

## A MATRIX-ELMÉLET ALKALMAZÁSA LÁNCHIDAK SZÁMÍTÁSÁRA

EGERVÁRY JENŐ

### *Bevezetés*

A függőhidak *Melan* és *Timoshenko* által megalapozott és mások által továbbfejlesztett eddigi elmélete<sup>1)</sup> a következő idealizált szerkezeten, »model-len« alapul: Egy hajlékony kötéll és egy rugalmas gerenda végtelen sok vertikális függesztő rúd által vannak összekötve egymással, és meghatározandók valamely tetszőleges vertikális terhelés hatása folytán a szerkezetben létrejövő alakváltozások és feszültségek. Ezen modell matematikai tárgyalása egy lineáris, állandó együtthatós, negyedrendű inhomogén differenciálegyenletre vezet, mely megoldható a Green-függvény alkalmazásával vagy Fourier-kifejtéssel.

Ez a módszer, noha nyilván nem adhatja meg a függesztő rudak feszültségét, mégis a legalkalmasabbnak látszik az olyan hidak matematikai vizsgálatára, melyek *hajlékony kötéltre* vannak felfüggesztve. Ha azonban a híd *láncre* van felfüggesztve, akkor a hajlékony kötélnak és végtelen sok függesztő rúdnak a fölvétele egyáltalán nem kielégítő megközelítése a valóságnak, és így természetszerűen felvetődik a kérdés, vajon lehet-e az egész módszert oly módon finitizálni (végszerűsíteni), hogy differenciálegyenlet helyett csupán egy lineáris algebrai egyenletrendszer megoldása legyen szükséges.

Nyilvánvalóan az elméletnek ilyen egyszerűsítése csak akkor lesz lehetséges, ha az élő tehernek egy folytonos eloszlásfüggvénnyel való megadását mellőzzük és a függesztő rudak alsó végpontjaiban támadó koncentrált terhelő erők alkalmazására szorítkozunk. Gyakorlatilag ez a közelítés annál inkább megengedhető, mert tudvalevőleg az élő teher pontos eloszlása sohasem ismeretes, elméletileg pedig a »*de Saint Venant-féle elv*« garantálja, hogy a folytonos tehereloszlásnak a statikailag ekvivalens koncentrált terhekkel való helyettesítése a szerkezet alakváltozását kevésbé befolyásolja.

Amennyiben a folytonosan megoszló élő terhet ily módon sztatikailag ekvivalens koncentrált erőkkel helyettesítjük, és a *Clapeyron-féle* egyenleteket általánosított formájukban alkalmazzuk, valóban lehetővé fog válni láncre függesztett hidak számára egy finitizált módszert megalkotni.

Ez a finitizált módszer az egész problémát egy inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldására redukálja, vagy ami ugyanazt jelenti, egy matrix invertálására, reciprokanak a meghatározására. Ennek a matrixnak a rendszáma azonban egyenlő a függesztő rudak számával és innen

<sup>1)</sup> Lásd: [1]—[5]

következtethető, hogy pld. egy 50 függesztő rudat tartalmazó híd esetében a megoldás az inverz matrix közvetlen kiszámításával rendkívül fáradságos és hosszadalmas lenne. Szerencsére az invertálandó matrixról ki fog derülni, hogy az racionális függvénye a

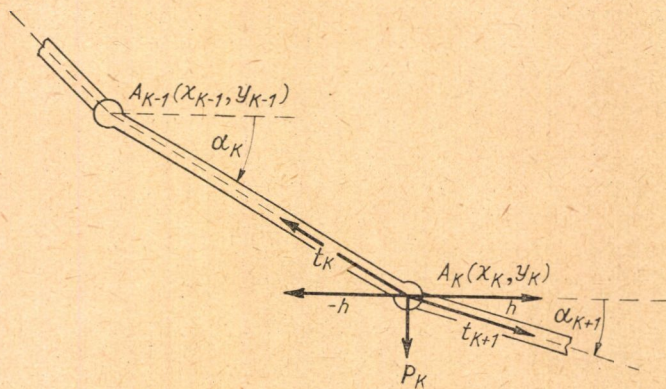
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

kontinuáns matrixnak, melynek kanonikus alakja (spektrális felbontása) ismeretes. Ennek a kanonikus alaknak a felhasználásával és a matrix-elmélet néhány ismert tételének az alkalmazásával automatikusan el fogunk jutni a fentemlített lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásának Fourier-kifejtéséhez.

A megoldás ezen alakjának alkalmazása mellett a hídszerkezet alakváltozásai és feszültségei számológép segítségével aránylag könnyen kiszámíthatóknak fognak bizonyulni.

### 1. §. Egy lánc alakváltozása a csuklóiban ható vertikális erők következtében

Tekintsük a függélyes síkban elhelyezkedő  $A_0 A_1 \dots A_n$  láncot, mely az  $A_k A_{k+1}$  merev rudakból áll. Jelöljük az  $A_k A_{k+1}$  rúd és az  $Ox$  tengely közti szöget  $\alpha_{k+1}$ -gyel és működjön az  $A_k$  csuklóban  $p_k$  vertikális erő. Jelöljük továbbá  $A_k A_{k+1}$  rúdban beálló húzó feszültséget  $t_{k+1}$ -gyel (lásd : 1. ábra).



1. ábra

Ekkor az  $A_k$  csuklóra nézve az egyensúly feltételei a következők :

$$(1) \quad t_{k+1} \sin \alpha_{k+1} - t_k \sin \alpha_k + p_k = 0$$

$$(2) \quad t_{k+1} \cos \alpha_{k+1} - t_k \cos \alpha_k = 0 \\ (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Innen

$$(3) \quad t_k \cos \alpha_k = h = \text{const.} \quad t_k = \frac{h}{\cos \alpha_k},$$

és ezt (1)-be helyettesítve adódik

$$(4) \quad h (\text{tg } \alpha_{k+1} - \text{tg } \alpha_k) + p_k = 0,$$

vagy

$$(5) \quad \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = -\frac{p_k}{h},$$

ahol  $x_k$  és  $y_k$  az  $A_k$  csukló koordinátáit jelentik.

Tegyük fel most, hogy

$$x_{k+1} - x_k = l = \text{const} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Ekkor a fenti egyenletekből következik:

$$(6) \quad \frac{-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1}}{l} = \frac{p_k}{h}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha az egyensúlyi helyzetben a  $p_k$  vertikális erők ekvidisztánsak, akkor ezek az erők arányosak a csuklóordináták második differenciáival.

Tegyük fel, hogy a láncnak  $A_0$  és  $A_n$  végpontjai az  $Ox$ -tengelyen vannak. Ekkor  $y_0 = y_n = 0$  és a (6) egyenletek most az alábbi alakot öltik:

$$(7) \quad \begin{cases} 2y_1 - y_2 & = l \frac{p_1}{h} \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 & = l \frac{p_2}{h} \\ \dots & \dots \\ -y_{n-2} + 2y_{n-1} & = l \frac{p_{n-1}}{h}. \end{cases}$$

Ha a

$$(8) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrixokat bevezetjük, akkor a fenti egyenletek a következő matrix-egyenletbe foglalhatók össze:

$$(9) \quad \mathbf{C}\mathbf{y} = \frac{l}{h} \mathbf{p}.$$

A  $C$  matrix nem-szinguláris, ennél fogva (9)-ből következik :  $\bullet$

$$(10) \quad y = \frac{l}{h} C^{-1} p.$$

Ez az egyenlet a csuklók  $y_k$  ordinátáit megadja mint a  $p_k$  vertikális erők explicit függvényeit.

Abban a speciális esetben, midőn az összes  $p_k$  erők egymással egyenlők, és közös értékük  $p$ , a csuklók az

$$(11) \quad y = \frac{p}{h} \frac{x(nl-x)}{2l}; \quad \left( y_k = \frac{p}{h} \frac{k(n-k)}{2} l \right)$$

parabolán fekszenek.

Ebben az esetben a  $p$  teher, a  $h$  horizontális feszültség és az első láncszem iránytényezője a következő egyenlet által vannak összekapcsolva :

$$h = \frac{n-1}{2} \frac{l}{y_1} p,$$

és a lánc legmélyebb pontjának az ordinátája :

$$y_{\max} = \frac{p}{h} \frac{n^2}{8} l, \quad \text{ha } n \text{ páros}$$

$$y_{\max} = \frac{p}{h} \frac{n^2-1}{8} l, \quad \text{ha } n \text{ páratlan.}$$

## 2. §. Egy gerenda alakváltozása a rá ható koncentrált transzverzális erők következtében

Tekintsünk egy homogén prizmatikus gerendát, mely az  $(x_0, 0)$ ,  $(x_n, 0)$  végpontjain alá van támasztva és az  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ ,  $(x_3, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, 0)$  pontokban a  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-1}$  vertikális erők által van terhelve. Ezen erők hatása alatt azok támadáspontjai  $\eta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) transzverzális elmozdulást szenvednek és az  $(x_k, \eta_k)$  egyensúlyi helyzetekbe jutnak.

Feladatunk meghatározni azt a kapcsolatot, mely a  $q_k$  alkalmazott erők és a támadáspontoknak  $\eta_k$  transzverzális elmozdulásai közt fennáll.

Erre a célra fel fogjuk használni a rugalmasságtannak az alábbi jólismert tételeit.

a) Ha a gerenda  $(x_k, 0)$  pontjai a  $q_k$  transzverzális erőkkel vannak terhelve, akkor a támadáspontokban fellépő  $\mu_k$  hajlító feszültségek a következő egyenletek által vannak meghatározva :<sup>2)</sup>

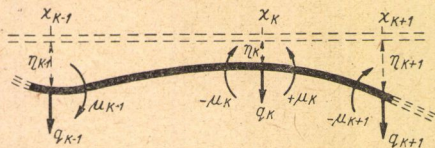
$$(12) \quad \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = -q_k.$$

<sup>2)</sup> Lásd például : [6], I. p. 680

b) Ha a gerenda  $(x_k, 0)$  pontjainak  $\eta_k$  transzverzális elmozdulásai adva vannak, akkor az  $x_k$  keresztmetszetekben fellépő  $\mu_k$  hajlító feszültségek a következő egyenletekkel vannak meghatározva:<sup>3)</sup>

$$(13) \quad -\frac{1}{6EJ} \left\{ (x_{k+1} - x_k) \mu_{k+1} + 2(x_{k+1} - x_{k-1}) \mu_k + (x_k - x_{k-1}) \mu_{k-1} \right\} = \\ = \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Ha ezen (12)–(13) egyenletekből a  $\mu_k$  hajlító feszültségeket elimináljuk, akkor megkapjuk a  $q_k$  erők és a  $\eta_k$  elmozdulások közt a keresett összefüggést. Ez az elimináció legcélszerűbben a matrix-technika segítségével hajtható végre. Továbbá az egyenletes lánchidak elméletében ezen egyenletek-



2. ábra

nek csupán arra a különösen egyszerű alakjára van szükségünk, mely a gerenda ekvidisztáns felosztásának felel meg. Ez esetben

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = l$$

és a (12)–(13) egyenletek most a  $\mu_0 = \mu_n = 0$  és  $\eta_0 = \eta_n = 0$  kerületi feltételek figyelembe vételével a következő alakot öltik:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\mu_1 - \mu_2 \\ -\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 \\ \dots \\ -\mu_{n-2} + 2\mu_{n-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} = lq_1 \\ = lq_2 \\ \dots \\ = lq_{n-1} \end{array}$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\eta_1 - \eta_2 \\ -\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3 \\ \dots \\ -\eta_{n-2} + 2\eta_{n-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} = \frac{l^2}{6JE} (4\mu_1 + \mu_2) \\ = \frac{l^2}{6JE} (\mu_1 + 4\mu_2 + \mu_3) \\ \dots \\ = \frac{l^2}{6JE} (\mu_{n-2} + 4\mu_{n-1}) \end{array}$$

<sup>3)</sup> Lásd például: [6], I. p. 680

Ha bevezetjük a (8) matrixokon kívül a

$$(16) \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrixokat is, akkor a (14)–(15) egyenletek a következő matrix-egyenletbe foglalhatók össze:

$$(17) \quad \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\mu} = l \mathbf{q}$$

$$(18) \quad \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{l^2}{EJ} \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\mu}.$$

A  $\mathbf{C}$  és  $\mathbf{K}$  matrixok nem-szingulárisak, tehát  $\boldsymbol{\mu}$ -nek az eliminációja közvetlenül elvégezhető és a következő egyenletekre vezet:

$$(19) \quad \mathbf{q} = \frac{EJ}{l^3} \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}$$

$$(20) \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{l^3}{EJ} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q}$$

Ezen egyenletek megadják az explicit összefüggést a  $q_k$  transzverzális erők és a  $\eta_k$  transzverzális elmozdulások között.

### 3. §. A lánchíd egyensúlyi egyenlete és annak matrix-megoldása

Mint már fentebb említettük, a hídszerkezetet egy lánccs és egy gerenda (merekítő tartó) kombinációjának tekintjük (3. ábra). Ennek a kombinációnak az a sajátossága, hogy ámbár a gerenda deformációját (a rugalmasságtanban szokásos értelmezéssel) kicsinynek tekintjük, a lánccs alakváltozása (tudniillik annak az egyenestől való eltérése) véges nagyságrendű. Ha azonban feltételezzük — amint az általában szokásos a függőhidak elméletében —, hogy a lánccs hordozza a saját súlyát, a függesztőrudak súlyát és a gerenda holsúlyát (önsúly) oly módon, hogy eközben a gerenda egyenes marad,<sup>4)</sup> akkor a lánccs és a gerendának az élősúly hatására bekövetkező addicionális alakváltozásai kis mennyiségek, tehát *lineáris* egyenletek segítségével kiszámíthatók.

Alkalmazzuk az alábbi jelöléseket:

a) Legyen a lánccs csomópontjainak száma  $n$  (csuklók száma:  $n - 1$ ), a szomszédos függesztőrudak távolsága  $l$ .

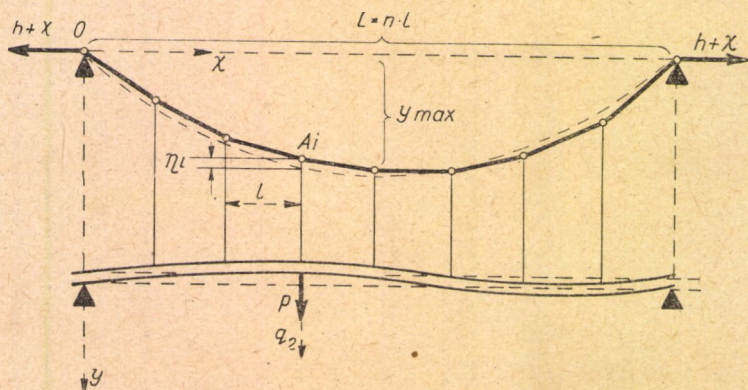
<sup>4)</sup> Illetve pontosabban: feltesszük, hogy a  $B_0, B_1, \dots, B_n$  pontok egy egyenesben fekszenek.

b) A szerkezet (lánc, függesztőrúdak, gerenda) holt súlya minden egyes függesztőrúdra legyen egyenlő  $p$ -vel; az  $i$ -edik függesztőrúd alsó végpontjára ható élő teher (hasznos teher) legyen  $q_i$ .

c) A holt súly hatása alatt bekövetkező láncfeszültség horizontális komponensét jelöljük  $h$ -val; az élőteher hatására bekövetkező feszültség-növekedés:  $\chi$ . A láncnak a kezdeti holt teher hatása alatt felvett egyensúlyi alakját a csuklók

$$x_k = kl, \quad y_k = \frac{p}{h} \frac{k(n-k)}{2} l \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

koordinátái határozzák meg (az  $y$  ordinátát a lánc végpontjait összekötő vízszintestől számítva lefelé pozitívnak minősítjük). A láncsuklóknak az élőteher hatása folytán bekövetkező vertikális elmozdulásait  $\eta_k$ -val jelöljük.



3. ábra

Feltesszük továbbá, hogy a függesztőrúdaknak a rugalmas alakváltozása elhanyagolható, ennél fogva a gerenda  $x_k$  pontjának vertikális elmozdulása ugyanakkora, mint a  $k$ -edik csukló elmozdulása. Ez utóbbi feltevés a függesztőrúdak merevségén kívül, azt is implicálja, hogy a csuklók horizontális elmozdulásait figyelmen kívül hagyjuk.

d) A gerenda keresztmetszetének inercianyomatékát konstansnak tételezzük fel és  $J$ -vel jelöljük; a Young-féle modulust  $E$ -vel. Legyenek az  $n$  láncszemből álló láncnak végpontjai  $(0, 0)$  és  $(nl, 0)$ ; továbbá a gerenda végpontjai (alátámasztási pontjai)  $(0, m)$  és  $(nl, m)$ .

A láncnak a kezdeti terhelés hatására felvett egyensúlyi alakját meg-  
egyezésben (6)-tal, a

$$(21) \quad \frac{-y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1}}{l} = \frac{p}{h} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

differencia-egyenletek és az

$$(22) \quad y_0 = 0, \quad y_n = 0$$

kerületi feltételek határozzák meg.

A (21) differencia-egyenletek és a (22) kerületi feltételek összefoglalhatóak egyetlen matrix-egyenletté:

$$(23) \quad \mathbf{C} \frac{\mathbf{y}}{l} = \frac{p}{h} \mathbf{e},$$

ahol  $\mathbf{C}$  és  $\mathbf{y}$  az 1. §-ban bevezetett (8) matrixokat jelentik és  $\mathbf{e}$  egy oszlop-matrixot jelent, melynek összes elemei 1-gyel egyenlők.

Há most a kezdeti terheléshez a  $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$  élőterhek hozzájárulnak, akkor ezen élőtehernek bizonyos, egyelőre ismeretlen  $\tilde{q}_i$  részeit a lánc fogja hordozni, a fennmaradó  $q_i - \tilde{q}_i$  terheket pedig a gerenda hajlítószilárdsága.

Az élőteher hatása folytán továbbá a horizontális lánc feszültség  $h + \chi$  értékre fog növekedni és az  $y_k$  ordinátákhoz  $\eta_k$  elmozdulások fognak hozzáadódni. Eszerint az élőteher hatásának figyelembe vételével a lánc egyensúlyi feltételét a következő egyenlet fogja kifejezni:

$$(24) \quad \mathbf{C} \frac{\mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}}{l} = \frac{p \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{q}}}{h + \chi}$$

Másrészt a gerenda egyensúlyi egyenlete matrix alakban, megegyezésben (19)-cel, a következő lesz:

$$(25) \quad \frac{EJ}{l^3} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}};$$

vagy dimenziótlan alakban:

$$(26) \quad \frac{EJ}{l^2 h} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} \frac{\boldsymbol{\eta}}{l} = \mathbf{q} - \frac{\tilde{\mathbf{q}}}{h}.$$

Három ismeretlen mennyiség fordul elő a (24) és (26) egyenletekben, tudniillik az  $\boldsymbol{\eta}$  és  $\mathbf{q}$  vektorok, továbbá a  $\chi$  skalár paraméter.

Tegyük fel egyelőre, hogy  $\chi$  ismeretes. Ekkor,  $\tilde{\mathbf{q}}$  értékét a (24) egyenletből a (26) egyenletbe helyettesítve, adódik:

$$(27) \quad \frac{EJ}{l^2 h} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} \frac{\boldsymbol{\eta}}{l} + \left( \frac{h + \chi}{h} \right) \mathbf{C} \frac{\mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}}{l} = \frac{\mathbf{q} + p \mathbf{e}}{h}$$

A (23) egyenlet figyelembevételével ez a következő alakra redukálódik:

$$(28) \quad \left\{ \frac{EJ}{l^2 h} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} + \left( 1 + \frac{\chi}{h} \right) \mathbf{C} \right\} \frac{\boldsymbol{\eta}}{l} = \frac{\mathbf{q}}{h} - \frac{\chi}{h} \frac{p}{h} \mathbf{e}.$$



Ily módon eljutottunk a *lánchidak elméletének alapegyenletéhez*. Ebből az alapegyenletből mindenekelőtt kiolvasható, hogy az  $\frac{EJ}{l^2h}$  és  $\frac{p}{h}$  dimenziót-

lan mennyiségek a terheletlen hídnak karakterisztikus paraméterei.<sup>5)</sup>

Mint hogy továbbá a (28) egyenlet baloldalán a  $\{ \dots \}$  zárójelben szereplő matrix nem-szinguláris (lásd: erre nézve a 4. §-t), tehát az alapegyenlet közvetlenül megoldható a következő alakban:

$$(29) \quad \eta = l \left\{ \frac{EJ}{l^2h} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} + \left( 1 + \frac{\chi}{h} \right) \mathbf{C} \right\}^{-1} \left( \frac{\mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2} \mathbf{e} \right).$$

Ez az egyenlet megadja a csuklóknak, valamint a gerenda-osztáspontoknak vertikális elmozdulásait, feltéve, hogy a  $\chi$  láncteszítés-növekedés már ismeretes.

Felhasználva az  $\eta_k$  elmozdulásoknak ezen értékeit, a gerenda  $x_k$  keresztmetszeteiben működő  $\mu_k$  hajlító feszültségek kiszámíthatók a (15) egyenlet segítségével a következő alakban:

$$(30) \quad \mu = \frac{EJ}{l^2} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \eta = hl \left\{ \mathbf{C} + \left( 1 + \frac{\chi}{h} \right) \frac{hl^2}{EJ} \mathbf{K} \right\}^{-1} \left( \frac{\mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2} \mathbf{e} \right).$$

A (29) és (30) egyenletek megadják a lehajlások és a hajlító-feszültségek exakt és explicit értékeit tetszőleges élőtehereloszlás mellett. Azonban, mint már a bevezetésben hangsúlyoztuk, a (29) egyenletben előforduló

$$(31) \quad \mathbf{R} = \left\{ \frac{EJ}{l^2h} \mathbf{CK}^{-1} \mathbf{C} + \left( 1 + \frac{\chi}{h} \right) \mathbf{C} \right\}^{-1}$$

inverz matrixnak az effektív kiszámítása nagyszámú függesztőrúd esetén annyira hosszadalmas, hogy a nyert megoldást a (29) alakban nem lehet gyakorlati számításra alkalmasnak minősíteni.

Avégből tehát, hogy eredményeinket gyakorlatilag használható alakra hozzuk, transzformálni fogjuk a (29) és (30) egyenletekben fellépő matrixokat kanonikus alakjukra.

Azon szerencsés körülmény folytán, hogy a  $\mathbf{K}$  matrix a  $\mathbf{C}$  kontinuáns matrixnak lineáris függvénye, ki fog derülni, hogy a (31) »rezolvens«

<sup>5)</sup> Néhány függőhíd jellemző paraméterei: (lásd [5], p. 220):

	$p$	$L = nl$	$f$	$f/L$	$EJ$	$h$	$hL^2/EJ$
Híd megnevezése..	kg/cm	cm	cm		kg · cm <sup>2</sup>	kg	
Breslau 1910 .....	108	12 000	1200	0,1	$0,546 \cdot 10^{12}$	$1,62 \cdot 10^6$	1,034
Manhattan.....	85	44 800	4360	0,097	$0,819 \cdot 10^{12}$	$4,88 \cdot 10^6$	1,728
II. Tacoma-híd,							
1945.....	126	85 500	8550	0,1	$1,131 \cdot 10^{12}$	$13,45 \cdot 10^6$	4,53
Zweden 1941 .....	13,6	14 000	1680	0,12	$0,196 \cdot 10^{12}$	$0,198 \cdot 10^6$	7,04
I. Tacoma-híd,							
1940.....	84	85 300	7100	0,084	$2,49 \cdot 10^9$	$10,78 \cdot 10^6$	2810

matrixnak kanonikus előállítása aránylag egyszerű számításokat tesz szükségessé, és a megoldást automatikusan Fourier-kifejtés alakjában szolgáltatja.

#### 4. §. A horizontális láncfeszültség növekedésének kiszámítása

Két esettel foglalkozunk. Először a láncot nyújthatatlannak tételezzük fel, másodsor figyelembe vesszük a lánc rugalmas és termikus nyúlását is; ez utóbbi esetben jelöljük a rugalmassági moduluszt  $E$ -vel és a hőtágulási együtthatót  $\beta$ -val.

A  $k$ -adik láncszemnek  $l_k$  hosszúsága a kezdeti állapotban a következő egyenlettel van megadva :

$$(32) \quad l_k^2 = (x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2,$$

a  $(\xi_k, \eta_k)$  elmozdulások után pedig a láncszem  $\Delta l_k$  megnyúlását a következő egyenletből nyerjük :

$$(33) \quad (l_k + \Delta l_k)^2 = (x_k + \xi_k - x_{k-1} - \xi_{k-1})^2 + (y_k + \eta_k - y_{k-1} - \eta_{k-1})^2.$$

Innen, a kis mennyiségeknek négyzeteit és szorzatait elhanyagolva nyerjük :

$$(34) \quad l_k \Delta l_k = (x_k - x_{k-1})(\xi_k - \xi_{k-1}) + (y_k - y_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1}).$$

Nyújthatatlan lánc esetében  $\Delta l_k = 0$ .

Ha  $x_k - x_{k-1}$  helyébe két szomszédos függesztőrúdnak közös  $l$  távolságát behelyettesítjük és ezután a (34) egyenleteket összegezzük, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^n l_k \Delta l_k = l \sum_{k=1}^n (\xi_k - \xi_{k-1}) + \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1}) = 0.$$

A lánc végpontjai rögzítve vannak :  $\xi_0 = \xi_n = 0$  és  $\eta_0 = \eta_n = 0$  eszerint  $\sum_{k=1}^n (\xi_k - \xi_{k-1}) = 0$ , következésképpen .

$$(35) \quad \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1})(\eta_k - \eta_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}) \eta_k = 0.$$

De a kezdeti terhelési állapotban a (11) egyenlet szerint

$$-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = \frac{l}{h} p \neq 0,$$

eszerint nyújthatatlan lánccs esetében az  $\eta_k$  vertikális elmozdulások algebrai összegének el kell tűnnie, vagyis

$$\sum_{k=1}^{n-1} \eta_k = 0;$$

vagy matrix alakban

$$(36) \quad \mathbf{e}^* \boldsymbol{\eta} = 0.$$

Helyettesítsük most ebbe az egyenletbe  $\boldsymbol{\eta}$ -nak (29) szerinti értékét. Azt nyerjük, hogy

$$(37) \quad \mathbf{e}^* \mathbf{R} \left( \frac{\mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2} \mathbf{e} \right) = 0.$$

A  $\chi$  lánccs feszültség-növekedés ebben az egyenletben látszólag csupán lineárisan fordul elő és ilyenképpen  $\chi$  kifejezhető belőle a következő alakban:

$$(38) \quad \chi = \frac{h \mathbf{e}^* \mathbf{R} \mathbf{q}}{p \mathbf{e}^* \mathbf{R} \mathbf{e}}.$$

A valóságban azonban ez egy magas fokszámú algebrai egyenlet  $\chi$ -re nézve, mert  $\chi$  az  $\mathbf{R}$ -ben is előfordul. Avégből, hogy egy első közelítést kapassunk,  $\mathbf{R}$ -ben  $1 + \frac{\chi}{h} \approx 1$ -et helyettesítünk, elhanyagolván ily módon  $\chi$ -t  $h$ -hoz viszonyítva. Ezután  $\chi$ -t kiszámítjuk az ily módon egyszerűsített (38) egyenletből, és amennyiben szükséges, korrigáljuk  $\mathbf{R}$ -nek az értékét és megismételjük a számítást.

Ha a lánccs nyújtható, akkor a  $k$ -edik lánccs szemben a  $\chi$  horizontális feszültség-növekedés és a  $\vartheta$  hőmérséklet-növekedés folytán bekövetkező relatív nyúlást az alábbi egyenlet adja meg:

$$(39) \quad \frac{\Delta l_k}{l_k} = \frac{\chi}{EQ} \frac{l_k}{l} + \beta \vartheta.$$

Itt  $Q$  a lánccs keresztmetszet területét jelenti és  $\chi \frac{l_k}{l}$  a  $k$ -edik lánccs szem totális feszültség-növekedése. Ha ezt a (39) egyenletbe helyettesítjük, kapjuk:

$$\frac{\chi}{EQ} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{l_k}{l} \right)^3 + \beta \vartheta \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{l_k}{l} \right)^2 = \frac{p}{hl} \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k = \frac{p}{hl} \mathbf{e}^* \boldsymbol{\eta}.$$

Felhasználva  $\boldsymbol{\eta}$ -nak (29) alatti értékét, ismét kapunk egy egyenletet, melyből  $\chi$  a fenti módon közelítőleg kiszámítható.

5. §. A megoldás Fourier-kifejtése

A (29)-ben szereplő  $\mathbf{R}$  rezolvens matrix a  $\mathbf{C}$  és  $\mathbf{K}$  matrixoknak racionális függvénye. Minthogy  $\mathbf{K} = \mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}$ , ahol  $\mathbf{E}$  egységmatrix, tehát  $\mathbf{R}$  racionális függvénye a  $\mathbf{C}$  kontinuáns matrixnak:

$$\mathbf{R} = \varphi(\mathbf{C}); \quad \varphi(x) = \frac{1 - \frac{x}{6}}{\frac{EJ}{l^2 h} x^2 + \left(1 + \frac{\chi}{h}\right) x \left(1 - \frac{x}{6}\right)}$$

Másrészt, mint ismeretes, a  $\mathbf{C}$  matrix kanonikus alakja a következő:

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^* = \sum_{k=1}^{n-1} \left(4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}\right) \frac{2}{n} \cdot \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \end{bmatrix} \cdot \left[ \sin \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{2k\pi}{n}, \dots, \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \right]$$

Ismeretes továbbá, hogy a  $\mathbf{C}$  matrixnak bármely  $\varphi(\mathbf{C})$  racionális függvénye a következő kanonikus alakkal bír:

$$\varphi(\mathbf{C}) = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(\lambda_k) \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^*$$

Ezen tételek felhasználásával az  $\mathbf{R}$  rezolvens matrix számára közvetlenül az alábbi kanonikus alakot nyerjük:

$$(40) \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}}{\frac{EJ}{l^2 h} \mathbf{C}^2 + \left(1 + \frac{\chi}{h}\right) \mathbf{C} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}\right)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \frac{\lambda_k}{6}}{\frac{EJ}{l^2 h} \lambda_k^2 + \left(1 + \frac{\chi}{h}\right) \lambda_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{6}\right)} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^*$$

és ezt felhasználva (29)-ből adódik :

$$(41) \quad \eta = l \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \frac{\lambda_k}{6}}{\frac{EJ}{l^2 h} \lambda_k^2 + \left(1 + \frac{\chi}{h}\right) \lambda_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{6}\right)} \mathbf{u}_k \left( \frac{\mathbf{u}_k^* \mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2} \mathbf{u}_k^* \mathbf{e} \right).$$

Ez a formula nyilván csak akkor válik alkalmazhatóvá, ha előbb a  $\chi$  feszültség-növekedés közelítő értékét a nyújthatatlan lánccsatlós esetében érvényes

$$(42) \quad \mathbf{e}^* \eta = \frac{p}{h} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_0(\lambda_k) (\mathbf{e}^* \mathbf{u}_k) \left( \frac{\mathbf{u}_k^* \mathbf{q}}{p} - \frac{\chi}{h} \mathbf{u}_k^* \mathbf{e} \right) = 0$$

egyenletből kiszámítottuk, ahol  $\varphi_0(\lambda)$  jelenti  $\varphi(\lambda)$ -nak az értékét  $\chi = 0$  helyettesítés után.

Figyelembevételével, hogy

$$\mathbf{e}^* \mathbf{u}_{2k} = 0, \quad \mathbf{e}^* \mathbf{u}_{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cotg \left( \frac{2k+1}{2} \frac{\pi}{n} \right),$$

az előbbi egyenletből azt kapjuk, hogy

$$(43) \quad \chi = \frac{h}{p} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_0(\lambda_{2k+1}) (\mathbf{u}_{2k+1}^* \mathbf{q}) (\mathbf{u}_{2k+1}^* \mathbf{e}) \right\} / \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_0(\lambda_{2k+1}) (\mathbf{e}^* \mathbf{u}_{2k+1})^2 \right\}.$$

Ha  $\chi$ -nek ezt az értékét a (41) egyenletbe helyettesítjük, akkor onnan az  $\eta_k$  vertikális elmozdulások kiszámíthatók, továbbá a (30) egyenlet felhasználásával a  $\mu_k$  hajlítófeszültségek is kiszámíthatókká válnak.

### 6. §. A numerikus számítás elrendezése

Mindenekelőtt kiszámítjuk a következő mennyiségeket :

$$1^\circ \quad \frac{EJ}{hl^2} \quad (\text{A híd merevségi paramétere})$$

$$\frac{p}{h} \quad (\text{A híd mértani vagy alakparamétere})$$

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (\text{A C matrix sajátértékei.})$$

$$\mathbf{u}_k^* = \sqrt{\frac{2}{n}} \left[ \sin \frac{k\pi}{n}, \sin \frac{2k\pi}{n}, \dots, \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \right] \quad (\text{A C matrix sajátvektorai.})$$

2° Az egyenletes terhelés Fourier-együtthatói :

$$\mathbf{e}^* \mathbf{u}_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sin \frac{\nu k \pi}{n} = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros szám,} \\ \sqrt{\frac{2}{n}} \cotg \frac{k\pi}{2n}, & \text{ha } k \text{ páratlan szám.} \end{cases}$$

3° A tetszőlegesen előírt  $\mathbf{q}^* = [q_1, q_2, \dots, q_n]$  élőteher Fourier-együtthatói :

$$\mathbf{q}^* \mathbf{u}_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu \sin \frac{\nu k \pi}{n}.$$

4° A  $\varphi_0(\lambda)$  függvény értékei a  $\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}$  helyen :

$$\varphi_0(\lambda_k) = \frac{1 - \frac{\lambda_k}{6}}{\frac{EJ}{l^2 h} \lambda_k^2 + \lambda_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{6}\right)}.$$

A  $\chi$  horizontális feszültségváltozás közelítő értéke ezek felhasználásával a (43) egyenletből kiszámítható. Az így kapott  $\chi$  értéket  $\varphi(\lambda)$ -ba behelyettesítve a  $\varphi(\lambda_k)$  értékek is kiszámíthatók. Végül kiszámíthatók a következő szorzatok :

$$l \varphi(\lambda_k) \left( \frac{\mathbf{u}_k^* \mathbf{q}}{h} - \frac{p\chi}{n^2} \mathbf{u}_k^* \mathbf{e} \right); \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

és az így nyert számok már az  $\boldsymbol{\eta}^* = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}]$  lehajlási matrix Fourier-koefficiensei. Hasonlóképpen vezethetők le a megfelelő formulák a  $\mu_k$  hajlító feszültségek számára.

#### IRODALOM

- [1] J. MELAN: *Eisenbrückenbau*. Deuticke, Wien, 1925.
- [2] S. TIMOSHENKO: »Steifigkeit von Hängebrücken.« *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 8 (1928) 1
- [3] TH. VON KÁRMÁN—M. A. BIOT: *Mathematical methods in engineering*. McGraw-Hill, London, 1940 (p. 277).
- [4] K. KÖPPEL—K. H. KIE: »Lotrechte Schwingungen von Hängebrücken.« *Ingenieur-Archiv* 13 (1942—43) 211.
- [5] A. D. DE PATER: »Some new points of view in calculating suspension bridges.« *Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering* 11 (1951) 41
- [6] »HÜTTE« *Des Ingenieurs Taschenbuch*. Ernst & Sohn, Berlin, 1949.

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАТРИЦ К РАСЧЕТУ ЦЕПНЫХ МОСТОВ

Е. Эгервари

### Резюме

В противоположность известной до сих пор теории подвесных мостов, требующей решения дифференциального уравнения, приведенный автором способ для расчета цепных мостов носит конечный характер. Цепной мост рассматривается как система с конечным числом степеней свободы, на которую подвижная нагрузка действует на нижних концах подвесных стержней. При учете такой нагрузки деформация подкоса определяется в технической механике т. н. уравнениями Клапейрона. Исходя из этих уравнений и из уравнений равновесия цепи, автор выводит систему линейных уравнений в матричной форме, непосредственно определяющую при данной нагрузке деформацию подкоса, а одновременно также и напряжения изгиба. Решение этой системы уравнений, то есть инверсия соответствующей матрицы, осуществляется автором при помощи канонического разложения матрицы в таком удобном для числовых вычислений виде, который по существу является гармоническим анализом решения.

Кроме инверсии упомянутой матрицы, весьма важным для решения проблемы является вычисление приращения натяжения цепи под действием нагрузки. Для решения этого уравнения автор использует метод последовательных приближений, соответствующий графическому способу, при котором корни уравнения второй степени представляются в виде точек пересечения гиперболы с прямой.

## ON THE APPLICATION OF THE MATRIX THEORY TO THE CALCULATION OF CHAIN BRIDGES<sup>6)</sup>

E. EGERVÁRY

### Summary

In place to the known theory of suspension bridges in which differential equations are used, the author presents a method of finite computation. The chain bridge is considered as a system possessing a finite number of degrees of freedom, where live loads are applied at the lower end points of the suspension rods. With the live loads considered in this manner, the deformation of the stiffening members is determined by the so-called Clapeyron equations of applied mechanics. Using these equations, and the equations of equilibrium of the chain, the author develops a system of linear equations written in matrix form, which, for a given load, determines directly the deformation of the stiffening girder as well as its bending stresses. The solution of this system of equations, i. e. the inversion of its matrix is performed by means of the canonical reduction of the matrix in such a form — suitable also for numerical calculations — which in principle may be considered as being the harmonic analysis of the solution.

Besides the inversion of the matrix, the key to the problem is the calculation of the increase of chain stress due to the action of live load. The author indicates a method of solving this equation by successive approximations, which corresponds to that graphical method where the roots of a second degree equation are found by the points of intersection of a hyperbola and a straight line.

<sup>6)</sup> See the complete text in English: *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* 11 (1955) 241—256.