

KÉT VÉGÉN FELFÜGGESZTETT GERENDA STABILITÁSÁNAK VIZSGÁLATA A MATRIX-SZÁMÍTÁS SEGÍTSÉGÉVEL

LOVASS-NAGY VIKTOR

Bevezetés

Jelen dolgozat szerzője egy korábbi munkájában¹⁾ foglalkozott két végén szabadon felfüggesztett gerendák oldalirányú kihajlással szembeni stabilitásának matematikai vizsgálatával, azon esetekben, amikor a gerendát a középső keresztmetszet súlypontjában ható koncentrált vagy *egyenletesen* megoszló erő terheli. Az alábbiakban — két, egymásra merőleges szimmetriasíkkal bíró — gerendának *tetszésszerű* függőleges irányú terhelés hatására létrejövő deformációját fogjuk vizsgálni, azon esetben, amidőn a gerenda oly módon van két végén felfüggesztve, hogy a forgást megengedő felfüggesztési pontok a szélső keresztmetszetek súlypontja fölött, valamelyik fő-inerciatengelyben fekszenek²⁾.

A vázolt esetben kétféle egyensúlyi helyzet lehetséges :

1. A gerenda csak függőleges lehajlást és egyes keresztmetszetek csak a gerenda hossz tengelyére merőleges vízszintes tengely körüli elfordulást szenvednek. Ennek az egyensúlyi helyzetnek a labilis vagy stabilis volta a felfüggesztési pontok helyzetétől függ. Ha a felfüggesztési pontok elhelyezése olyan, amely mellett a most körülírt egyensúlyi helyzet labilis, akkor létezik egy másik, stabilis egyensúlyi helyzet is, amelyben a gerenda a 2. alatt vázolt deformációt szenved.

2. A gerenda az adott terhelés hatására mind függőleges, mind vízszintes irányban kihajlik, és az egyes keresztmetszetek mind a hossz tengely, mind az arra merőleges vízszintes és függőleges tengely körül elfordulnak.

A következő számítások célját azon kérdés megválaszolása képezi, hogy vajon lehetséges-e a gerenda felfüggesztését oly módon eszközölni, hogy a gerenda stabilis egyensúlyi állapota az 1. pontban vázolt legyen.

¹⁾ Lásd : [1], [2] (p. 242) és [3]. Timoshenko [2] dolgozatában két végén befalazott derékszögű négyszög-keresztmetszetű gerenda középső keresztmetszetének súlypontjában ható koncentrált erő által előidézett kibillenését vizsgálta, Csonka P. [3] pedig a két végén keresztmetszetének súlypontja felett felfüggesztett, *egyenletesen* megoszló erővel terhelt derékszögű négyszög-keresztmetszetű gerenda kibillenésével foglalkozott.

²⁾ Számításaink nyilvánvalóan olyan gerendákra vonatkoznak, amelyek anyaga homogén, izotróp és tökéletesen rugalmas. A levezetett eredmények nem alkalmazhatók vékonyfalú szelvényrészekből összetett keresztmetszetekre, ahol az övhajlítások is figyelembeveendők.

Jelölések

- z a deformálatlan súlyponti szál valamely pontjának távolsága a deformálatlan súlyponti szál középpontjától, a deformálatlan súlyponti szál mentén mérve ;
- s a deformált súlyponti szál valamely pontjának távolsága a deformált súlyponti szál középpontjától, a deformált súlyponti szál mentén mérve ;
- $r(z)$ a deformálatlan súlyponti szál középpontjától a deformálatlan súlyponti szál mentén mért z távolságra levő pont helyzetvektora ;
- $r(s)$ a deformált súlyponti szál középpontjától a deformált súlyponti szál mentén mért s távolságra levő pont helyzetvektora ;
- r_1 a lentebb értelmezendő Q erő támadási helyzetvektora ;
- $P(z)$... a gerendára ható (a deformálatlan súlyponti szál hosszegységére vonatkoztatott) terhelés az $r(z)$ helyzetvektorú pontban ;
- $P(s)$... a gerendára ható (a deformált súlyponti szál hosszegységére vonatkoztatott) terhelés az $r(s)$ helyzetvektorú pontban ;
- Q a gerenda jobboldali végén ható koncentrált (reakció-) erő ;
- $M(z)$... a gerenda valamely z koordinátájú keresztmetszetétől jobbra eső (azaz z -től $+l/2$ -ig terjedő) darabjára ható nyomatékvektor-eredő ;
- $M(s)$... a deformált gerenda valamely s koordinátájú keresztmetszetétől jobbra eső (azaz s -től $+l/2$ -ig terjedő) darabjára ható nyomatékvektor-eredő ;
- $\alpha + \beta$... jelenti azon szöget, amellyel az egyensúlyi helyzetben a gerenda tetszőszerinti keresztmetszetének főinerciatengelyei eredeti függőleges, illetőleg vízszintes helyzetükhöz képest a felfüggesztési pontokon át fektethető tengely körül elfordulnak ;
- α jelenti azon (véges mértékű) szöget, amellyel a gerenda két szélső keresztmetszetének főinerciatengelyei eredeti helyzetükhöz képest elfordulnak ;
- β jelenti azon (elsőrendűen kicsiny) szöget, amellyel a gerenda valamely keresztmetszetének főinerciatengelyei a deformált állapotban a két szélső keresztmetszethez viszonyítva elfordulnak ;

1. megjegyzés: Mivel a jelenség α -ban szimmetrikus, α pozitív iránya tetszés szerint választható. A következő számításokban α -t β -val megegyező irányításúnak vesszük. A β szög pozitív iránya megegyezik a lentebb értelmezendő t_0 vektorhoz rendelt jobbsavar-iránnyal.

2. megjegyzés: A gerenda 2. fajta egyensúlyi helyzetének kialakulása úgy is elképzelhető, hogy először az egész gerenda (deformálódás nélkül) elfordul a felfüggesztési pontokon átfektetett tengely körül α szöggel, majd a gerenda két végét ebben a helyzetben rögzítve (befalazva), a gerenda az eredetileg adott függőleges irányú terhelés hatására deformálódik, amely deformációt a fenti β szög, továbbá a lentebb értelmezendő φ és ψ szögek, valamint u és v elmozdulások jellemeznék.

- n_{10}, n_{20}, t_0 ... az α szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerenda középső keresztmetszetének fő-inerciatengelyeivel és a gerenda súlyponti szálával egybeeső, az adott sorrendben jobbsavar-rendszert alkotó egységvektor-hármas ;
- n_1, n_2, t ... a deformált gerenda valamely keresztmetszetének fő-inerciatengelyei vel és a deformált súlyponti szálnak az illető keresztmetszet súlypontjához tartozó érintőjével egybeeső, az adott sorrendben jobbsavar-rendszert alkotó egységvektor-hármas ; az alábbiakban : »kísérő triéder«;³⁾
- φ a deformált gerenda súlyponti szála t érintő-vektorának az n_{20} - t_0 síkra való vetületének a t_0 vektorral bezárt (elsőrendűen kicsiny) szöge (illetve a vetület iránytangense) ;
- ψ a deformált gerenda súlyponti szála t érintő-vektorának az n_{20} - t_0 síkra való vetületének a t_0 vektorral bezárt (elsőrendűen kicsiny) szöge (illetve a vetület iránytangense) ;

³⁾ A »kísérő triéder« kifejezést a geometriai szóhasználattól eltérőleg, a rugalmas rudak elméletében általában szokásos értelemben használjuk.

3. megjegyzés: φ , illetve ψ akkor minősítendőek pozitívnak, ha forgási irányuk megegyezik az n_{20} , illetve n_{10} vektorhoz rendelt jobbesavar forgási irányával.

4. megjegyzés: A β , φ és ψ szögek felhasználásával az n_{10} , n_{20} , t_0 »alap-triéder« és az n_1 , n_2 , t »kísérő-triéder« között a következő összefüggések írhatók fel:⁴⁾

$$n_1 = 1 \cdot n_{10} + \beta \cdot n_{20} - \varphi \cdot t_0$$

$$n_2 = -\beta \cdot n_{10} + 1 \cdot n_{20} + \psi \cdot t_0$$

$$t = \varphi \cdot n_{10} - \psi \cdot n_{20} + 1 \cdot t_0$$

u.....a deformált gerenda valamely keresztmetszete súlypontjának (elsőrendűen kicsiny) elmozdulása az α szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerendában elfoglalt helyzetéhez képest, az n_{10} vektorral megegyező irányban;

v.....a deformált gerenda valamely keresztmetszete súlypontjának (elsőrendűen kicsiny) elmozdulása az α szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerendában elfoglalt helyzetéhez képest, a n_{20} vektorral megegyező irányban.

5. megjegyzés: Az u , illetve v elmozdulást akkor minősítjük pozitívnak, ha az megegyező irányú az n_{10} , illetve az n_{20} vektorral.

6. megjegyzés: Minthogy feltevésünk szerint a gerenda α szöggel elfordul, de még nem deformálódott helyzetétől számított $n_{10} \cdot u + n_{20} \cdot v$ deformációs elmozdulás elsőrendűen kicsiny, továbbá t_0 irányú elmozdulás nincs, másodrendű kicsinyektől eltekintve írhatjuk, hogy

$$s = z,$$

$$r(s) = r(z),$$

$$\left| \frac{dr(s)}{ds} \right| = \left| \frac{dr(z)}{dz} \right| = 1.$$

Továbbá:

$$\varphi = \frac{du}{dz} \text{ és } \psi = \frac{dv}{dz}.$$

(Tehát, pozitív u -hoz pozitív φ , pozitív v -hez negatív ψ tartozik.)

1. §. A folyamatot leíró differenciál-egyenletek megszerkesztése

A folyamatot leíró differenciál-egyenletek megszerkesztése végett elegendő a gerenda egy tetszőleges darabjára (például a szilárdságtanban szokásos módon a gerenda valamely kiválasztott keresztmetszetétől jobbra eső, azaz z -től $+l/2$ -ig terjedő, gerenda-darabra) ható nyomtérvektor-eredőnek az egyensúly fennállása esetén való eltűnését felhasználni.

A fentebb bevezetett jelölések figyelembevételével:

$$(1) \quad M(s) = \int_s^{l/2} [r(\sigma) - r(s)] \times P(\sigma) |\dot{r}(\sigma)| d\sigma + [r_1 - r(s)] \times Q$$

⁴⁾ Az n_{10} , n_{20} , t alap-triédert az $n_1(z)$, $n_2(z)$, $t(z)$ kísérő-triéderbe forgató matrixnak itt felhasznált alakja közvetlenül adódik az úgynevezett Cayley-féle formulákból (lásd például [4]-et, p. 210), ha a végtelen kis forgásnak megfelelőleg az ott szereplő paraméternek csupán első hatványait tartjuk meg.

Ebből (a 6. megjegyzésben foglaltak alapján) nyerjük, hogy

$$(2) \quad \mathbf{M}(z) = \int_z^{l_2} [\mathbf{r}(\zeta) - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{P}(\zeta) d\zeta + [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{Q}$$

ahol

$$\mathbf{r}(z) = \mathbf{n}_{10} \cdot u(z) + \mathbf{n}_{20} \cdot v(z) + \mathbf{t}_0 \cdot z$$

Annak érdekében, hogy az elemi rúdelmélet három alap-differenciál-egyenletét felírassuk, a fenti $\mathbf{M}(z)$ nyomatékvektor-eredőnek a deformált gerendán kiválasztott valamely keresztmetszet fő-inerciatengelyei és a deformált súlyponti szál érintője által alkotott $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{t}$ »kísérő-triéder« egységvektorokra való vetületeit kell képezni. Ily módon az egyensúly feltételeként azt nyerjük, hogy

$$(3) \quad \begin{cases} B_2 \frac{d\psi}{dz} = \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{n}_1 \\ B_1 \frac{d\varphi}{dz} = \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{n}_2 \\ C \frac{d\beta}{dz} = \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{t} \end{cases}$$

A (3) egyenletrendszerből (a 4. és 6. megjegyzésekben foglaltak figyelembevételével) az alábbi egyenletrendszerre⁵⁾ jutunk:

$$(4) \quad \begin{cases} -B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} = \mathbf{M}(z) \cdot \left[\mathbf{n}_{10} + \beta(z) \cdot \mathbf{n}_{20} - \frac{du(z)}{dz} \mathbf{t}_0 \right] \\ -B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} = \mathbf{M}(z) \cdot \left[-\beta(z) \mathbf{n}_{10} + \mathbf{n}_{20} - \frac{dv(z)}{dz} \mathbf{t}_0 \right] \\ C \frac{d\beta}{dz} = \mathbf{M}(z) \cdot \left[\frac{du(z)}{dz} \mathbf{n}_{10} + \frac{dv(z)}{dz} \mathbf{n}_{20} + \mathbf{t}_0 \right] \end{cases}$$

⁵⁾ A (4) egyenletrendszerben B_1 és B_2 a gerenda fő hajlítási merevségeit, C pedig a torziós merevségét jelentik.

$$B_1 = J_1 E \quad \text{és} \quad B_2 = J_2 E,$$

ahol J_1 és J_2 a gerenda-keresztmetszet fő-inercianyomatékai az 1-, illetve 2-jelű tengelyekre és E a rugalmassági modulus, és $C = J_3 G$, ahol J_3 a gerenda-keresztmetszet torziós nyomatéka és G a torziós modulus. A fő-inercianyomatékok meghatározása közismert módon történik. A torziós nyomaték meghatározását illetőleg lásd például [5]-öt (p. 375), továbbá [6]-ot (VI. kötet, p. 151). Például a alappal és b magassággal bíró négyszögkeresztmetszetű tartó esetén:

Amennyiben a gerenda függőleges irányú terhelésének (hosszegységre vonatkoztatott) abszolút értéke a $p = p(z)$ függvény által adott és a felüggesztési pontok a szélső keresztmetszetek súlypontja felett h magasságban vannak, akkor írhatjuk:

$$P(z) = -[n_{10} p(z) \cdot \sin \alpha + n_{20} p(z) \cdot \cos \alpha],$$

$$Q = (n_{10} \sin \alpha + n_{20} \cos \alpha) Q,$$

$$r_1 = n_{20} h + t_0 \frac{l}{2}.$$

A jobboldali reakció-erő abszolút értéke nyilván

$$Q = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} p(\zeta) \left(\frac{l}{2} + \zeta \right) d\zeta.$$

Ily módon adódik, hogy

$$\begin{aligned} M(z) = & n_{10} \left[\int_{zl/2}^{l/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right) \right] \cos \alpha - \\ & - n_{20} \left[\int_z^{zl/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right) \right] \cos \alpha - \\ & - t_0 \left\{ \int_z^{l/2} p(\zeta) [u(\zeta) - u(z)] d\zeta \cos \alpha - \int_z^{l/2} p(\zeta) [v(\zeta) - v(z)] d\zeta \sin \alpha + \right. \\ & \left. + Q u(z) \cos \alpha + Q [h - v(z)] \sin \alpha \right\}. \end{aligned}$$

$$J_1 = \frac{ab^3}{12}$$

$$J_2 = \frac{a^3b}{12};$$

J_3 értéke csak végtelen sor alakban állítható elő; keskeny $\left(\frac{a}{b} < \frac{1}{3}\right)$ tartóknál:

$$J_3 = \frac{a^3b}{3} \left(1 - 0,63 \frac{a}{b} \right).$$

(Lásd például [6]-ot, VI. kötet, p. 153.)

Az (5) összefüggés figyelembevételével a (4) egyenletrendszerből azt nyerjük, hogy:⁶⁾

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} -B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} &= \left[\int_z^{l/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right) \right] [\cos \alpha - \beta(z) \sin \alpha] + \\ &\quad + Q h \frac{du}{dz} \sin \alpha \\ -B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} &= \left[\int_z^{l/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right) \right] [\sin \alpha + \beta(z) \cos \alpha] - \\ &\quad - Q h \frac{dv}{dz} \sin \alpha \\ C \frac{d\beta}{dz} &= \left[\int_z^{l/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right) \right] \left[\frac{du}{dz} \cos \alpha - \frac{dv}{dz} \sin \alpha \right] - \\ &\quad - \int_z^{l/2} p(\zeta) [u(\zeta) - u(z)] d\zeta \cos \alpha + \int_z^{l/2} p(\zeta) [v(\zeta) - v(z)] d\zeta \sin \alpha - \\ &\quad - Q u(z) \cos \alpha - Q [h - v(z)] \sin \alpha. \end{aligned} \right.$$

A (6) egyenletrendszer harmadik egyenletének mindkét oldalát z szerint differenciálva, és rövidebb írásmód céljából bevezetve a

$$g(z) = \int_z^{l/2} p(\zeta) (\zeta - z) d\zeta - Q \left(\frac{l}{2} - z \right)$$

jelölést, a (6) egyenletrendszerből az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$(7) \quad \begin{aligned} B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} + \sin \alpha \cdot Q h \frac{du}{dz} - \sin \alpha \cdot g(z) \beta &= -\cos \alpha \cdot g(z) \\ B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} - \sin \alpha \cdot Q h \frac{dv}{dz} + \cos \alpha \cdot g(z) \beta &= -\sin \alpha \cdot g(z) \\ C \frac{d^2 \beta}{dz^2} - \cos \alpha \cdot g(z) \frac{d^2 u}{dz^2} + \sin \alpha \cdot g(z) \frac{d^2 v}{dz^2} &= 0 \end{aligned}$$

⁶⁾ A másodrendű kicsiny tagokat elhanyagoljuk.

Annak érdekében, hogy mindhárom egyenletben ugyanolyan dimenziójú kifejezések szerepeljenek, osszuk el a (7) egyenletrendszer első és második egyenletét l -lel; így módon (az egyenletek sorrendjét célszerűségi okokból megváltoztatva) nyerjük a gerenda deformációját leíró, lineáris, változó együtthatós differenciál-egyenletrendszer végleges alakját:⁷⁾

$$(8) \quad \begin{aligned} C \frac{d^2 \beta}{dz^2} - \cos \alpha \cdot g(z) \frac{d^2 u}{dz^2} + \sin \alpha \cdot g(z) \frac{d^2 v}{dz^2} &= 0 \\ \cos \alpha \cdot \frac{1}{l} g(z) \beta + B_1 \frac{1}{l} \frac{d^2 u}{dz^2} - \sin \alpha \cdot Qh \frac{1}{l} \frac{dv}{dz} &= -\sin \alpha \cdot \frac{1}{l} g(z) \\ -\sin \alpha \cdot \frac{1}{l} g(z) \beta + \sin \alpha \cdot Qh \frac{1}{l} \frac{du}{dz} + B_2 \frac{1}{l} \frac{d^2 v}{dz^2} &= -\cos \alpha \cdot \frac{1}{l} g(z). \end{aligned}$$

A deformált gerenda alakját meghatározó $\beta(z)$, $u(z)$, $v(z)$ függvények a következő kerületi feltételeket tartoznak egyidejűleg kielégíteni:

$$(9) \quad \begin{aligned} \beta\left(-\frac{l}{2}\right) &= \beta\left(+\frac{l}{2}\right) = 0 \\ u\left(-\frac{l}{2}\right) &= u\left(+\frac{l}{2}\right) = 0 \\ v\left(-\frac{l}{2}\right) &= v\left(+\frac{l}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Az α szög meghatározása abból a feltételből történhet, hogy egyensúly esetén nincs a gerendát a két felfüggesztési ponton átmenő forgástengely körül forgató nyomaték. Egyensúly esetén tehát:

$$(10) \quad \int_{-l/2}^{l/2} p(z) u(z) dz \cos \alpha - \int_{-l/2}^{l/2} p(z) [v(z) - h] dz \sin \alpha = 0.$$

A (10) egyenletből azonban nem csupán az adott h felfüggesztési magasság esetén bekövetkező elfordulás határozható meg, hanem előírható az

⁷⁾ Ha a (8) egyenletrendszerben α helyébe zérust írunk, az egyenletrendszerből u és v kiküszöbölhetők és így módon $\beta(z)$ -re a következő differenciálegyenlet adódik:

$$\frac{d^2 \beta}{dz^2} + \frac{1}{CB_1} [g(z)]^2 \beta = 0.$$

Ez az egyenlet magában foglalja az *S. Timoshenko* [2], illetve *Csonka P.* [3] dolgozataiban szereplő egyensúlyi egyenleteket. Például $p = \text{const}$ egyenletesen megoszló terhelés esetén $g(z) = \frac{p}{2} \left(z^2 - \frac{l^2}{4} \right)$ és így a $\beta(z)$ -re adódó differenciálegyenlet az

$$\frac{d^2 \beta}{dz^2} + \frac{1}{CB_1} \frac{p^2}{4} \left(z^2 - \frac{l^2}{4} \right) \beta = 0$$

alakot ölti.

α elfordulási szög értéke is, és ez esetben a (10) egyenletből meghatározható a h felfüggesztési magasság azon értéke, amelynél a gerenda stabilis egyensúlyi állapotában a szélső keresztmetszetek eredeti helyzetükhöz képest éppen α szöggel fordulnak el:

$$(11) \quad h = \frac{\cos \alpha \int_{-l/2}^{l/2} p(z) u(z) dz - \sin \alpha \int_{-l/2}^{l/2} p(z) v(z) dz}{\sin \alpha \int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz}.$$

2. §. A deformációt leíró differenciál-egyenletrendszer közelítő megoldása a matrix-számítás segítségével⁸⁾

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} C \frac{d^2}{dz^2} & -\cos \alpha \cdot l g \frac{d^2}{dz^2} & \sin \alpha \cdot l g \frac{d^2}{dz^2} \\ \cos \alpha \cdot \frac{1}{l} g & B_1 \frac{d^2}{dz^2} & -\sin \alpha \cdot Q h \frac{d}{dz} \\ -\sin \alpha \cdot \frac{1}{l} g & \sin \alpha \cdot Q h \frac{d}{dz} & B_2 \frac{d^2}{dz^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{l} g \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \beta \\ \frac{u}{l} \\ \frac{v}{l} \end{bmatrix}.$$

A bevezetett jelölések segítségével a (8) egyenletrendszer a következő matrix-egyenlet alakjában írható:

$$(12) \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{r}.$$

A (12) egyenlet közelítő megoldását keressük $\mathbf{y} = \mathbf{c} \frac{1}{l} \mathbf{y}$ alakban, ahol

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ c_2 \sin \alpha \\ c_3 \cos \alpha \end{bmatrix},$$

⁸⁾ A matrix-számításnak az alábbiakban felhasználandó fogalmait és jelöléseit illetőleg lásd például: [7] és [8].

továbbá $y = y(z)$ tetszésszerűen olyan függvény, mely legalább kétszer differenciálható és amely kielégíti az $y(-l/2) = y(+l/2)$ kerületi feltételt. A c_1, c_2, c_3 állandók értéke oly módon választandó, hogy a

$$H = \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* (\mathbf{L}y) dz$$

»közepes kvadratikus hiba« értéke minimális legyen, aminek szükséges feltétele, hogy

$$(13) \quad \text{grad}_c H = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial c_1} \\ \frac{\partial H}{\partial c_2} \\ \frac{\partial H}{\partial c_3} \end{bmatrix} = 0$$

legyen.⁹⁾

Nyilvánvaló¹⁰⁾, hogy

$$\begin{aligned} H &= \int_{-l/2}^{l/2} \left[\mathbf{c}^* \left(\mathbf{L} \frac{1}{l} y \right)^* - \mathbf{r}^* \left| \left(\mathbf{L} \frac{1}{l} y \right) \mathbf{c} - \mathbf{r} \right| \right] dz = \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} \left[\frac{1}{l^2} \mathbf{c}^* (\mathbf{L}y)^* (\mathbf{L}y) \mathbf{c} - \frac{1}{l} \mathbf{r}^* (\mathbf{L}y) \mathbf{c} - \frac{1}{l} \mathbf{c}^* (\mathbf{L}y) \mathbf{r} + \mathbf{r}^* \mathbf{r} \right] dz \end{aligned}$$

Ismeretes, hogy ha $\mathbf{B}$ tetszésszerűen kvadratikus matrix, akkor

$$\text{grad}_c [\mathbf{c}^* \mathbf{B} \mathbf{c}] = [\mathbf{B} + \mathbf{B}^*] \mathbf{c},$$

továbbá; ha $\mathbf{d}$ tetszésszerűen oszlop-matrix, akkor:

$$\text{grad}_c [\mathbf{c}^* \mathbf{d}] = \mathbf{d},$$

téhat a c_1, c_2, c_3 együtthatók meghatározására a (13) feltételből a következő egyenletet kapjuk¹¹⁾:

$$(14) \quad \left| \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* (\mathbf{L}y) dz \right| \mathbf{c} = l \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* \mathbf{r} dz.$$

⁹⁾ Az itt követett eljárás lényegében Ritz közismert módszerének alkalmazása matrix-egyenletre. (Az általános Ritz-féle módszert illetőleg lásd például [9]-et (p.205). A Ritz-féle módszernek matrix-egyenletre való alkalmazását illetőleg lásd: [11])

¹⁰⁾ Ugyanis $\mathbf{r}(\mathbf{L}y)\mathbf{c} = \mathbf{c}^*(\mathbf{L}y)^*\mathbf{r}$

¹¹⁾ Ugyanis $[(\mathbf{L}y)^*(\mathbf{L}y)]^* = (\mathbf{L}y)^*(\mathbf{L}y)$

A (14) matrix-egyenletből adódik, hogy

$$(15) \begin{bmatrix} c_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ c_2 \sin \alpha \\ c_3 \cos \alpha \end{bmatrix} = \left\{ \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* \mathbf{L}y dz \right\}^{-1} \cdot \left\{ - \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* g dz \right\} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Ebből a c_1 , c_2 , c_3 együttthatók oszlop-matrixa:¹²⁾

$$(16) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \left\{ \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* \mathbf{L}y dz \right\}^{-1} \cdot \left\{ - \int_{-l/2}^{l/2} (\mathbf{L}y)^* g dz \right\} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. §. A h felfüggesztési magasság kritikus értékének meghatározása

A dolgozat most következő, befejező részében a fentebb levezetett összefüggések' felhasználásával meghatározzuk a h felfüggesztési magasságnak azt a kritikus értékét (h_{krit}), amellyel egyenlő vagy amelynél nagyobb felfüggesztési magasság esetén a gerenda stabilis egyensúlyi helyzetében nem görbül ki oldalirányban, illetve amelynél kisebb felfüggesztési magasság esetén a gerenda stabilis egyensúlyi helyzetében oldalirányban kigörbül.

Mint ahogy feltételezésünk szerint $u = c_2 y \sin \alpha$ és $v = c_3 y \cos \alpha$, tehát a (11) egyenlet felhasználásával nyerjük:

$$(17) \quad h = - (c_2 - c_3) \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha \int_{-l/2}^{l/2} p(z) y(z) dz}{\sin \alpha \int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz}.$$

A (17) egyenlet magában foglalja mind a labilis, mind a stabilis egyensúlyi helyzet fennállásának feltételét; az egyenlet jobboldalán álló tört számlálóját és nevezőjét $\sin \alpha$ -val elosztva, nyerjük a *stabilis* egyensúlyi helyzet esetén fennálló összefüggést. A h_{krit} értékét abból a feltételből nyerjük, amely szerint, ha a felfüggesztési magasság értéke éppen egyenlő h_{krit} -sal, akkor a stabilis egyensúlyi helyzetben $\alpha = 0$ (aminek következtében, feltevésünk értelmében: $\beta = 0$ és $u = 0$).¹³⁾

¹²⁾ Ugyanis

$$\begin{bmatrix} c_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ c_2 \sin \alpha \\ c_3 \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

továbbá

$$\begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

¹³⁾ Ugyanis — feltevésünk értelmében — $\beta = c_1 y(z) \sin \alpha \cos \alpha$.

A fentiek szerint :

$$(18) \quad h_{krit} = -(c_2 - c_3) \cdot \frac{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) y(z) dz}{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz}.$$

Az $y = y(z)$ függvényt a fentiek szerint előírva, a h_{krit} -hoz tartozó c_2 , illetve c_3 a (16) egyenletből $a = 0$ helyettesítéssel nyerhető. Jelöljük rövidebb írásmód végett $\frac{d^2 y}{dz^2}$ -et y'' -vel; akkor a (16) egyenletből $a = 0$ helyettesítéssel nyerjük, hogy

$$(19) \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz + \frac{1}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y^2 dz & -cl \int_{-l/2}^{l/2} g y''^2 dz + \frac{B_1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} g y y'' dz & 0 \\ -Cl \int_{-l/2}^{l/2} g y''^2 dz + \frac{B_1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} g y y'' dz & l^2 \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y''^2 dz + B_1^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz & 0 \\ 0 & 0 & B_2^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -C \int_{-l/2}^{l/2} g y'' dz & -\frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y dz & 0 \\ l \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y'' dz & -B_1 \int_{-l/2}^{l/2} g y'' dz & 0 \\ 0 & 0 & -B_2 \int_{-l/2}^{l/2} g y'' dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A (19) matrix-egyenletből c_2 és c_3 értékére a következőket kapjuk :

$$c_2 = \frac{\left(-Cl \int_{-l/2}^{l/2} g y''^2 dz + \frac{B_1}{C} \int_{-l/2}^{l/2} g y y'' dz \right) \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y dz - \left(C^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz + \frac{1}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y^2 dz \right) B_1 \int_{-l/2}^{l/2} g y'' dz}{\left(C^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz + \frac{1}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y^2 dz \right) \left(l^2 \int_{-l/2}^{l/2} g^2 y''^2 dz + B_1^2 \int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz \right) - \left(-Cl \int_{-l/2}^{l/2} g y''^2 dz + \frac{B_1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} g y y'' dz \right)^2},$$

$$c_3 = -\frac{1}{B_2} \cdot \frac{\int_{-l/2}^{l/2} g y'' dz}{\int_{-l/2}^{l/2} y''^2 dz}.$$

Mint hogy az $y = y(z)$ függvény — a fentiekben előírt differenciálhatósági és kerületi feltételektől eltekintve — tetszőszerinti függvény lehet, célszerű az $y = y(z)$ függvényt úgy megválasztani, hogy a $v = c_3 \cos \alpha \cdot y(z)$ képletből $\alpha = 0$ helyettesítéssel adódó $v = c_3 y(z)$ kifejezés éppen az oldalirányban ki nem görbült gerendának a $p(z)$ függőleges irányú terhelés hatására bekövetkező lehajlásával legyen egyenlő. Ez nyilván bekövetkezik, ha $y(z)$ -t úgy választjuk, hogy kielégítse az alábbi egyenletet :

$$(20) \quad y'' = \frac{g(z)}{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz \cdot l^2}.$$

A (20) egyenletből $y(z)$ kétszeri integrálással és az $y\left(-\frac{l}{2}\right) = y\left(+\frac{l}{2}\right) = 0$ kerületi feltételek figyelembevételével adódik. Bevezetve a

$$\frac{d^2 G}{dz^2} = g(z); \quad G(-l/2) = G(+l/2) = 0$$

feltételeknek eleget tevő $G(z)$ függvényt, $y(z)$ a következőképpen írható :

$$y(z) = \frac{G(z)}{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz \cdot l^2}.$$

Az $y(z)$ függvényt ily módon adva meg, a c_2 és c_3 állandókra a fentebbi képletekből a következő értékeket kapjuk:

$$c_2 = \frac{1}{B_1} \times$$

$$\times \frac{\frac{1}{C B_1} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 G dz \left(- \int_{-l/2}^{l/2} g^3 dz + \frac{B_1}{C} \cdot \frac{1}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 G dz \right) - \int_{-l/2}^{l/2} g^2 dz \left(\int_{-l/2}^{l/2} g^2 dz + \frac{1}{C^2 l^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 G^2 dz \right)}{\left(\int_{-l/2}^{l/2} g^2 dz + \frac{1}{l^2 C^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 G^2 dz \right) \left(\frac{l^2}{B_1^2} \int_{-l/2}^{l/2} g^4 dz + \int_{-l/2}^{l/2} g^2 dz \right) - \left(- \frac{l}{B_1} \int_{-l/2}^{l/2} g^3 dz + \frac{1}{l C} \int_{-l/2}^{l/2} g^2 G dz \right)^2} l^2 \int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz$$

$$c_3 = - \frac{1}{B_2} l^2 \int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz.$$

A c_2 és c_3 állandók ismeretében a h_{krit} értéke a (17) képletből meghatározható. A gyakorlat számára különös érdekességgel bír az az eset, amikor B_1 és C akkorák, hogy az $\frac{1}{B_1^2}$ és $\frac{1}{C^2}$, továbbá az $\frac{1}{B_1 C}$ mennyiségek az egységhez képest elhanyagolhatók; ebben az esetben a h_{krit} -ra a következő képletet kapjuk:

$$(21) \quad h_{krit} = \frac{1}{B_1} \left[1 - \frac{B_1}{B_2} \right] \frac{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) \cdot G(z) dz}{\int_{-l/2}^{l/2} p(z) dz}.$$

Például $p = \text{állandó}$ esetén:

$$g(z) = \frac{p}{2} \left[z^2 - \frac{l^2}{4} \right]$$

$$G(z) = \frac{p}{384} [16z^4 - 24z^2 l^2 + 5l^4]$$

tehát a (21) képletből h_{krit} -ra adódó érték:¹⁴⁾

$$(22) \quad h_{krit} = \frac{1}{B_1} \left[1 - \frac{B_1}{B_2} \right] \frac{p l^4}{120}.$$

¹⁴⁾ Amennyiben a $\frac{B_1}{B_2}$ hányados az egységhez képest elhanyagolható, a (21) képletből adódó érték megegyezik a Csonka P. [3] dolgozatában a h_{krit} -ra levezetett értékkel.

IRODALOM

- [1] LOVASS-NAGY V.: »Két végén szabadon felfüggesztett gerenda oldalirányú kihajlással szembeni stabilitásának vizsgálata.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 33—49.
- [2] S. TIMOSHENKO: *Théorie de la stabilité élastique*. Béranger, Paris et Liege, 1947.
- [3] CSONKA P.: »A végein felfüggesztett négyszög-keresztmetszetű rúd stabilitása.« *A Magyar Tudományos Akadémia VI. (Műszaki tudományok) Osztályának Közleményei* 9 (1953) 437—447.
- [4] M. LAGALLY: *Vektor-rechnung*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1928.
- [5] A. E. H. LOVE: *Lehrbuch der Elastizität*. Teubner, Leipzig und Berlin, 1907.
- [6] H. GEIGER—K. SCHEEL: *Handbuch der Physik*. Springer, Berlin, 1928.
- [7] EGERVÁRY J.: »Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról.« *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 3 (1953) 417—458.
- [8] R. A. FRAZER—W. J. DUNCAN—A. R. COLLAR: *Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1938.
- [9] L. COLLATZ: *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949.
- [10] M. LOTKIN: »The treatment of boundary problems by matrix methods.« *The American Mathematical Monthly* 60 (1953) 11—19.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ УСТОЙЧИВОСТИ ПОДВЕШЕННОЙ НА ДВУХ КОНЦАХ БАЛКИ

В. Ловаш-Надь

Резюме

Автор исследует устойчивость балки (обладающей двумя, взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии), подвешенной на двух концах над центром тяжести поперечного сечения, относительно бокового изгиба в том случае, когда точки подвеса лежат на одной из главных осей инерции крайнего сечения. При этом предполагается, что повороту крайних сечений сила реакции подвеса не препятствует в их собственной плоскости. В настоящей работе рассматривается вопрос об условиях существования устойчивого положения равновесия относительно бокового изгиба в том общем случае нагрузки, когда балка нагружается вертикально направленной силой, действующей вдоль весовой линии, образованной центрами тяжести поперечных сечений, и распределенной в соответствии с произвольной функцией.

Деформированный вид, принятый балкой под действием данной нагрузки, определяется в положении равновесия следующими данными:

α означает (конечный) угол поворота главных осей инерции двух крайних сечений балки, по сравнению с исходным положением.

β означает угол (малости первого порядка) на который главные оси инерции некоторого поперечного сечения поворачиваются в деформированном состоянии по сравнению с двумя крайними сечениями.

u и v означают взаимно перпендикулярные смещения (малости первого порядка) центра тяжести некоторого поперечного сечения деформированной балки по сравнению с положением занятым в балке, поворачивающейся на угол α , но не деформированной.

Если предполагать угол α известным, то неизвестные функции $\beta(z)$, $u(z)$, $v(z)$ можно определить из уравнений (8) выражающих существование равновесия, и из краевых условий (9). Угол α определяется из условия, что в случае равновесия нет вращающего момента с осью вращения, проходящей через две точки подвеса. Функции $\beta(z)$, $u(z)$ и $v(z)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (8) и краевым условиям (9), получаются в общем в виде бесконечных степенных рядов. Приближенное решение данной системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее данным краевым условиям, определяется автором при помощи метода, являющегося матричным обобщением метода Рэйли Рунца. В заключение определяется критическое

Значение (h_{krit}) высоты точек подвеса над центрами тяжести крайних сечений. Для высот подвеса

$$h \geq h_{krit}$$

балка не изгибается в боковом направлении в стабильном положении равновесия, между тем как для высот

$$h < h_{krit}$$

она в таком направлении изгибается.

INVESTIGATION, BY MEANS OF THE MATRIX CALCULUS, OF THE STABILITY OF A BEAM SUSPENDED AT TWO POINTS

V. LOVASS-NAGY

Summary

Developing his former investigations [see (1)], the author examines the stability against lateral buckling of a beam, having two perpendicular planes of symmetry and being suspended at two points above the centers of gravity of the end sections, the points of suspension being in one of the main inertia axes. The rotation of the two end sections in their planes is not hindered by forced effects caused by the suspension.

The author in his present paper endeavours to find the conditions of the existence of stable equilibrium against lateral buckling in the general case of a beam being loaded by a distributed vertical load (defined by an arbitrary function) acting along the line containing of the centers of gravity of the sections.

The deformation of the beam caused by the given load can be described by the following quantities:

- the finite angle α by which the main inertia axes of the two end sections of the beam are rotated from their original position;

- the (1-st order small) angle β by which the main inertia axes of any cross section of the beam are rotated in the deformed state relatively to the end section;

- the displacements in two perpendicular directions u and v of the center of gravity of any cross section of the beam relatively to its position occupied in the beam rotated by an angle α but not yet deformed.

The unknown functions $\beta(z)$, $u(z)$, $v(z)$, are determined by the equations (8) expressing the conditions of equilibrium and by the boundary conditions (9) if the angle α is given. The angle α is determined by the condition that in case of equilibrium the torque around the axis joining the two suspension points, must assume zero value.

The functions $\beta(z)$, $u(z)$, $v(z)$, satisfying the differential equations (8) and the boundary conditions (9), can be generally obtained in form of an infinite power series. The approximate solution of the differential equations (8) satisfying the boundary conditions (9) is determined by the author by a generalisation of the *Rayleigh-Ritz* method on the basis of matrix calculus. Finally, the critical value of the suspension height is determined, at which buckling of the beam in its stable equilibrium does not occur. At a higher value of the suspension height no buckling of the beam in its stable equilibrium may take place, while at a smaller value lateral buckling of the beam is unavoidable.