

BIZONYOS TÍPUSÚ REKURRENS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK VIZSGÁLATÁRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

Jelen dolgozat a szerző korábbi vizsgálatait ([1] és [2]) fejleszti tovább. [1] és [2] dolgozatunkban olyan sztochasztikus folyamatokkal foglalkoztunk, amelyeknél meg lehetett adni egy rekurrens $\mathcal{L}$ eseményt, amelynek előfordulási pontjai a folyamat regenerációs pontjait (Markov-pontjait) alkották. Megmutattuk, hogy sok esetben ilyen folyamatokkal kapcsolatos valószínűségszámítási kérdések megoldására célszerű először az átlagfüggvényt (a $(0, t)$ időintervallumban előforduló $\mathcal{L}$ események várható számát) meghatározni, és ebből következtetni a kérdéses mennyiségekre. Ezt a módszert említett dolgozatainkban csupán néhány speciális esetre alkalmaztuk. Mostani tárgyalásunkban egy általánosabb típusú folyamatot tekintünk, amelyre a módszer közvetlenül ugyan nem alkalmazható, de fiktív folyamatok egyidejű szerepeltetésével a nehézségek elkerülhetők.

Az alábbi 1. §-ban először megfogalmazzuk a problémát, majd megmutatjuk, hogy a megoldást miként lehet visszavezetni bizonyos átlagfüggvények, illetve ezekkel kapcsolatos függvények meghatározására. A 2. §-ban a megoldás technikai kivitelét ismertetjük. Végül a 3. §-ban több példát tárgyalunk, amelyek alkalmazhatók részecskeszámlálásokkal kapcsolatos koincidenca-problémák, több gép egyidejű működésénél fellépő kérdések, telefonközpontok méretezése és egyéb koincidenca problémák megoldására.

1. §. A feladat kitűzése és a megoldás módszere

Tekintsünk egy Markov-láncot, amelynél az egyes állapotokat jelölje rendre $E_1, E_2, \dots, E_m$ szimbólum (m lehet véges vagy végtelen). Legyen az $E_j \rightarrow E_k$ ($j, k = 1, 2, \dots, m$) átmenet valószínűsége p_{jk} . A Markov-lánccal kapcsolatos vizsgálatokban rendszerint azt tételezik fel, hogy a rendszer lépésről-lépésre változtatja állapotát, de nem vizsgálják közelebbről az átmenetek előfordulási időpontjainak sorozatát. Jelenlegi tárgyalásunkban olyan folyamatokat kívánunk vizsgálni, amelyeknél az átmenetek időpontjainak $\{t_n\}$ sorozata meghatározott törvényt követ. Mégpedig csupán azon speciális esettel kívánunk foglalkozni, amelynél a $\{t_n\}$ sorozat a következő feltételeknek tesz eleget:

a) $t_0 = 0$, azaz $t = 0$ időpontban előfordul egy átmenet.

b) A $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) időkülönbségek független, pozitív valószínűségi változók.

c) A $t_n - t_{n-1}$ valószínűségi változó ($n = 1, 2, 3, \dots$) eloszlása csupán attól függ, hogy a $t = t_{n-1}$ időpontban milyen állapotba került a rendszer. Ha a $t = t_{n-1}$ időpontban E_k állapotba került a rendszer, úgy ezen feltétel mellett legyen $t_n - t_{n-1}$ eloszlásfüggvénye $F_k(x)$, ($k = 1, 2, \dots, m$).

A fenti feltevések a vizsgálatunk tárgyát képező folyamat struktúráját egyértelműen meghatározzák. Ha ismerjük a $t = 0$ időpontban érvényes kezdeti állapotot, az átmenet-valószínűségek $[p_{jk}]$ mátrixát és az $F_k(x)$, ($k = 1, 2, \dots, m$) eloszlásfüggvényeket, a felmerülő kérdésekre választ adhatunk. Előre kell bocsátani azonban, hogy ha folyamatunkat most már folytonosan változó időben tekintjük, úgy általában nem lesz Markov-féle, ha a rendszer állapotának leírására csupán az $E_1, E_2, \dots, E_m$ szimbólumokat használjuk. Ha azonban az állapotteret kibővítjük egy újabb paraméter megadásával, amely azt mutatja, hogy mennyi ideje van a rendszer az illető állapotban, úgy a folyamat Markov-féle lesz. Általában is érvényes azonban, hogy folyamatunknál a $\{t_n\}$ időpontok regenerációs pontok (Markov-pontok).

A következőkben annak megállapításával foglalkozunk, hogy egy bizonyos t hosszúságú időintervallum alatt előforduló $E_j \rightarrow E_k$ átmenetek száma, illetve az E_k állapotban való tartózkodás összhossza milyen eloszlást követ. Több esetet fogunk megkülönböztetni. Először a $(0, t)$ intervallumban vizsgáljuk a kérdéses valószínűségeket, majd az $(u, u + t)$ intervallumban. Végül megállapítjuk, hogy ezen utóbbi esetben mihez tartanak a kérdéses valószínűségek, ha $u \rightarrow \infty$, illetve, ha u a $(0, T)$ intervallumon egyenletes eloszlást mutató valószínűségi változó és $T \rightarrow \infty$. Ezen utóbbi két eset szolgáltatja a szigorúbb, illetve enyhébb értelemben vett stacionárius megoldást.

A fenti feladatnál az $E_j \rightarrow E_k$ átmenetek alkotják a folyamat rekurrens $\mathcal{C}$ eseményét. A folyamat kezdeti állapota egy konkrét feladatnál általában rögzítve van, de célszerű egyeidejűleg az összes lehetséges kezdeti állapotokkal rendelkező folyamatokat tekinteni, mert ezek a segítségül vett fiktív folyamatok jelentős könnyítést jelentenek problémáink megoldásánál.

A következő jelöléseket vezetjük be. Jelölje $F_{jk}(x)$ az egymást követő $E_j \rightarrow E_k$ átmenetek közötti távolságok eloszlásfüggvényét. Ha a rendszer a $t = 0$ időpontban E_i állapotban van, úgy jelölje $F_{ijk}(x)$ ezen feltétel mellett az első $E_j \rightarrow E_k$ átmenet előfordulási pontja és a $t = 0$ pont közötti távolság eloszlásfüggvényét. Jelölje továbbá $G_k(x)$ az egymást követő azon időpontok közötti távolságok eloszlásfüggvényét, amelyekben a rendszer éppen E_k állapotba kerül. Végül $G_{ik}(x)$ jelölje a kezdőpont és az első E_k állapotba jutás időpontja közötti távolság eloszlásfüggvényét, azon feltétel mellett, hogy a rendszer a $t = 0$ időpontban E_i állapotban van. Megjegyezzük, hogy nyilvánvalóan fennállnak az $F_{kjk}(x) = F_{jk}(x)$ és $G_{kk}(x) = G_k(x)$ azonosságok.

Ha a felsorolt eloszlásfüggvényeket ismernénk, a kérdéses valószínűségek meghatározása nem jelentene különösebb nehézséget, ugyanis ez csupán független valószínűségi változók összegei eloszlásának vizsgálatát kívánja meg. Ezekkel a kérdésekkel a következő fejezetben részletesebben fogunk foglalkozni.

A p_{jk} valószínűségek és az $F_k(x)$ eloszlásfüggvények ismeretében a fent felsorolt eloszlásfüggvények meghatározhatók ugyan, de ez elég hosszadalmas megfontolásokat igényel. Ezzel szemben a legtöbb ilyen probléma

olyan természetű, hogy bizonyos várható értékek meghatározása könnyen keresztülvihető. Az alábbiakban éppen azt mutatjuk be, hogy ezen várható értékek segítségével miképpen lehet a kérdéses eloszlásfüggvényeket meghatározni. Előrebocsátjuk, hogy a következő tárgyalás nem tételezi fel a p_{jk} valószínűségek ismeretét, sőt az eddigieknél általánosabban megengedhetjük, hogy a p_{jk} valószínűségek esetleg függhetnek az $E_j \rightarrow E_k$ átmenet előtt az E_j állapotban töltött időtartamtól.

Mindenekelőtt a következő mennyiségeket vezetjük be. Jelölje $m_{ijk}(t)$ a $(0, t)$ időintervallumban előforduló $E_j \rightarrow E_k$ átmenetek várható számát azon feltétel mellett, hogy a $t = 0$ időpontban E_i állapotban volt a rendszer. Ha speciálisan $i = k$, úgy legyen rövidség kedvéért: $m_{kjk}(t) = m_{jk}(t)$. Legyen továbbá $\tau_{ik}(t)$ az E_k állapotban való tartózkodás összidőtartamának várható értéke a $(0, t)$ intervallumban, azon feltétel mellett, hogy a rendszer a $t = 0$ időpontban E_i állapotban volt. Speciálisan a $k = i$ esetben legyen rövidség kedvéért $\tau_{ii}(t) = \tau_i(t)$. Végül $P_{ik}(t)$ jelentse annak a valószínűségét, hogy a rendszer a t időpontban E_k állapotban van, feltéve, hogy a $t = 0$ időpontban E_i állapotban volt. Ha speciálisan $k = i$, úgy legyen $P_{ii}(t) = P_i(t)$.

Könnyen belátható, hogy most fennállnak a következő összefüggések:

$$(1) \quad m_{ijk}(t) = F_{ijk}(t) + F_{ijk}(t) \times F_{jk}(t) + F_{ijk}(t) \times F_{jk}(t) \times F_{jk}(t) + \dots,$$

ahol a $\times$ jel a kompozíció jele. Továbbá

$$(2) \quad P_{ik}(t) = \sum_{j=1}^m \int_0^t [1 - F_k(t-u)] dm_{ijk}(u) + \delta_{ik} [1 - F_k(t)],$$

(ahol $\delta_{ik} = 0$, ha $i \neq k$ és $\delta_{kk} = 1$); valamint

$$(3) \quad \tau_{ik}(t) = \int_0^t P_{ik}(u) du.$$

Legtöbb gyakorlati feladatnál $m_{ijk}(t)$, $P_{ik}(t)$ és $\tau_{ik}(t)$ vagy legalábbis ezek közül bizonyosak könnyen meghatározhatók. Most ezek segítségével kívánjuk a szükséges, de egyelőre ismeretlen eloszlásfüggvényeket meghatározni. Evégett Laplace—Stieltjes transzformáltakra térünk át, mégpedig jelölje $F_k(x)$, $F_{jk}(x)$, $F_{ijk}(x)$, $G_k(x)$, $G_{ik}(x)$ transzformáltjait rendre $\varphi_k(s)$, $\varphi_{jk}(s)$, $\varphi_{ijk}(s)$, $\psi_k(s)$, $\psi_{ik}(s)$. Ha most az (1) és a (3) formulákban Laplace—Stieltjes-transzformációra térünk át, azt kapjuk, hogy

$$(4) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm_{ijk}(t) = \frac{\varphi_{ijk}(s)}{1 - \varphi_{jk}(s)},$$

$$(5) \quad \int_0^\infty e^{-st} d\tau_{ik}(t) = \frac{1 - \varphi_k(s)}{s} \left[\sum_{j=1}^m \frac{\varphi_{ijk}(s)}{1 - \varphi_{jk}(s)} + \delta_{ik} \right].$$

Az itt felírt egyenletek segítségével a $\varphi_k(s)$, $\varphi_{jk}(s)$ és $\varphi_{ijk}(s)$ mennyiségek könnyen meghatározhatók. Ha ugyanis (4)-ben az $i = k$ választással élünk, úgy $\varphi_{kjk}(s) = \varphi_{jk}(s)$ lévén, a $\varphi_{jk}(s)$ mennyiségek sorban meghatározhatók.

Ezek ismeretében azután (4) segítségével a $\varphi_{ijk}(s)$ mennyiségek is meghatározhatók. Végül (5) segítségével a $\varphi_k(s)$ mennyiségek is előállíthatók. A Laplace—Stieltjes transzformáltak ismeretében a megfelelő eloszlásfüggvények egyértelműen meghatározhatók.

Csupán $G_k(x)$ és $G_{ik}(x)$ eloszlásfüggvények meghatározása van még hátra. Ezek kiszámítására bevezetünk egy új függvényt. Jelölje folyamatunknál $M_{ik}(t)$ az E_k állapotba jutás időpontjainak várható számát a $(0, t)$ időintervallumban, azon feltétel mellett, hogy a kezdeti állapot E_i volt. Az $M_{ik}(t)$ várható értékek az $m_{ijk}(t)$ függvények segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

$$(6) \quad M_{ik}(t) = \sum_{j=1}^m m_{ijk}(t).$$

Az (1) előállításához hasonlóan pedig felírható, hogy

$$(7) \quad M_{ik}(t) = G_{ik}(t) + G_{ik}(t) * G_k(t) + G_{ik}(t) * G_k(t) * G_k(t) + \dots,$$

ami abból következik, hogy az első E_k -állapotba jutásig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye $G_{ik}(t)$, míg a szomszédos E_k állapotokba jutások között eltelt időtartamok eloszlásfüggvénye $G_k(x)$. (7)-ből Laplace—Stieltjes transzformációra áttérve azt kapjuk, hogy

$$(8) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dM_{ik}(t) = \frac{\psi_{ik}(s)}{1 - \psi_k(s)}.$$

Ha (8)-ban $i = k$, úgy $\psi_{ik}(s) = \psi_k(s)$ lévén, a $\psi_k(s)$ ismeretlenek sorban meghatározhatók és ezek ismeretében (8) segítségével azután a $\psi_{ik}(s)$ ismeretlenek is megkaphatók. A Laplace—Stieltjes transzformáltak megfordításával azután a $G_k(x)$ és $G_{ik}(x)$ eloszlásfüggvények egyértelműen meghatározhatók.

1. megjegyzés: Megemlítjük, hogy az (5) képletet a fentiekre való tekintettel a következő, vele ekvivalens alakban is felírhatjuk:

$$(9) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} d\tau_{ik}(t) = \frac{1 - \varphi_k(s)}{s} \left[\frac{\psi_{ik}(s)}{1 - \psi_k(s)} + \delta_{ik} \right].$$

2. megjegyzés: Az eddigiekben megengedtük, hogy a p_{jk} valószínűségek esetleg függhetnek attól az időtartamtól, amelyet a rendszer az $E_j \rightarrow E_k$ átmenet előtt az E_i állapotban tölt. Ha most speciálisan feltesszük, hogy a p_{jk} valószínűségek függetlenek ettől az időtartamtól, úgy felírható a következő összefüggés:

$$(10) \quad G_{ik}(x) = \sum_{j \neq k} p_{ij} \int_0^x G_{jk}(x-u) dF_i(u) + p_{ik} F_i(x);$$

innen Laplace—Stieltjes transzformációra áttérve a

$$(11) \quad \psi_{ik}(s) = \varphi_i(s) \left[\sum_{j \neq k} p_{ij} \psi_{jk}(s) + p_{ik} \right]$$

egyenletrendszeret nyerjük, ahonnan $\varphi_i(s)$ és p_{ij} ismeretében a $\psi_{ik}(s)$ transzformáltak meghatározhatók. Ez egy másik eljárást szolgáltat a $G_{ik}(x)$ illetve $G_k(x)$ eloszlásfüggvények meghatározására, amely azonban csak speciálisan alkalmazható és megkívánja a p_{jk} valószínűségek ismeretét is.

3. megjegyzés: A fenti folyamattal kapcsolatban célszerű még egy új eloszlásfüggvényt bevezetni, éspedig az $\bar{E}_k$ (az E_k -n kívüli) állapotokban töltött időtartamok eloszlásfüggvényét, amelyet jelöljön $H_k(x)$. (Ha a $t = 0$ időpontban E_i ($i \neq k$) állapotban volt a rendszer, úgy az első $\bar{E}_k$ állapotban töltött idő eloszlásfüggvénye $G_{ik}(x)$, míg az $i = k$ speciális esetben a $t = 0$ időpontban már E_k állapotban volt a rendszer és így ennek nincs szerepe.) Jelölje továbbá $H_k(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját $\chi_k(s)$.

$H_k(x)$ a következő összefüggésből határozható meg:

$$(12) \quad G_k(x) = \int_0^x H_k(x-y) dF_k(y);$$

innen Laplace-transzformációra áttérve a

$$\psi_k(s) = \chi_k(s) \varphi_k(s)$$

összefüggést nyerjük, ahonnan $\chi_k(s)$ kiszámítható és ennek megfordításával $H_k(x)$ egyértelműen meghatározható.

A fenti megfontolásokból látszik, hogy az $m_{ijk}(t)$ átlagfüggvények ismeretében a (4), (5) és (8) formulák segítségével az $F_{jk}(x)$, $F_{ijk}(x)$, $G_{jk}(x)$ és $G_k(x)$ eloszlásfüggvények sorban meghatározhatók. Az $F_i(x)$ eloszlásfüggvények kiszámításához azonban szükséges $\tau_{ik}(t)$ [vagy ami vele egyenértékű, $P_{ik}(t)$] ismerete, amikor is az (5) képlet alkalmazható. Természetesen a fenti formulák sokféle kombinációban is alkalmazhatók. A lényeg az, hogy $m_{ijk}(t)$ és $\tau_{ik}(t)$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, m$) ismeretében a kérdéses eloszlásfüggvények egyértelműen meghatározhatók. Ezek ismeretében a felvetett problémák megoldása már nem jelent különösebb nehézséget, ugyanis a független valószínűségi változók összegezésének szokásos eljárása egyszerűen célravezető.

Megjegyezzük még, hogy ha a tekintetbe vett folyamat Markov-féle, úgy a folyamat jellemzésére elegendő a $P_{ik}(t)$ valószínűségeket ismerni, ugyanis ekkor $P_{ik}(t)$ segítségével $\tau_{ik}(t)$ mellett az $m_{ijk}(t)$ várható értékek is könnyen meghatározhatók.

2. §. A kérdéses valószínűségek meghatározása

Vizsgáljuk először a rekurrens $\mathcal{L}$ események számának eloszlását. Ha folyamatunk kezdetben az E_i állapotban volt és a rekurrens $\mathcal{L}$ eseményeket az $E_j \rightarrow E_k$ átmenetek alkotják, úgy érvényes, hogy az első $\mathcal{L}$ esemény előfordulási pontja a kezdőpont közötti távolság eloszlásfüggvénye $F_{ijk}(x)$, míg a szomszédos $\mathcal{L}$ események közötti távolság eloszlásfüggvénye $F_{jk}(x)$. Megfontolásainkat végezzük el csupán arra a speciális esetre, midőn a kezdeti állapot E_k , vagyis amikor $F_{kjk}(x) = F_{jk}(x)$. Ekkor az egymást követő $\mathcal{L}$ események előfordulási pontjaira, a $\{t'_n\}$ sorozatra fennáll, hogy a $t'_n - t'_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$; $t'_0 = 0$) időkülönbségek egyforma eloszlású füg-

getlen pozitív valószínűségi változók. A következőkben egyszerűség kedvéért ezen változók közös eloszlásfüggvényét jelölje $F_{jk}(x)$ helyett $P(x)$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ intervallumban legfeljebb n -szer fordul elő az $\mathcal{L}$ rekurrens esemény,

$$(13) \quad W(t, n) = \mathbf{P}(t < t'_{n+1}) = 1 - \mathbf{P}(t'_{n+1} \leq t) = 1 - P_{n+1}(t),$$

ahol $P_0(t) = 1$, ha $t \geq 0$, és $P_0(t) = 0$, ha $t < 0$, továbbá $P_n(t)$ a $P(t)$ -nek önmagával való n -szeres kompozícióját jelöli.

Legyen most $m(t) = m_{kjk}(t)$ a $(0, t)$ intervallumban előforduló események várható száma, úgy erre fennáll,

$$(14) \quad m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t).$$

Az $(u, u+t)$ intervallumra vonatkozó megfelelő valószínűséget, azaz annak a valószínűségét, hogy ebben az intervallumban legfeljebb n -szer fordul elő az $\mathcal{L}$ esemény,

$$(15) \quad W_u(t, n) = 1 - P_u^*(t) \times P_n(t),$$

szolgáltatja, ahol

$$(16) \quad P_u^*(t) = \int_u^{u+t} [1 - F(u+t-x)] dm(x).$$

Ha $P(x)$ nem rácsos eloszlás és átlaga, μ véges, úgy fennáll (*D. Blackwell* [3], *J. L. Doob* [4]), hogy $\lim_{u \rightarrow \infty} P_u^*(t) = P^*(t)$, ahol

$$(17) \quad P^*(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - P(x)] dx,$$

és ekkor $\lim_{u \rightarrow \infty} W_u(t, n) = W^*(t, n)$, ahol

$$(18) \quad W^*(t, n) = 1 - P^*(t) \times P_n(t).$$

Ez szolgáltatja a stacionárius megoldást, vagyis végtelen hosszú ideje tartó folyamat esetén annak a valószínűségét, hogy t időtartam alatt az $\mathcal{L}$ esemény legfeljebb n -szer fordul elő.

A fenti $W^*(t, n)$ valószínűség-eloszlás olyan esetekben is létezik, midőn $P(x)$ rácsos eloszlás, ekkor azonban nem tekinthető $W_u(t, n)$ határértékének. Kérdés nem lehet-e ekkor is $W^*(t, n)$ -nek valamilyen értelmezést tulajdonítani. Most megmutatjuk, hogy a stacionárius $W^*(t, n)$ megoldásnak adható egy enyhébb értelmezése is, amely nem tesz kikötést $P(x)$ -re vonatkozóan. Ez a következő: Válasszunk a $(0, T)$ intervallumon egy egyenletes eloszlást mutató véletlen u pontot. Ettől a ponttól kezdve felmérjük

a t hosszúságú intervallumot és kérdezzük, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy ezen intervallumban legfeljebb n -szer fordul elő az $\mathcal{L}$ esemény. Ez a valószínűség

$$(19) \quad \bar{W}_T(t, n) = 1 - \bar{P}_T(t) * P_n(t),$$

ahol most

$$(20) \quad \bar{P}_T(t) = \int_0^t [1 - P(t-x)] \frac{m(T+x) - m(x)}{T} dx.$$

Ha $P(x)$ átlaga, μ véges, úgy most minden feltétel nélkül fennáll $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{P}_T(t) = P^*(t)$, azaz

$$(21) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{W}_T(t, n) = W^*(t, n),$$

ahol $W^*(t, n)$ -et (18) értelmezi. Ezen utóbbi megoldást is gyakran nevezzük stacionárius megoldásnak és számos fizikai problémánál tekintjük az egyensúlyi állapotra vonatkozó megoldásnak. Ennek előnye az, hogy olyan esetekben is létezik, midőn a szigorú értelemben vett stacionárius megoldás nem létezik.

A fenti tárgyalásnál feltételeztük, hogy a rendszer a $t = 0$ időpontban E_k állapotban van. Ha a $t = 0$ időpontban egyéb állapotban van a rendszer, úgy a fenti tárgyalás csupán nyilvánvaló módosítást kíván.

Ezután azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy az E_k állapotban töltött időtartam $(0, t)$ intervallumba eső összhossza milyen eloszlást követ. Jelölje $\Omega(t, z)$ annak a valószínűségét, hogy ez az összhossz legfeljebb z nagyságú. Most folyamatunkban célszerűen kétféle állapotot különböztethetünk meg: E_k állapotban vagy E_k állapoton kívül (röviden $\bar{E}_k$ állapotban) van a rendszer. Az egymást követő E_k állapotokban való tartózkodások időtartamának eloszlásfüggvénye $F_k(x)$, az első E_k állapotba jutás és a kezdőpont közötti távolság eloszlásfüggvénye $G_{ik}(x)$, ha kezdetben E_i állapotban van a rendszer. Az egymást követő $\bar{E}_k$ állapotokban töltött időtartamok eloszlásfüggvénye pedig $H_k(x)$. Legyen rövidség kedvéért most $F_k(x) = L(x)$ és $H_k(x) = H(x)$. Ha kezdetben a rendszer E_k állapotban van, úgy eszik az első $\bar{E}_k$ állapotban töltött időtartam szerepe, amelynek eloszlása különben $G_{ik}(x)$ lenne. Ennek figyelembevétele nem okoz különös gondot, most azonban egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a rendszer a $t = 0$ időpontban E_k állapotban van. Ekkor a keresett valószínűség:

$$(22) \quad \Omega(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t-z) [L_{n-1}(z) - L_n(z)]$$

és innen következik, hogy annak a valószínűsége, hogy a $(0, t)$ intervallumban az $\bar{E}_k$ állapotban töltött időtartam $\leq z$:

$$(23) \quad 1 - \Omega(t, t-z) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(t-z) [H_n(z) - H_{n+1}(z)].$$

Az $(u, u + t)$ intervallumra vonatkozó valószínűség hasonlóan határozható meg, vagy pedig visszavezethető $\Omega(t, z)$ ismeretére. A stacionárius megoldás hasonló tárgyalást kíván, mint az $\mathcal{L}$ esemény tárgyalásánál történt. (A fentiekkel kapcsolatban utalunk [5] dolgozatunkra, ahol $\Omega(t, z)$ meghatározásának módszerét ismertettük.)

3. §. Példák

1) Tegyük fel, hogy a rendszernél csupán $E_i \rightarrow E_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$) és $E_m \rightarrow E_1$ átmenetek lehetségesek. Ekkor, mint könnyen belátható, elegendő az $F_k(x)$ eloszlásfüggvények meghatározása, a többiek automatikusan adódnak. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a rendszer a $t = 0$ időpontban E_m állapotba került. Jelölje ekkor a $(0, t)$ intervallumban előforduló $E_i \rightarrow E_{i+1}$ átmenetek várható számát $m_i(t)$ [$= m_{m,i,i+1}(t)$] és az E_k állapotban töltött idő várható értékét $\vartheta_k(t)$ [$= \tau_{mk}(t)$]. Ekkor $F_k(x)$ Laplace — Stieltjes transzformáltja $\varphi_k(s)$. A $\varphi_k(s)$ ismeretlenek a (4) és (5) szerint fennálló következő egyenletekből határozhatók meg:

$$(24) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm_i(t) = \frac{\varphi_1(s) \varphi_2(s) \dots \varphi_i(s)}{1 - \varphi_1(s) \varphi_2(s) \dots \varphi_m(s)}, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

vagy

$$(25) \quad \int_0^\infty e^{-st} d\vartheta_i(t) = \frac{1 - \varphi_i(s)}{s} \left[\frac{\varphi_1(s) \varphi_2(s) \dots \varphi_{i-1}(s)}{1 - \varphi_1(s) \varphi_2(s) \dots \varphi_m(s)} + \delta_{im} \right], \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ahol itt $\varphi_0(s) = \varphi_m(s)$ értendő.

A (24) és (25) egyenletek nemcsak külön-külön, hanem kombinálva is alkalmazhatók az ismeretlenek meghatározására. Az [1] és [2] dolgozatban tárgyalt példák ennek azt a speciális esetét képezték, midőn $m = 2$ volt, és $F_1(x)$ exponenciális eloszlást írt le.

2) Tekintsünk m számú homogén Poisson-folyamatot, melyek mindegyikében p az eseményűrűség. Tegyük fel, hogy minden egyes folyamatban a $0 \leq t < \infty$ időpontokban bekövetkező mindazon események elindítanak egy-egy exponenciális időtartamú történést, mégpedig mindegyik folyamatban α időtartamú átlagértékkel, amelyek olyankor fordulnak elő, midőn az illető folyamatban éppen nem folyik történést. Az olyan események, amelyek egy történést folyama alatt fordulnak elő, hatástalanok. Azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban E_i állapotban van, ha az m számú folyamat közül t időpontban i folyamatban folyik történést és $(m-i)$ -ben nem. Ekkor ennél a rendszernél csak $E_i \rightarrow E_{i+1}$ és $E_i \rightarrow E_{i-1}$ típusú átmenetek fordulhatnak elő. Meg akarjuk határozni annak a valószínűségét, hogy $(0, t)$ időintervallumban előforduló $E_i \rightarrow E_{i+1}$ vagy $E_{i+1} \rightarrow E_i$ átmenetek száma legfeljebb n legyen, vagy hogy $(0, t)$ időintervallumban az E_k állapotban töltött összidőtartam legfeljebb z legyen. Mint már az általános tárgyalásban is említettük, a speciálisan vizsgált folyamatunk mellett, amelynek kezdeti állapota E_0 , célszerű olyan segédfolyamatokat is tekinteni, amelyeknél a

kezdőállapot rendre $E_1, E_2, \dots, E_m$. Megjegyezzük, hogy az itt vizsgált folyamatok a folyamatosan változó időben Markov-félék, sőt, könnyen kimutatható, hogy csakis abban az esetben Markov-félék, ha a történések időtartamai exponenciális eloszlásúak.

A fenti példával kapcsolatban gondolhatunk m számú Geiger—Müller számlálóval történő részecskeszámlálásra. Ekkor p jelenti az egyes számlálókhoz érkező részecskék eseménysűrűségét, a a kisülések átlagos hosszát és az $E_i \rightarrow E_{i+1}$ átmenetek alkotják az $(i+1)$ -szeres koincidenciákat. Az alábbi eredmények segítségével megoldhatjuk azt a feladatot, hogy mennyi lesz bizonyos idő alatt észlelt koincidenciák számának eloszlása. Egy másik példát energiaszolgáltatókkal kapcsolatban említünk meg. Tegyük fel, hogy egy üzemben m gép működik. Mindegyik gép szakaszosan működik, és pedig a működési sűrűség p , és egy működési szakasz átlagos hossza a . Ekkor E_k állapot jelöli azt, hogy egyidejűleg k gép működik.

Az alábbi eredmények segítségével megállapítható például, hogy bizonyos idő alatt k (vagy annál több) egyidejű fogyasztás időtartama milyen eloszlást követ, és ennek ismeretében megállapítható az energiaszolgáltató gazdaságos méretezése.

Jelölje most $P_{ij}(t)$ annak a valószínűségét, hogy ha kezdetben a rendszer E_i állapotban volt, úgy t időpontban E_j állapotban lesz. Azt állítjuk, hogy a $P_{ij}(t)$ mennyiségek ismerete elegendő folyamatunk jellemző adatainak meghatározására. Erre nézve előző fejtegetéseinkre való hivatkozással elegendő kimutatni, hogy az $m_{ijk}(t)$ átlagfüggvények kifejezhetők a $P_{ij}(t)$ valószínűségek segítségével. Ez pedig így is van, ugyanis egyszerűen belátható, hogy fennállnak a következő összefüggések:

$$(26) \quad m'_{i,j,j+1}(t) = p(m-j)P_{ij}(t)$$

és

$$(27) \quad m'_{i,j,j}(t) = \frac{j}{a}P_{ij}(t).$$

Így tehát csak $P_{ij}(t)$ meghatározása marad hátra. Erre nézve vezessünk be két újabb valószínűséget. $Q_0(t)$ jelentse annak a valószínűségét, hogy az m folyamat közül egy kiszemeltben t időpontban folyamatban van egy történet, feltéve, hogy $t=0$ időpontban nem volt folyamatban történet és $Q_1(t)$ jelentse ugyanezen valószínűséget, azon feltétel mellett, hogy $t=0$ időpontban folyamatban van egy történet. Ezen valószínűségekre könnyen beláthatóan fennáll, hogy

$$(28) \quad Q_0(t) = \frac{ap}{1+ap} \left(1 - e^{-\frac{1+ap}{a}t} \right),$$

ami könnyen nyerhető a

$$Q_0(t + \Delta t) = Q_0(t) \left(1 - \frac{\Delta t}{a} \right) + [1 - Q_0(t)] p \Delta t + o(\Delta t)$$

reláció tekintetbevételével. Ugyanis innen $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenettel

$$Q_0'(t) + \frac{1+ap}{a} Q_0(t) = p$$

differenciálegyenletet nyerjük, amelynek megoldása $Q_0(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett (28). Hasonló megfontolással kapjuk, hogy

$$(29) \quad Q_1(t) = \frac{ap}{1+ap} + \frac{1}{1+ap} e^{-\frac{1+ap}{a}t}.$$

(28) és (29) segítségével azt kapjuk, hogy

$$(30) \quad P_{ij}(t) = \sum_k \binom{i}{k} \binom{m-i}{j-k} [Q_0(t)]^k [Q_1(t)]^{j-k} [1-Q_0(t)]^{i-k} [1-Q_1(t)]^{m-i-j+k},$$

amelynek fennállása egyszerű megfontolással igazolható. A (30) képlet ismeretében az általános tárgyalás most már alkalmazható. Megjegyezzük még, hogy esetünkben a p_{jk} valószínűségek függetlenek az E_j állapotokban töltött időtartamoktól, és pedig

$$p_{j,j+1} = \frac{ap(m-j)}{j+ap(m-j)}, \quad p_{j,j-1} = \frac{j}{j+ap(m-j)},$$

egyébként pedig $p_{jk}=0$. Továbbá könnyen belátható, hogy

$$F_j(x) = 1 - e^{-\frac{j+ap(m-j)}{a}x},$$

ha $x \geq 0$. Így a (11) képlet is alkalmazható a $G_{ik}(x)$ eloszlásfüggvények meghatározására.

A továbbiakban egyszerűség kedvéért szorítkozunk $m=2$ esetre és az $E_1 \rightarrow E_2$ átmenetek tanulmányozására. Jelölje az egymást követő $E_1 \rightarrow E_2$ átmenetek közötti távolság eloszlásfüggvényét $F_{12}(x)$ és Laplace–Stieltjes transzformáltját $\varphi_{12}(s)$. Ekkor (4) szerint, azt $m_{212}(t)$ -re alkalmazva, és tekintetbevé (26)-ot; amely szerint $m'_{212}(t) = pP_{21}(t)$, azt kapjuk, hogy

$$(31) \quad p \int_0^\infty e^{-st} P_{21}(t) dt = \frac{\varphi_{12}(s)}{1 - \varphi_{12}(s)},$$

ahonnan $\varphi_{12}(s)$ meghatározható; ugyanis

$$(32) \quad P_{21}(t) = 2 Q_1(t) [1 - Q_1(t)].$$

Ha a kezdőpont és az első $E_1 \rightarrow E_2$ átmenet távolságának eloszlás-függvénye $F_{012}(x)$ és Laplace–Stieltjes transzformáltja $\varphi_{012}(s)$, úgy (4) szerint, tekintetbevé, hogy $m'_{012}(t) = pP_{01}(t)$ azt kapjuk, hogy

$$(33) \quad p \int_0^\infty e^{-st} P_{01}(t) dt = \frac{\varphi_{012}(s)}{1 - \varphi_{12}(s)}.$$

Ha már $\varphi_{12}(s)$ -et ismerjük, úgy innen $\varphi_{012}(s)$ is meghatározható, ugyanis

$$(34) \quad P_{01}(t) = 2Q_0(t) [1 - Q_0(t)].$$

Ha a folyamat kezdeti állapota E_2 , úgy az $E_1 \rightarrow E_2$ átmenetek eloszlásának meghatározására elegendő $\varphi_{12}(s)$ ismerete. Erre (31) és (32) alapján az adódik, hogy

$$(35) \quad \varphi_{12}(s) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2ap}{(1+ap)^2} \left[\frac{p}{s} + \frac{1-ap}{as+1+ap} - \frac{1}{as+2(1+ap)} \right]}.$$

Innen speciálisan $F_{12}(x)$ átlaga

$$(36) \quad \mu_{12} = \int_0^{\infty} x dF_{12}(x) = \frac{(1+ap)^2}{2ap^2}$$

és szórásnégyzete

$$(37) \quad \sigma_{12}^2 = \int_0^{\infty} (x - \mu_{12})^2 dF_{12}(x) = \frac{(1+ap)[(1+ap)^3 + 2ap(1-2ap)]}{4a^2p^4}.$$

Ezen kifejezések segítségével a kettős koincidenenciák eloszlására már elég jó becslések adhatók. Nevezetesen a t idő alatt észlelt kettős koincidenenciák száma aszimptotikusan normális eloszlást követ t/μ_{12} átlaggal és $\sigma_{12}^2 t/\mu_{12}^3$ szórásnégyzettel.

3) Tekintsünk most egy λ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot. Tegyük fel, hogy a $0 \leq t < \infty$ időintervallumban előforduló valamennyi esemény létrehoz egy-egy történést. Feltesszük, hogy az egyes történések időtartamai egymástól függetlenek és mindegyik exponenciális eloszlást követ a átlaggal. Azt mondjuk, hogy a rendszer a t időpontban E_k állapotban van, ha az éppen folyó történések száma k ($k = 0, 1, 2, \dots$ lehet).

Észrevesszük, hogy az így definiált folyamat Markov-féle, ha a folyamatosan változó időben tekintjük és megjegyezzük, hogy csakis akkor Markov-féle, ha a történések exponenciális eloszlásúak. Erre a folyamatra példaképpen lehet említeni telefonközpontokba érkező hívások folyamatát. Ha λ jelöli a hívások sűrűségét, a a beszélgetések időtartamának átlagát, úgy a rendszer E_k állapotban van, ha egyidejűleg k vonalon történik beszélgetés. Az alábbi eredmények segítségével meghatározható például annak a foglaltsági időnek az eloszlása, amely alatt k (vagy annál több) beszélgetés folyik. Ezen eloszlás ismeretében a telefonközpont méretezésére vonatkozóan állapíthatunk meg fontos adatokat.

Ebben a folyamatban csupán $E_k \rightarrow E_{k+1}$ és $E_k \rightarrow E_{k-1}$ átmenetek fordulhatnak elő. Célszerű most is bevezetni a vizsgált folyamat mellett olyan fiktív folyamatokat, amelyeknél a kezdeti állapot E_0 mellett rendre $E_1, E_2, \dots$. Jelölje $P_{ik}(t)$ annak a valószínűségét, hogy t időpontban E_k állapot van egy olyan folyamatnál, amelynél a rendszer kezdeti állapota E_i .

Azt állítjuk, hogy a $P_{ik}(t)$ mennyiségek ismerete elegendő a felmerülő valószínűségeloszlások meghatározására. Erre elegendő megmutatni, hogy az $m_{ijk}(t)$ átlagfüggvények kifejezhetők a $P_{ik}(t)$ valószínűségek segítségével. Ez pedig igaz, ugyanis könnyen beláthatóan fennáll

$$(38) \quad m'_{i,j,j+1}(t) = \lambda P_{ij}(t)$$

és

$$(39) \quad m'_{i,j,j+1}(t) = \frac{j}{\alpha} P_{ij}(t).$$

Így tehát elegendő $P_{ij}(t)$ meghatározása. Erre nézve fennáll, hogy

$$(40) \quad P_{ij}(t) = \sum_{k=i-j}^i \frac{e^{-\lambda \int_0^t [1-H(u)] du} \left\{ \lambda \int_0^t [1-H(u)] du \right\}^{j-k}}{(j-k)!} \binom{i}{k} [H(t)]^k [1-H(t)]^{i-k},$$

- ahol $H(t) = 1 - e^{-t/\alpha}$, ha $t \geq 0$. (40) fennállása könnyen indokolható azon tény segítségével, hogy ha tudjuk, hogy a Poisson-folyamatban $(0, t)$ időközben pontosan n esemény fordult elő, akkor ezen feltétel mellett az n számú előfordulási pont eloszlása megegyezik ezen az intervallumon n számú egyenletes eloszlású független véletlen pont együttes eloszlásával. $P_{ij}(t)$ (40) alakjának egy másik indokolása Rényi A. [6] munkájában közölt eredményekből nyerhető. A $P_{ij}(t)$ valószínűségek ismeretében általános tárgyalásunk már alkalmazható.

Megjegyezzük, hogy a fent tárgyalt folyamatnál a p_{jk} valószínűségek függetlenek az E_j állapotokban töltött időtartamoktól, és pedig könnyen beláthatóan fennáll, hogy $p_{j,j+1} = \lambda \alpha / (j + \lambda \alpha)$, $p_{j,j-1} = j / (j + \lambda \alpha)$, és

egyébként $p_{jk} = 0$. Továbbá most $F_j(x) = 1 - e^{-\frac{1+\lambda\alpha}{\alpha}x}$, ha $x \geq 0$. Így a (11) képlet is alkalmazható a $G_{ik}(x)$ eloszlásfüggvények meghatározására.

Ha speciálisan csak az $E_i \rightarrow E_{i+1}$ átmenetek közötti távolságok eloszlásfüggvénye, $F_{i,i+1}(x)$ érdekel bennünket, úgy ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja, $\varphi_{i,i+1}(s)$, a (4)-ből kapható, ha $m_{i+1,i,i+1}(t)$ választással élünk és (38)-at tekintetbe vesszük. Ekkor ugyanis fennáll

$$(41) \quad \lambda \int_0^\infty e^{-st} P_{i+1,i}(t) dt = \frac{\varphi_{i,i+1}(s)}{1 - \varphi_{i,i+1}(s)},$$

ahonnan $\varphi_{i,i+1}(s)$ meghatározható. Ennek ismeretében az $E_i \rightarrow E_{i+1}$ átmenetek számának eloszlása már meghatározható. A $P_{ik}(t)$ valószínűségek ismeretében az összes többi felmerülő probléma is megoldható.

A fenti példák mindegyikében a kérdéses eloszlások Laplace—Stieltjes transzformáltjait határoztuk meg, amelyek visszatranszformálása sokszor nem könnyű feladat. Azonban ennek a tárgyalásnak van egy jó oldala is, és pedig a Laplace-transzformáltak ismeretében a kérdéses eloszlások átlagai, szórásai és magasabb momentumai könnyen meghatározhatók és ezek segítségével az aszimptotikus eloszlások is felírhatók. Nevezetesen enyhe feltételek mellett érvényes, hogy a rekurrens $\mathcal{E}$ esemény előfordulásainak száma aszimptotikusan normális eloszlást követ.

IRODALOM

- [1] TAKÁCS L.: »Poisson-folyamat által származtatott történésfolyamatokról.« *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 4 (1954) 525—541.
- [2] TAKÁCS L.: »Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 135—151.
- [3] D. BLACKWELL: »A renewal theorem.« *Duke Mathematical Journal* 15 (1948) 145—150.
- [4] J. L. DOOB: »Renewal theory from the point of view of the theory of probability.« *Transactions of the American Mathematical Society* 63 (1948) 422—438.
- [5] L. TAKÁCS: »Occurrence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 2 (1951) 275—298.
- [6] A. RÉNYI: »On some problems concerning Poisson processes.« *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 2 (1951) 66—73.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ РЕКУРРЕНТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Л. Такач

Резюме

Рассмотрим стохастический процесс с возможными состояниями: $E_1, E_2, \dots, E_m$ (где m конечно или бесконечное число). Предположим, что система изменяет свое состояние только в моментах времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), где последовательность $\{t_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $t_0 = 0$; то есть в момент $t = 0$ происходит переход.
 б) Разности $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) не зависимые положительные случайные величины.

в) Распределение случайной величины $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) зависит только от состояния, в которое система переходит в момент $t = t_{n-1}$. Если в момент $t = t_{n-1}$ система попадает в состояние E_k , то обозначим функцию распределения $t_n - t_{n-1}$ через $F_k(x)$, ($k = 1, 2, \dots, m$).

Пусть далее $t = 0$ исходное положение, соответствующее моменту E_i . Обозначим через $m_{ijk}(t)$ математическое ожидание для числа переходов $(0, t)$ в интервале времени $E_j \rightarrow E_k$ и через $\tau_{ik}(t)$ ожидание для времени проведенного в состоянии $(0, t)$ в интервале времени E_k . Пусть далее $P_{ik}(t)$ вероятность того, что система находится в момент t в состоянии E_k , если только в момент $t = 0$ она находится в состоянии E_i .

Наша задача — определить распределение числа переходов $E_j \rightarrow E_k$, происходящих в течение времени t , также как и функцию распределения времени, проведенного в этом состоянии.

Если известны перечисленные ниже функции распределения, то искомые вероятности легко определить при помощи методов исследования сумм независимых случайных величин. (Это излагается в § 2). Необходимые функции распределения следующие: Пусть $F_{jk}(t)$ обозначает функцию распределения расстояний между последовательными переходами $E_j \rightarrow E_k$.

Пусть $F_{ijk}(x)$ обозначает функцию распределения между начальной точкой и первым переходом $E_j \rightarrow E_k$, предполагая, что при $t = 0$ система находится в состоянии E_i . Обозначим далее через $G_k(x)$ функцию распределения расстояния между моментами времени, в которых система попадает в состояние E_k . Обозначим наконец через $G_{ik}(x)$ функцию распределения расстояния между начальной точкой и первым попадением в состояние E_k , при условии, что в момент $t = 0$ система находится в состоянии E_i .

В последующем, однако, предположим известным лишь средние функции $m_{ijk}(t)$ и $\tau_{ik}(t)$, которые для ряда проблем определяют непосредственно. Если теперь рассматривать одновременно все процессы с исходными состояниями $E_1, E_2, \dots, E_m$, то преобразованные Лапласа-Стильтьеса $\varphi_k(s)$, $\varphi_{ijk}(s)$, $\psi_k(s)$, $\psi_{ik}(s)$ функций распределения $F_k(x)$, $F_{jk}(x)$, $F_{ijk}(x)$, $G_k(x)$, $G_{ik}(x)$ можно вычислять при помощи формул (4), (5) и (8), а их обращением можно однозначно определить функции распределения.

Для вышеописанного процесса моменты времени t_n образуют моменты восстановления процесса, чем дается возможность для применения нашей методики, исходной точкой которой являются предположенные известными средние функции. Если сверх этого рассматриваемый процесс является и марковским, то достаточно знать вероятности $P_{ik}(t)$; исходя из этих вероятностей, можно дать ответ на все возникающие вопросы. В заключение рассматриваются некоторые проблемы совпадения счета частиц.

SOME INVESTIGATIONS CONCERNING RECURRENT STOCHASTIC PROCESSES OF A CERTAIN TYPE

L. TAKÁCS

Summary

Let us consider a stochastic process, the possible states of which are $E_1, E_2, \dots, E_m$ (the number of states may be finite or denumerably infinite). Suppose that the system changes its state only in the moments t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), and that the sequence $\{t_n\}$ satisfies the following conditions:

- a) $t_0 = 0$ i. e. in the moment $t = 0$ there occurs a transition.
- b) The time differences $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) are mutually independent positive random variables.
- c) The distribution of the random variable $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) depends only on the state of the system in the moment $t = t_{n-1}$. If in the moment $t = t_{n-1}$ the system is in the state E_k , then, under this condition, let the distribution function of $t_n - t_{n-1}$ be denoted by $F_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Let us suppose that the system is at the moment $t = 0$ in the state E_i . Denote by $m_{ijk}(t)$ the expected number of transitions $E_j \rightarrow E_k$ occurring in the time interval $(0, t)$ and denote by $\tau_{ik}(t)$ the expectation of the duration spent by the system in the state E_k during the time-interval $(0, t)$. Let us denote by $P_{ik}(t)$ the probability that in the moment t the system is in the state E_k , under the condition that in the moment $t = 0$ it was in the state E_i .

Our task will be to determine the distribution of the number of the $E_j \rightarrow E_k$ transitions occurring in a time interval of length t , further, to determine the distribution function of the time spent in the state E_k , during the same time interval.

In § 2 it is shown that the probabilities in question may be easily determined, if the following distribution functions are known:

- 1° $F_{jk}(x)$, the distribution function of the distances between the consecutive $E_j \rightarrow E_k$ transitions.
- 2° $F_{ijk}(x)$ the distribution function of the distances between the origin and the first $E_j \rightarrow E_k$ transition, under the condition that, in the moment $t = 0$, the system is in the state E_i .
- 3° $G_k(x)$ the distribution function of the distances between those consecutive moments in which the system changes to the state E_k .
- 4° $G_{ik}(x)$ the distribution function of the distance between the origin and the moment of the system getting the first time into the state E_k , under the condition that in the moment $t = 0$ the system was in the state E_i .

In the sequel, however, we only assume the knowledge of the average functions $m_{ijk}(t)$ and $\tau_{ik}(t)$, which can be immediately determined in many applications. If we consider simultaneously all processes having the initial states $E_1, E_2, \dots, E_m$, then, by the aid of formulas (4), (5) and (8), the Laplace—Stieltjes transforms $\varphi_k(s)$, $\varphi_{jk}(s)$, $\varphi_{ijk}(s)$, $\psi_k(s)$, $\psi_{ik}(s)$ of the distribution functions $F_k(x)$, $F_{ik}(x)$, $F_{ijk}(x)$, $G_k(x)$, $G_{ik}(x)$ can be calculated and, by inverting them, the distribution functions may be uniquely determined.

In the above process the moments t_n form the regeneration points of the process. This fact makes possible the above treatment which starts from the knowledge of the average functions. If the investigated process is a Markov-process (i. e. if the variables $t_n - t_{n-1}$ have exponential distributions) then it suffices to know only the probabilities $P_{ik}(t)$, by the aid of which all the problems in question can be answered.

Finally a few applications of the results in the field of coincidence problems concerning particle counting are dealt with.