MEGJEGYZÉSEK EGERVÁRY JENŐ »A MATRIX-ELMÉLET ALKALMAZÁSA LÁNCHIDAK SZÁMÍTÁSÁRA« C. DOLGOZATÁHOZ[1]

TASNÁDY ISTVÁN[2]

A szóbanforgó dolgozat szerzője a következő, a lánchíd-számításoknál alapvető jelentőségű képletet állapítja meg :

$$(1) \qquad \mathfrak{y} = l \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \frac{\lambda_k}{6}}{\frac{EJ}{l^2 h} \lambda_k^2 + \left(1 + \frac{\chi}{h}\right) \lambda_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{6}\right)} \mathbf{u}_k \left(\frac{\mathbf{u}_h^* \mathbf{q}}{h} - \frac{\chi p}{h^2} \mathbf{u}_k^* \mathbf{e} \right)$$

(Lásd az említett dolgozat (41) képletét. A jelölések értelmezése ugyanott található meg.)

Bevezetve az

$$\frac{EJ}{l^2 h} = a \, , \frac{\chi}{h} = b$$

jelöléseket, ahol b a láncfeszültség horizontális komponensének relatív megváltozását jelenti, a képlet némi átalakítással a következő, áttekinthetőbb alakban is felírható :

$$\mathfrak{y} = \frac{l}{h} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathbf{u}_k^* \mathbf{q} - bp\, \mathbf{u}_k^* \mathbf{e}}{\lambda_k \left[\left(a \frac{6 \lambda_k}{6 - \lambda_k} + 1 \right) + b \right]} \mathbf{u}_k .$$

Az alábbi sorok célja annak megmutatása, hogy az élőteher eloszlására jellemző $\mathbf{q}$ vektor speciális, de a gyakorlati szempontból fontos megválasztása esetén miként alakul $\mathfrak{y}$ képlete. Tekintettel arra, hogy a gyakorlati számításoknál oly jelentős $b = \frac{\chi}{h}$ érték kiszámítása — nyújthatatlannak feltételezett lánc esetén — az

$$\mathbf{e}^* \mathfrak{y} = 0$$

[1] Lásd az előző cikket (9. oldal).
[2] Építőipari Műszaki Egyetem, Budapest, Matematikai Tanszék

egyenletből történhetik (mert ebben az esetben az η_k vertikális elmozdulások algebrai összegének el kell tűnnie), a számítástechnika szempontjából lényeges $\boldsymbol{\eta}$ értékének alakulása. Meg fogjuk mutatni, hogy a jelzett speciális esetben a $b = \dfrac{\chi}{h}$ érték igen egyszerűen, egy lineáris egyenletből számítható ki ; ez a felismerés azért is hasznos, mert b így nyert értékétől a rugalmas (nyújtható) láncnak megfelelő érték nem nagyon különbözik : a nyújthatatlan láncra számított b érték a rugalmas láncra érvényes b érték jó közelítése.

Elsősorban megjegyzendő, hogy a

$$\sin \alpha + \sin 2\,\alpha + \sin 3\,\alpha + \ldots + \sin m\,\alpha = \frac{\sin\,(m+1)\dfrac{\alpha}{2}\cdot \sin m\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

összefüggés alapján

$$\mathbf{u}_k^*\,\mathbf{e} = \mathbf{e}^*\,\mathbf{u}_k = \sqrt{\frac{2}{n}}\,\sin^2 k\frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{cotg}\frac{k\pi}{2n}\,,$$

azaz

páratlan k esetén $\qquad \mathbf{u}_k^*\,\mathbf{e} = \sqrt{\dfrac{2}{n}}\,\operatorname{cotg}\dfrac{k\pi}{2n}\,,$

páros k esetén $\qquad \mathbf{u}_k^*\,\mathbf{e} = 0\,.$

I. Legyen n páros és $\mathbf{q}$ a következő alakú :

$$\mathbf{q} = q\begin{bmatrix} 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

vagyis

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_{\frac{n}{2}-1} = 2\,q$$

$$q_{\frac{n}{2}} = q$$

$$q_{\frac{n}{2}+1} = \ldots = q_{n-1} = 0$$

Egyszerűen igazolható, hogy ebben az esetben

$$\mathbf{u}_k^* \mathbf{q} = 2\, q \sqrt{\frac{2}{n}} \sin^2 k \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2\, n},$$

azaz

páratlan k esetén $\mathbf{u}_k^* \mathbf{q} = q \sqrt{\frac{2}{n}} \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2n}$,

páros és 4-gyel osztható k esetén $\mathbf{u}_k^* \mathbf{q} = 0$,

páros és 4-gyel nem osztható k esetén $\mathbf{u}_k^* \mathbf{q} = 2q \sqrt{\frac{2}{n}} \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2n}$.

Ennek figyelembevételével, továbbá a k indexszám változásából eredő értékek áttekinthetőbb csoportosítása végett az l indexszámot bevezetve,

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{2}{n}} (q - bp) \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{\operatorname{cotg} \frac{(2l+1)\pi}{2n}}{\lambda_{2l+1} \left[\left(a \frac{6\, \lambda_{2l+1}}{6 - \lambda_{2l+1}} + 1 \right) + b \right]} \mathbf{u}_{2l+1} +$$

$$+ \frac{2lq}{h} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-3}{4}\right]} \frac{\operatorname{cotg} \frac{(2l+1)\pi}{n}}{\lambda_{4l+2} \left[\left(\frac{6\lambda_{4l+2}}{6 - \lambda_{4l+2}} + 1 \right) + b \right]} \mathbf{u}_{4l+2} .$$

ahol $\left[\frac{n-3}{4}\right]$ az $\frac{n-3}{4}$-ben foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

$\boldsymbol{\eta}$ ily módon történő felírásából, valamint a

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}$$

definícióból rögtön következik, hogy

$$\mathbf{e}^* \boldsymbol{\eta} = \frac{2l}{nh} (q - bp) \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{4 - \lambda_{2l+1}}{\lambda_{2l+1}^2 \left[\left(a \frac{6\lambda_{2l+1}}{6 - \lambda_{2l+1}} + 1 \right) + b \right]} .$$

Mivel nyújthatatlannak feltételezett lánc esetén b kiszámítása az

$$\mathbf{e}^* \boldsymbol{\eta} = 0$$

egyenletből történhetik, azonnal kitűnik, hogy ekkor

$$b = \frac{\chi}{h} = \frac{q}{p},$$

azaz a teljes élőteher és holtteher hányadosa.

Meg kell itt még jegyezni, hogy az $\mathbf{e}^*\boldsymbol{\eta} = 0$ egyenlet egyetlen pozitív (azaz: a technikai értelmezés szempontjából szóbajöhető) gyöke a $b = \frac{q}{p}$ érték. Ez közvetlenül belátható abból, hogy az $\mathbf{e}^*\boldsymbol{\eta}$ kifejtésében szereplő

$$\sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{4 - \lambda_{2l+1}}{\lambda_{2l+1}^2 \left[\left(a \frac{6\lambda_{2l+1}}{6 - \lambda_{2l+1}} + 1\right) + b\right]}$$

tényező minden $b \geqq 0$ értékre pozitív, mert

$$a > 0, \; 0 < \lambda_{2l+1} \leqq \lambda_{n-1} = 4 \sin^2 \frac{n-1}{n} \frac{\pi}{2} < 4.$$

II. Legyen n páratlan és $\mathbf{q}$ a következő alakú:

$$\mathbf{q} = q \begin{bmatrix} 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

vagyis

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_{\frac{n-1}{2}} = 2q,$$

$$q_{\frac{n+1}{2}} = \ldots = q_{n-1} = 0.$$

Egyszerű számítás szerint ebben az esetben

$$\mathbf{u}_k^* \mathbf{q} = q \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2n} - \frac{\cos k \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{k\pi}{2n}} \right),$$

ami azt jelenti, hogy

$$\text{páratlan } k \text{ esetén} \quad \mathbf{u}_k^* \mathbf{q} = q \sqrt{\frac{2}{n}} \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2n},$$

$$\text{páros } k \text{ esetén} \quad \mathbf{u}_k^* \mathbf{q} = (-1)^{\frac{k-2}{2}} q \sqrt{\frac{2}{n}} \left\{\operatorname{cotg} \frac{k\pi}{4n}\right\}^{(-1)^{\frac{k-2}{2}}}.$$

Ennek figyelembevételével és k helyett az $l = \dfrac{k}{2}$ indexszámot beve-
zetve

$$\mathfrak{n} = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{2}{n}} (q - bp) \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{\operatorname{cotg} \frac{(2l+1)\pi}{2n}}{\lambda_{2l+1} \left[\left(a \frac{6\lambda_{2l+1}}{6 - \lambda_{2l+1}} + 1 \right) + b \right]} \mathbf{u}_{2l+1} +$$

$$+ \frac{l.g}{h} \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^{l-1} \cdot \left[\operatorname{cotg} \frac{l\pi}{2n}\right]^{(-1)^{l-1}}}{\lambda_{2l+1}^2 \left[\left(a \frac{6\lambda_{2l}}{6 - \lambda_{2l}} + 1 \right) + b \right]} \mathbf{u}_{2l}.$$

Ebben az esetben is

$$\mathbf{e}^* \mathfrak{n} = \frac{2l}{hn} (q - bp) \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{4 - \lambda_{2l+1}}{\lambda_{2l+1}^2 \left[\left(a \frac{6\lambda_{2l+1}}{6 - \lambda_{2l+1}} + 1 \right) + b \right]},$$

amiből ugyanúgy, mint I. alatt

$$b = \frac{\chi}{h} = \frac{q}{p},$$

azaz a teljes élőteher és holtteher hányadosa és $b = \dfrac{q}{p}$ most is az egyetlen pozitív gyök.

Említésreméltó még, hogy a számítások gyakorlati végrehajtása szempontjából hasznos a

$$\lambda_k + \lambda_{n-k} = 4$$

összefüggés.

ПРИМЕЧАНИЯ К РАБОТЕ Е. ЭГЕРВАРИ ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МАТРИЦ К РАСЧЕТУ ЦЕПНЫХ МОСТОВ*)

И. Ташнадъи

Резюме

Е. Эгервари в упомянутой работе дает формулу для вектора $\mathfrak{y}$, выражающую горизонтальные смещения кулачков цепи. Этой формуле можно дать особенно удобный вид для практических вычислений, при некотором специальном, но важным с практической точки зрения выборе вектора $\mathfrak{q}$, задающего распределение живой нагрузки.

В данном случае можно также доказать, что значение величины $\frac{\chi}{h}$ — в случае нерастяжимой цепи — равно частному живого и мертвого грузов.

BEMERKUNGEN ZUR ABHANDLUNG VON J. EGERVÁRY ÜBER DIE ANWENDUNG DES MATRIZENKALKÜLS BEI DER KONSTRUKTION VON KETTENBRÜCKEN**)

I. TASNÁDY

Zusammenfassung

J. Egerváry gab die Formel (1) für den Vektor $\mathfrak{y}$, welcher die horizontalen Bewegungen der einzelnen Kettengelenke ausdrückt. Diese Formel lässt sich in einer für die praktischen Rechnungen sehr geeigneten Gestalt schreiben, falls der — die Verteilung der lebenden Last darstellende — Vektor $\mathfrak{q}$ in einer spezieller, aber in der Praxis wichtigen Weise gewählt wird.

In diesem Falle lässt sich ferner nachweisen, dass die Grösse $\frac{\chi}{h}$, falls die Ketten undehnbar sind, dem Quotienten der lebenden und toten Last gleich ist.

*)См. предыдущую статью.
**) Siehe die vorangehende Arbeit.