy még határozatlan κ -t,

$$H = \int d^d x \left\{ \frac{\kappa^2}{2} \varphi^2(x) + \frac{1}{2} [\nabla \varphi(x)]^2 + \frac{g_0}{4!} [\varphi^2(x)]^2 + \frac{1}{2} (r_0 - \kappa^2) \varphi^2(x) \right\}, \quad (\text{F.1.1})$$

majd κ^2 értékét a (6.1)-ben megadott feltétellel rögzítettük. Most ennek a κ^2 -nek a hőmérséklettel való kapcsolatát vizsgáljuk.

Az (F.1.1) Hamilton-operátorral perturbatív úton számolva, az első két tagot vesszük a perturbálatlan résznek, a második kettőt perturbációnak. A sajátenergiás járulékokat vizsgálva, a φ^4 -es elméletben szokásos sajátenergiás gráfok mellett megjelennek olyanok is, melyek az $(r_0 - \kappa^2) \varphi^2$ betétet tartalmazzák. $\Sigma'(p^2, \kappa^2)$ -tel jelölve a sajátenergiás járulékokat az $(r_0 - \kappa^2)$ járulék kivételével, a teljes Green-függvény

$$G(p^2, \kappa^2) = [p^2 + \kappa^2 + \Sigma'(p^2, \kappa^2) + r_0 - \kappa^2]^{-1}. \quad (\text{F.1.2})$$

A (6.1) feltételből következően

$$\Sigma'(-\kappa^2, \kappa^2) + r_0 - \kappa^2 = 0. \quad (\text{F.1.3})$$

Ebből az egyenletből — a perturbációs számításban lépésről lépésre haladva — κ^2 meghatározható. Tudjuk, hogy r_0 T -vel arányos, de minket a $(T - T_c)$ -től való függés érdekli, ezért az egyenletet tovább alakítjuk.

Legyen a kritikus pontban r_0 értéke r_{0c} . Ugyanakkor tudjuk, hogy T_c -ben $\kappa^2=0$ és a Green-függvény divergens $p=0$ -nál, vagyis (F.1.2)-ből következően

$$\Sigma'(0, 0) + r_{0c} = 0. \quad (\text{F.1.4})$$

Mármost $r_0 - r_{0c}$ arányos $(T - T_c)$ -vel, ugyanakkor

$$r_0 - r_{0c} = \kappa^2 - \Sigma'(-\kappa^2, \kappa^2) + \Sigma'(0, 0). \quad (\text{F.1.5})$$

Az Σ' sajátenergia perturbatív meghatározásával kaptuk végül a (6.33)-ban szereplő kifejezést.

F.2. A renormálhatóság vizsgálata II-típusú antiferromágneses szerkezetet leíró Hamilton-operátor esetén

A (6.122) egyenletben írtam fel egy II-típusú antiferromágneses szerkezetet leíró Hamilton-operátort, a skálázási feltételeket pedig (6.124)—(6.130) adja meg. A skálázhatóság vizsgálatához most megadom a Green-függvény és a vertexek analitikus alakját a p^2 és κ^2 függvényében.

Először a $\kappa^2=0$ esetet vizsgálva

$$d = 1 + \left(\frac{1}{3} u_0^2 + \frac{1}{3} u_0 v_0 + \frac{1}{6} v_0^2 + w_0^2 \right) K_d^2 \frac{1}{8} \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + \dots \quad (\text{F.2.1})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_u = & 1 + \left(2u_0 + v_0 + 6 \frac{w_0^2}{u_0} \right) \frac{1}{2} K_d \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{-\varepsilon/2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\} + \\ & + \left(\frac{5}{3} u_0^2 + 2u_0 v_0 + \frac{3}{4} v_0^2 + 6w_0^2 \right) \frac{1}{4} K_d^2 \left[\ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} - 2 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + 1 + \dots \right] + \end{aligned} \quad (\text{F.2.2})$$

$$+ \left(\frac{14}{3} u_0^2 + 4u_0 v_0 + v_0^2 + 30w_0^2 + 6 \frac{v_0 w_0^2}{u_0} \right) \frac{1}{4} K_d^2 \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} - 2 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + 2 + \dots \right] + \dots$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_v = & 1 + \left(2u_0 + \frac{3}{2} v_0 - 6 \frac{w_0^2}{v_0} \right) \frac{1}{2} K_d \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{-\varepsilon/2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\} + \\ & + \left(u_0^2 + \frac{3}{2} u_0 v_0 + \frac{3}{4} v_0^2 - 6 \frac{u_0 w_0^2}{v_0} \right) \frac{1}{4} K_d^2 \left[\ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} - 2 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + 1 + \dots \right] + \end{aligned} \quad (\text{F.2.3})$$

$$+ \left(6u_0^2 + 8u_0 v_0 + 3v_0^2 - 24 \frac{u_0 w_0^2}{v_0} - 6w_0^2 \right) \frac{1}{4} K_d^2 \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} - 2 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + 2 + \dots \right] + \dots$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_w = & 1 + 2u_0 \frac{1}{2} K_d \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{-\varepsilon/2} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \right\} + \\ & + (u_0^2 + 3w_0^2) \frac{1}{4} K_d^2 \left[\ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} - 2 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + 1 + \dots \right] + \end{aligned} \quad (\text{F.2.4})$$

$$+ (6u_0^2 + 2u_0 v_0 + 6w_0^2) \frac{1}{4} K_d^2 \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{p^2}{\Lambda^2} - 2 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + 2 + \dots \right] + \dots$$

A $p=0$ esetben κ -t tartva meg változónak, (F.2.1)-ben $\ln(p^2/A^2)$ helyett $\ln(\kappa^2/A^2)$ jelenik meg, az (F.2.2), (F.2.3) és (F.2.4) kifejezésekben pedig a második, harmadik és negyedik tagban rendre a következő helyettesítést kell végezni:

$$\frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{p^2}{A^2} \right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] - 1 + \dots \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\kappa^2}{A^2} \right)^{\varepsilon/2} - 1 \right] + 1 + \dots \quad (\text{F.2.5})$$

$$\ln^2 \frac{p^2}{A^2} - 2 \ln \frac{p^2}{A^2} + 1 + \dots \Rightarrow \ln^2 \frac{\kappa^2}{A^2} + 2 \ln \frac{\kappa^2}{A^2} + 1 + \dots \quad (\text{F.2.6})$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 \frac{p^2}{A^2} - 2 \ln \frac{p^2}{A^2} + 2 + \dots \Rightarrow \frac{1}{2} \ln^2 \frac{\kappa^2}{A^2} + \dots \quad (\text{F.2.7})$$

Akármelyik választással élünk is, a (6.124)—(6.130) egyenletekből ugyanazokat a kifejezéseket kapjuk a multiplikatív szorzófaktorokra és az invariáns csatolásokra. Az ily módon az invariáns csatolásokra kapott perturbációs kifejezéseket adtam meg a (6.131)—(6.133) egyenletekben.

F.3. Az I-típusú, hatkomponensű antiferromágneses szerkezet fix-pontjai stabilitásának vizsgálata

Egy hatkomponensű, I-típusú antiferromágneses szerkezetet ír le a (6.146) Hamilton-operátor. Az öt csatolásnak megfelelően ötféle vertexet kell definiálnunk, s ennek megfelelően kell a skálaegyenleteket is felírni. A szokásos eljárással meghatározva az invariáns csatolások perturbációs alakját, a Lie-egyenletekre a következő adódik:

$$\begin{aligned} \frac{du'_0(s)}{ds} = & \frac{u'_0(s)}{s} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{K_d}{2} \left[\frac{14}{6} u'_0 + v'_0 + \frac{1}{3} (w'_1 + w'_2 + w'_3) + \frac{1}{6u'_0} (w'_1 w'_2 + w'_1 w'_3 + w'_2 w'_3) \right] - \right. \\ & - \frac{K_d^2}{4} \left[\frac{48}{9} u'^2_0 + \frac{11}{3} u'_0 v'_0 + \frac{5}{6} v'^2_0 + \frac{11}{9} u'_0 (w'_1 + w'_2 + w'_3) + \right. \\ & + \frac{5}{18} (w'^2_1 + w'^2_2 + w'^2_3) + \frac{2}{3} (w'_1 w'_2 + w'_1 w'_3 + w'_2 w'_3) + \\ & \left. \left. + \frac{1}{9u'_0} (w'^2_1 (w'_2 + w'_3) + w'^2_2 (w'_1 + w'_3) + w'^2_3 (w'_1 + w'_2)) \right] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.3.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{dv'_0(s)}{ds} = & \frac{v'_0(s)}{s} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{K_d}{2} \left[2u'_0 + \frac{3}{2} v'_0 + \frac{1}{6v'_0} (w'^2_1 + w'^2_2 + w'^2_3 - w'_1 w'_2 - w'_1 w'_3 - w'_2 w'_3) \right] - \right. \\ & - \frac{K_d^2}{4} \left[\frac{56}{9} u'^2_0 + \frac{23}{3} u'_0 v'_0 + \frac{17}{6} v'^2_0 + \frac{5}{9} u'_0 (w'_1 + w'_2 + w'_3) + \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{2}{3} \frac{u'_0}{v'_0} + \frac{5}{18} \right) (w'^2_1 + w'^2_2 + w'^2_3) + \frac{2}{9v'_0} (w'^3_1 + w'^3_2 + w'^3_3) - \right. \right. \\ & \left. \left. \dots \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.3.2})$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{3} \frac{u'_0}{v'_0} (w'_1 w'_2 + w'_1 w'_3 + w'_2 w'_3) - \\
 & -\frac{1}{9v'_0} (w_1'^2 (w'_2 + w'_3) + w_2'^2 (w'_1 + w'_3) + w_3'^2 (w'_1 + w'_2)) + \dots \Big\} \\
 \frac{dw'_i(s)}{ds} = & \frac{w'_i(s)}{s} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{K_d}{2} \left[2u'_0 + v'_0 + \frac{2}{3} w'_1 - \frac{1}{6w'_1} (w'_1 w'_2 + w'_1 w'_3 + w'_2 w'_3) \right] - \right. \\
 & -\frac{K_d^2}{4} \left[\frac{56}{9} u_0'^2 + \frac{17}{3} u_0' v_0' + \frac{5}{6} v_0'^2 + \left(\frac{29}{9} u_0' + 2v_0' \right) w_1' - \right. \\
 & \left. \left. -\frac{1}{9} u_0' (w_2' + w_3') + \frac{5}{9} w_1'^2 - \frac{1}{18} (w_1'^2 + w_2'^2 + w_3'^2) - \right. \right. \\
 & \left. \left. -\frac{2}{3w_1'} u_0' w_2' w_3' - \frac{1}{9} w_1' (w_2' + w_3') - \frac{1}{9w_1'} w_2' w_3' (w_2' + w_3') \right] + \dots \right\}, \tag{F.3.3}
 \end{aligned}$$

A w'_2 -re és w'_3 -re vonatkozó Lie-egyenlet (F.3.3)-ból a $w'_1 \rightarrow w'_2 \rightarrow w'_3 \rightarrow w'_1$ ciklikus cserével kapható.

Az egyenletek megoldását kis s értékekre

$$u'_0(s) = u_0^* + A_u s^{\omega_1/2} + B_u s^{\omega_2/2} + C_u s^{\omega_3/2} + D_u s^{\omega_4/2} + E_u s^{\omega_5/2} + \dots \tag{F.3.4}$$

$$v'_0(s) = v_0^* + A_v s^{\omega_1/2} + B_v s^{\omega_2/2} + C_v s^{\omega_3/2} + D_v s^{\omega_4/2} + E_v s^{\omega_5/2} + \dots \tag{F.3.5}$$

$$w'_i(s) = w_i^* + A_i s^{\omega_1/2} + B_i s^{\omega_2/2} + C_i s^{\omega_3/2} + D_i s^{\omega_4/2} + E_i s^{\omega_5/2} + \dots \tag{F.3.6}$$

alakban keresve, a következő megoldások adódnak a fix-pont értékekre és az ω_i exponensekre:

$$1.) u_0^* = v_0^* = w_1^* = w_2^* = w_3^* = 0,$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = -\varepsilon,$$

$$2.) K_d u_0^* = \frac{3}{7} \varepsilon + \frac{72}{7^3} \varepsilon^2, \quad v_0^* = w_1^* = w_2^* = w_3^* = 0,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{24}{49} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = -\frac{1}{7} \varepsilon - \frac{52}{7^3} \varepsilon^2,$$

$$3.) K_d v_0^* = \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{34}{81} \varepsilon^2, \quad u_0^* = w_1^* = w_2^* = w_3^* = 0,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{17}{27} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = -\frac{1}{3} \varepsilon + \frac{19}{81} \varepsilon^2,$$

$$4.) K_d u_0^* = \frac{1}{3} \varepsilon - \frac{10}{9^3} \varepsilon^2, \quad K_d v_0^* = \frac{2}{9} \varepsilon + \frac{1060}{3^7} \varepsilon^2, \quad w_1^* = w_2^* = w_3^* = 0,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{125}{3^5} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = \frac{1}{9} \varepsilon + \frac{125}{3^7} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = -\frac{1}{9} \varepsilon - \frac{260}{3^7} \varepsilon^2,$$

$$5-7.) K_d v_0^* = \frac{1}{3} \varepsilon + \frac{17}{81} \varepsilon^2, \quad K_d w_1^* = \varepsilon + \frac{17}{27} \varepsilon^2, \quad u_0^* = w_2^* = w_3^* = 0,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{17}{27} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = -\varepsilon + \frac{1}{27} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = -\frac{2}{3} \varepsilon + \frac{11}{81} \varepsilon^2,$$

$$\omega_4 = \omega_5 = -\frac{1}{3} \varepsilon + \frac{19}{81} \varepsilon^2,$$

és két hasonló megoldás a $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3 \rightarrow w_1$ cserével,

$$8-10.) K_d v_0^* = \frac{3}{5} \varepsilon + \frac{9}{25} \varepsilon^2, \quad K_d w_1^* = \frac{3}{5} \varepsilon + \frac{9}{25} \varepsilon^2, \quad u_0^* = w_2^* = w_3^* = 0,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{3}{5} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = -\frac{1}{5} \varepsilon + \frac{7}{25} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = \frac{1}{5} \varepsilon - \frac{1}{5} \varepsilon^2,$$

$$\omega_4 = -\frac{3}{5} \varepsilon + \frac{3}{25} \varepsilon^2, \quad \omega_5 = -\frac{2}{5} \varepsilon + \frac{1}{5} \varepsilon^2,$$

és két hasonló megoldás a $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3 \rightarrow w_1$ cserével,

$$11-13.) K_d u_0^* = \frac{1}{3} \varepsilon - \frac{10}{3^6} \varepsilon^2, \quad K_d v_0^* = \frac{1}{9} \varepsilon + \frac{530}{3^7} \varepsilon^2,$$

$$K_d w_1^* = \frac{1}{3} \varepsilon + \frac{530}{3^6} \varepsilon^2, \quad w_2^* = w_3^* = 0,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{375}{3^6} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = \frac{1}{9} \varepsilon + \frac{125}{3^7} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = -\frac{1}{9} \varepsilon - \frac{260}{3^7} \varepsilon^2,$$

$$\omega_4 = -\frac{1}{3} \varepsilon - \frac{314}{3^6} \varepsilon^2, \quad \omega_5 = -\frac{2}{9} \varepsilon - \frac{601}{3^7} \varepsilon^2,$$

és két hasonló megoldás a $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3 \rightarrow w_1$ cserével,

$$14-16.) K_d u_0^* = \frac{3}{11} \varepsilon - \frac{21}{11^2} \varepsilon^2, \quad K_d v_0^* = K_d w_1^* = \frac{3}{11} \varepsilon + \frac{75}{11^2} \varepsilon^2, \quad w_2^* = w_3^* = 0,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{29}{55} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = \frac{1}{11} \varepsilon + \frac{1}{11} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = \frac{1}{11} \varepsilon - \frac{1}{5 \cdot 11^2} \varepsilon^2,$$

$$\omega_4 = -\frac{3}{11} \varepsilon - \frac{45}{11^2} \varepsilon^2, \quad \omega_5 = -\frac{2}{11} \varepsilon - \frac{27}{11^2} \varepsilon^2,$$

és két hasonló megoldás a $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3 \rightarrow w_1$ cserével,

$$17.) K_d u_0^* = \frac{6}{11} \varepsilon + \frac{414}{11^3} \varepsilon^2, \quad v_0^* = 0,$$

$$K_d w_1^* = K_d w_2^* = K_d w_3^* = -\frac{6}{11} \varepsilon - \frac{414}{11^3} \varepsilon^2,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{69}{11^2} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = \frac{1}{11} \varepsilon - \frac{239}{11^3} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = -\frac{1}{11} \varepsilon + \frac{415}{11^3} \varepsilon^2,$$

$$\omega_4 = \omega_5 = -\frac{7}{11} \varepsilon + \frac{133}{11^3} \varepsilon^2,$$

$$18.) K_d u_0^* = \frac{9}{17} \varepsilon + \frac{1944}{17^3} \varepsilon^2, \quad v_0^* = 0,$$

$$K_d w_1^* = K_d w_2^* = K_d w_3^* = -\frac{6}{17} \varepsilon - \frac{4152}{17^3} \varepsilon^2,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{313}{2 \cdot 17^2} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = \frac{1}{17} \varepsilon + \frac{114}{17^3} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = \frac{1}{17} \varepsilon - \frac{1047}{2 \cdot 17^3} \varepsilon^2,$$

$$\omega_4 = \omega_5 = -\frac{7}{17} \varepsilon - \frac{3178}{17^3} \varepsilon^2,$$

$$19.) K_d u_0^* = \frac{3}{5} \varepsilon + \frac{602}{9 \cdot 5^3} \varepsilon^2, \quad K_d v_0^* = -\frac{2}{15} \varepsilon - \frac{2464}{3 \cdot 15^3} \varepsilon^2,$$

$$K_d w_1^* = K_d w_2^* = K_d w_3^* = -\frac{2}{5} \varepsilon - \frac{3184}{15^3} \varepsilon^2,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{2549}{21 \cdot 15^2} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = \frac{1}{15} \varepsilon - \frac{6586}{21 \cdot 15^3} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = -\frac{1}{15} \varepsilon - \frac{287}{3 \cdot 15^3} \varepsilon^2,$$

$$\omega_4 = \omega_5 = -\frac{7}{15} \varepsilon - \frac{7274}{3 \cdot 15^3} \varepsilon^2,$$

$$20.) K_d u_0^* = \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{196}{9^3} \varepsilon^2, \quad K_d v_0^* = -\frac{2}{9} \varepsilon + \frac{236}{3 \cdot 9^3} \varepsilon^2,$$

$$K_d w_1^* = K_d w_2^* = K_d w_3^* = -\frac{2}{3} \varepsilon - \frac{196}{9^3} \varepsilon^2,$$

$$\omega_1 = \varepsilon - \frac{2118}{5 \cdot 3^6} \varepsilon^2, \quad \omega_2 = -\frac{1}{9} \varepsilon + \frac{2534}{5 \cdot 3^7} \varepsilon^2, \quad \omega_3 = -\frac{1}{9} \varepsilon + \frac{766}{3^7} \varepsilon^2,$$

$$\omega_4 = \omega_5 = -\frac{7}{9} \varepsilon + \frac{502}{3^7} \varepsilon^2.$$

Egyik fix-pont sem stabilis, mindig van legalább egy negatív ω_i exponens.

IRODALOM

- Abrikosov, A. A., 1965, *Physics* 2, 5.
- Abrikosov, A. A., Gorkov, L. P., Dzjalosinszkij, I. E., 1962, „Metodü kvantovoj teorii polja v sztatisticeszkij fizike”, Fizmatgiz, Moszkva.
- Abrikosov, A. A. and Migdal, A. A., 1970, *J. Low Temp. Phys.* 3, 519.
- Aharony, A., 1973, *Phys. Rev.* B8, 4270.
- Ahlers, G., Kornblit, A. and Guggenheim, K. J., 1975, *Phys. Rev. Letters* 34, 1227.
- Anderson, P. W., 1970, *J. Phys. C: Solid State Phys.* 3, 2346.
- Anderson, P. W. and Yuval, G., 1969, *Phys. Rev. Letters* 23, 89.
- Anderson, P. W., Yuval, G. and Hammann, D. R., 1970, *Phys. Rev.* B1, 4464.
- Bak, P., Krinsky, S. and Mukamel, D., 1976a, *Phys. Rev. Letters* 36, 52.
- Bak, P., Krinsky, S. and Mukamel, D., 1976b, *Phys. Rev. Letters* 36, 829.
- Bak, P. and Mukamel, D., 1976, *Phys. Rev.* B13, 5086.
- Bardeen, J., Cooper, L. and Schrieffer, J. R., 1958, *Phys. Rev.* 108, 1175.
- Barišić, S., 1976, *Fizika* 8, 181.
- Bicskov, Ju. A., Gorkov, L. P., Dzjalosinszkij, I. E., 1966, *ZsETF* 50, 738.
- Bjorken, J. D. and Drell, S. D., 1965, „Relativistic Quantum Fields”, McGraw—Hill, New York.
- Blank, B. Z., Boncs-Brujevićs, V. L., Sirkov, D. V., 1957, *ZsETF* 33, 265.
- Bloch, D., Hermann-Ranzaud, D., Vettier, C., Yelon, W. B. and Alben, R., 1975, *Phys. Rev. Letters* 35, 963.
- Bogoliubov, N. N. and Shirkov, D. V., 1959, „Introduction to the Theory of Quantized Fields”, Interscience Publishers, Inc., New York.
- Boncs-Brujevićs, V. L., Tyablikov, S. V., 1961, „Metod funkcii Grina v sztatisticeszkij mehanike”, Fizmatgiz, Moszkva.
- Brazovszkij, Sz. A., Dzjalosinszkij, I. E., 1975, *Piszma v ZsETF* 21, 360.
- Brazovszkij, Sz. A., Dzjalosinszkij, I. E., Kuharenko, B. G., 1976, *ZsETF* 70, 2257.
- Brézin, E., Le Guillou, J.-C. and Zinn-Justin, J., 1973a, *Phys. Rev.* D8, 434.
- Brézin, E., Le Guillou, J.-C. and Zinn-Justin, J., 1973b, *Phys. Rev.* B8, 5330.
- Brézin, E., Le Guillou, J.-C. and Zinn-Justin, J., 1974a, *Phys. Rev.* D9, 1121.
- Brézin, E., Le Guillou, J.-C. and Zinn-Justin, J., 1974b, *Phys. Rev.* B10, 892.
- Brézin, E., Le Guillou, J.-C. and Zinn-Justin, J., 1976, „Phase Transitions and Critical Phenomena”, Vol. VI. C. Domb and M. S. Green editors, Academic Press, megjelenés alatt.
- Brézin, E. and Zinn-Justin, J., 1976, *Phys. Rev.* B13, 251.
- Callan, C. G., 1970, *Phys. Rev.* D2, 1541.
- Chui, S.-T., Rice, T. M. and Varma, C. M., 1974, *Solid State Commun.* 15, 155.
- Di Castro, C., 1972, *Lett Nuovo Cimento* 5, 69.
- Di Castro, C. and Jona-Lasinio, G., 1969, *Phys. Lett.* 29A, 322.
- Dyson, F. J., 1949, *Phys. Rev.* 75, 486, 1736.
- Dzjalosinszkij, I. E., Larkin, A. I., 1971, *ZsETF* 61, 791.
- Dzjalosinszkij, I. E., Larkin, A. I., 1973, *ZsETF* 65, 411.
- Emery, V. J., Luther, A. and Peschel, I., 1976, *Phys. Rev.* B13, 1272.
- Everts, H. U. and Schulz, H., 1974, *Solid State Commun.* 15, 1413.
- Fischer, K., 1970, *Springer Tracts in Modern Physics*, Vol. 54.
- Fisher, M. E., 1974, *Rev. Mod. Phys.* 46, 597.
- Fisher, M. E. and Pfeuty, P., 1972, *Phys. Rev.* B6, 1889.
- Fogedby, H. C., 1976, *J. Phys. C: Solid State Phys.* 9, 3757.
- Forgács, G., 1977, *Acta Phys. Hung.* 42, 261.
- Forgács, G., Sólyom, J. and Zawadowski, A., 1976, Report, KFKI—76—20 és megjelenés alatt.
- Forgács, G. and Zawadowski, A., 1977, *Acta Phys. Hung.* 42, 353.
- Fowler, M., 1976, *Solid State Commun.* 18, 241.
- Fowler, M. and Zawadowski, A., 1971, *Solid State Commun.* 9, 471.
- Fukuyama, H., Rice, T. M. and Varma, C. M., 1974, *Phys. Rev. Letters* 33, 305.
- Fukuyama, H., Rice, T. M., Varma, C. M. and Halperin, B. I., 1974, *Phys. Rev.* B10, 3775.
- Gell-Mann, M. and Low, F. E., 1954, *Phys. Rev.* 95, 1300.
- Ginzburg, S. L., 1974, *ZsETF* 66, 647.
- Ginzburg, V. L., Landau, L. D., 1950, *ZsETF* 20, 1064.
- Gorkov, L. P., Dzjalosinszkij, I. E., 1974, *ZsETF* 67, 397.
- Grest, G. S., 1976, *Phys. Rev.* B14, 5114.
- Grest, G. S., Abrahams, E., Chui, S.-T., Lee, P. A. and Zawadowski, A., 1976, *Phys. Rev.* B14, 1225.

- Grüner, G. and Zawadowski, A., 1974, Repts, Prog. Phys. 37, 1497.
 Halperin, B. I. and Hohenberg, P. C., 1967, Phys. Rev. Letters 19, 700.
 Heeger, A. J. and Garito, A. F., 1975, „Low-Dimensional Cooperative Phenomena”, Edited by H. J. Keller, Plenum Press, New York, p. 89.
 Horowitz, B., 1976, Solid State Commun. 19, 1001.
 Kadanoff, L. P., 1966, Physics 2, 263.
 Ketley, I. M. and Wallace, D. J., 1973, J. Phys. A.: Math. Nucl. Gen. 6, 1667.
 Kimura, M., 1975, Progr. Theoret. Phys. 53, 955.
 Kimura, M. and Fukuyama, H., 1975, Solid State Commun. 17, 381.
 Klemm, R. A. and Gutfreund, H., 1976, Phys. Rev. B14, 1086.
 Kondo, J., 1969, Solid State Physics, Edited by Seitz, Vol. 23.
 Krishna-murthy, H. R., Wilson, K. G. and Wilkins, J. W., 1975, Phys. Rev. Letters 35, 1101.
 Landau, L. D., 1937, ZsETF 7, 19.
 Landau, L. D., Abrikosov, A. A. and Khalatnikov, I. M., 1956, Nuovo Cimento Suppl. 3, 80.
 Landau, L. D., Lifsic, E. M., 1964, „Sztatisticeszkaja Fizika”, Nauka, Moszkva.
 Larkin, A. I., Hmelnyickij, D. E., 1969, ZsETF 56, 2087.
 Lee, P. A., 1975, Phys. Rev. Letters, 34, 1247.
 Lee, P. A. Rice, T. M. and Klemm, R. A., 1977, Phys. Rev. B 15 2984.
 Little, W. A., 1964, Phys. Rev. 134, 1416.
 Löser, W. and Sólyom, J., 1978, J. Phys. C: Solid State Phys. 11, 761.
 Luther, A., 1976, Phys. Rev. B14, 2153.
 Luther, A. and Emery, V. J., 1974, Phys. Rev. Letters 33, 589.
 Luther, A. and Peschel, I., 1974, Phys. Rev. B9, 2911.
 Mahan, G. D., 1967, Phys. Rev. 163, 612.
 Menyhárd, N. and Sólyom, J., 1973, J. Low Temp. Phys. 12, 529.
 Menyhárd, N. and Sólyom, J., 1975, J. Low Temp. Phys. 21, 431.
 Mihály, L. and Sólyom, J., 1976, J. Low Temp. Phys. 24, 579.
 Morel, P. and Anderson, P. W., 1962, Phys. Rev. 125, 1263.
 Mukamel, D. and Krinsky, S., 1976a, Phys. Rev. B13, 5065.
 Mukamel, D. and Krinsky, S., 1976b, Phys. Rev. B13, 5078.
 Nozières, P., 1976, Journal de Physique, Colloque C1, 37, C1—271.
 Nozières, P. and De Dominicis, C. T., 1969, Phys. Rev. 178, 1097.
 Nozières, P., Gavoret, J. and Roulet, B., 1969, Phys. Rev. 178, 1084.
 Ohmi, T., Nakajima, K. and Tsuneto, T., 1976, Progr. Theoret. Phys. 55, 1396.
 Peierls, R., 1955, „Quantum Theory of Solids”, Oxford University Press, Oxford.
 Rice, T. M., Lee, P. A. and Klemm, R. A., 1976, „Organic Conductors and Semiconductors” kötetben, 125. lap. Akadémiai Kiadó, Edited by L. Pál, G. Grüner, A. Jánossy and J. Sólyom.
 Roulet, B., Gavoret, J. and Nozières, P., 1969, Phys. Rev. 178, 1072.
 Shchegolev, I. F., 1972, phys. stat. solidi (a), 12, 9.
 Sólyom, J., 1973, J. Low Temp. Phys. 12, 547.
 Sólyom, J., 1974, J. Phys. F.: Metal Physics, 4, 2269.
 Sólyom, J., 1975, Solid State Commun. 17, 63.
 Sólyom, J. and Grest, G. S., 1977, Phys. Rev. B 16, 2235,
 Sólyom, J. and Mihály, L., 1975, Proceedings of the 14th International Conference on Low Temperature Physics, Otaniemi, Vol. 4, p. 340.
 Sólyom, J. and Szabó, G., 1976, Report KFKI—76—77, és az „Organic Conductors and Semiconductors” kötetben, 41. lap, Akadémiai Kiadó, Edited by L. Pál, G. Grüner, A. Jánossy and J. Sólyom.
 Sólyom, J. and Zawadowski, A., 1974, J. Phys. F.: Metal Physics 4, 80.
 Stanley, H. E., 1971, „Phase Transitions and Critical Phenomena”, Oxford University Press, New York.
 Stueckelberg, E. C. G. and Petermann, A., 1953, Helv. Phys. Acta 24, 153.
 Symanzik, K., 1970, Commun. Math. Phys. 18, 227.
 Theumann, A., 1967, J. Math. Phys. 8, 2460.
 Ting, C. S., 1976, Phys. Rev. B13, 4029.
 Tomonaga, S., 1950, Progr. Theoret. Phys. 5, 349.
 Toulouse, G., Pfeuty, P., 1975, „Introduction au groupe de renormalisation et à ses applications”, Presses Universitaires de Grenoble.
 Wallace, D. J., 1973, J. Phys. C.: Solid State Phys. 6, 1390.
 Wegner, F. J., 1972a, Phys. Rev. B5, 4529.

- Wegner, F. J.*, 1972b, *Phys. Rev. B6*, 1891.
Wegner, F. J. and Riedel, E. K., 1973, *Phys. Rev. B7*, 248.
Wilson, K. G., 1969, *Phys. Rev. 179*, 1499.
Wilson, K. G., 1971, *Phys. Rev. B4*, 3174, 3184.
Wilson, K. G., 1972, *Phys. Rev. Letters*, 28, 548.
Wilson, K. G., 1973, „Collective Properties of Physical Systems”, Proceedings of the 24th Nobel Symposium, Editors B. Lundqvist and S. Lundqvist, Academic Press.
Wilson, K. G., 1975, *Rev. Mod. Phys.* 47, 773.
Wilson, K. G. and Fisher, M. E., 1972, *Phys. Rev. Letters*, 28, 240.
Wilson, K. G. and Kogut, J., 1974, *Phys. Reports 12C*, 75.
Yamazaki, Y. and Suzuki, M., 1973, *Progr. Theoret. Phys.* 50, 1097.
Yuval, G. and Anderson, P. W., 1970, *Phys. Rev. B1*, 1522.
Zawadowski, A., and *Grest, G. S.*, 1977, megjelenés alatt.
Zeller, H. R., 1975, „Low-Dimensional Cooperative Phenomena”, Edited by H. J. Keller, Plenum Press New York, p. 215.

Technikai szerkesztő: Turchányi György

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat beérkezett: 1977. XI. 23. — Terjedelem: 10,85 (A/5) ív

78-5511 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József