

## SZORZATINTEGRÁLÁS, FOURIER-SZINTÉZIS ÉS HASONLÓ FELADATOK ELVÉGZÉSE KVADRÁTPLANIMÉTER ÉS EGY ÚJ KÉSZÜLÉK KOMBINÁCIÓJÁNAK SEGÍTSÉGÉVEL

MEDGYESSY PÁL

Alkalmazott matematikai vizsgálatokban sűrűn szerepel két, grafikonjával megadott függvény szorzata integráljának gépi kiszámítása, valamint speciális függvények lineáris kifejezéseinek előállítása.

Az első célra szolgálnak a különböző folytonosan dolgozó Stieltjes- és szorzat-integrátorok mechanikus (lásd például: [1], p. 206.) vagy elektromos kivitelben (lásd például: [2] és [3]), a másodikra pedig a függvény-szintetizátorok, melyek közül a Fourier-szintetizátorok a legismertebbek (lásd például: [4]). — A szorzat-integrátorok legfőbb hátrányai: a nem teljesen automatikusak két kezelőt kívánnak, vagy pedig mechanikailag erősen igénybevett sablonokkal dolgoznak, ami alkalmazásuk lehetőségeit is korlátozza, — az elektromosak költségeit és hibáit pedig nagyon megnövelik a fotocellával dolgozó, grafikonokat »letapogató« és egyéb bonyolult berendezések.

A Fourier-szintetizátorokat a fogaskerekek vagy (elektromosoknál) a fotocellák stb. teszik bonyolulttá és költségessé.

Éppen ezért egy idő óta azzal a problémával foglalkozunk, hogyan lehetne elvégezni grafikusán megadott függvények szorzatának integrálását — illetve szintézisét — gépi úton, de az említett hibák kiküszöbölésével.

Tapasztalat szerint a mechanikus megoldások a pontosabbak, így vizsgálataink erre a területre szorítkoztak, bármennyire elegánsak is az elektromos megoldások. Vezető szempont volt természetesen, hogy készülék-terveink a Stieltjes-planimétereknél, illetve Fourier-szintetizátoroknál költségesebbek ne legyenek, emellett működésük se legyen sokkal lassúbb amazokénál. Mindkét problémánkra egy megoldást korábbi dolgozatunkban [5] már közöltünk; ennek azonban több hátránya volt: 1° A készülék főcéljához a Fourier- stb. szintézishez alkalmazkodó alkatrészekkel dolgozott, amelyek két függvény szorzata grafikonjának előállításához nem voltak mind okvetlenül szükségesek. 2° Az eljárásához ott egyetlen kezelő kellett ugyan, de ennek három görbét kellett egy leolvasó-mikroszkóp látóterében metszésben tartani, ami az összegezés szempontjából elengedhetetlen, a szorzás szempontjából felesleges — főleg pedig fárasztó volt.

Egyszerűbb megoldást kerestünk tehát, melynél kívánatosnak tartottuk, hogy a szorzatintegrálás elvégzéséhez ne külön készüléket tervezzünk, hanem valamilyen segédberendezést, amelyet valamilyen egyszerűbb és

általánosan használt matematikai géppel kombinálva a szorzatintegrálást nagyjából épp annyi idő alatt elvégezhetjük, mint pl. Stieltjes-planiméterrel.

*Vizsgálataink eredménye az alább leírt egyszerű segédkészülék. Ha ezt úgynevezett kvadrátplaniméterrel (lásd például : [1], p. 198) kombináljuk, segítségével megállapítható két, papírra rajzolt függvény szorzatának integrálja ; egymagában pedig Fourier- és egyéb szintézis grafikus elvégzésére használható fel. Egyetlen kezelőt kíván, mechanikusan igénybevett sablont vagy különleges optikai alkatrészeket nem tartalmaz. Elkészítése egyszerű, kezelése könnyebb, mint már említett készülékünké.*

A működési elv ismertetésénél nézzük először a szorzatintegrálást. Abból indulunk ki, hogy kvadrátplaniméterrel egy  $(a, b)$  intervallumon megadott  $\varphi(x)$  függvény grafikonjából

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx$$

értékét határozhatjuk meg. Legyen a két összeszorzandó függvény  $f(x)$  és  $g(x)$  (mindkettő az  $(a, b)$  intervallumon értelmezve). Képezzük valamilyen módon a  $h(x) = f(x) + g(x)$  függvényt, és kvadrátplaniméterrel határozzuk meg a következő értékeket :

$$(1) \quad \int_a^b [h(x)]^2 dx = T_1,$$

$$(2) \quad \int_a^b [f(x)]^2 dx = T_2, \quad \int_a^b [g(x)]^2 dx = T_3.$$

Nyilván

$$(3) \quad T = \int_a^b f(x) g(x) dx = \frac{1}{2} (T_1 - T_2 - T_3).$$

Az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvények grafikonja adott, és így a kvadrátplaniméterrel azonnal körüljárható. Az  $f(x) + g(x)$  függvényt azonban elő kell állítani. A grafikus összeadás pontatlan és hosszadalmas ; helyette alkalmazzuk segédkészülékünket, amelynek elve a következő (lásd az 1. ábra szaggatott vonal alatti részét!):

Az alulról megvilágított 1 üveglap felett (vonalkázva) a 2 hüvelyekben jobbra-balra mozoghat a 3 keret. 3-ra merőlegesen, a 4 hüvelyekben mozog az  $AM$  rúd. E rúd közepéhez csatlakozik az 5 átlátszó vonalzó. Az ebbe karcolt  $e$  egyenes merőleges az  $AM$  rúdra. Az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvényeket azonos léptékben pauszpapírra rajzoljuk az ábrán feltüntetett koordináta-rendszerekben (vagyis az  $y$ -tengelyek szembenéznek). A  $g(x)$  függvény papírját alkalmas módon a 3-ra feszítjük,  $f(x)$  rajzát pedig 1-en rögzítjük, úgy hogy a két ábra origói és  $x$ -tengelyei 3 elcsúsztatásával pontosan fedésbe legyenek hozhatók [ $f(x)$ ,  $g(x)$  papírja és 5 teljesen egymáson fekszenek].

Most 5-öt az  $AM$  rúdon elhelyezett fogantyúval megfogva,  $AM$ -et és 3-at úgy mozgatjuk, hogy  $e$  és  $g(x)$  metszéspontja végighaladjon  $f(x)$  görbén, végül vissza az  $x$ -tengelyen az origóig. Azonnal látható, hogy ekkor



pillanatra hátrányosnak látszik, hogy  $f(x)$ -et és  $g(x)$ -et is végig kell planimetrálni, ha azonban — s ez a leggyakoribb — ortogonális függvényrendszer szerinti sorfejtés együtthatóit megadó szorzatintegrálokat kell meghatározni, az ortogonális függvényeket  $[g(x)]$  egyszersmindenkorra megrajzolhatjuk, négyzetük integrálját megállapíthatjuk; — a »sorfejtés« közben ez külön munkát nem fog jelenteni. Világos, hogy  $f(x)$  négyzetének integrálját sorfejtésnél egyetlen egyszer kell meghatározni — így tehát alig lesz többletmunka a szabványos szorzatintegrátorok használatához viszonyítva.

Megszerkeszthető a készülék úgy is, hogy képezi a négyzetet is és akkor közönséges planimétert kell hozzákapcsolni. Mivel az itt szükséges mechanikai konstrukciók jól ismertek, részletekre nem térünk ki (tulajdonképp a kvadrátplaniméter szerkezetét kellene újból megépítenünk).

A készülék hátránya, hogy egyforma léptékben megrajzolt görbéket kíván; a szükséges átrajzolást azonban affinográffal gyorsan és pontosan elvégezhetjük. A legtöbb eddigi készüléknél sem jobb a helyzet.

Térjünk most rá a szintézisre.

Láttuk, hogy a segédkészülék  $M$  pontja a  $\pm f(x) \pm g(x)$  függvény grafikonját írja le; így tehát — az abszcissa-tengelyeket megfelelően rögzítve — az  $M$ -be helyezett irón alája helyezett pausz-papíron megrajzolja  $\pm f(x) \pm g(x)$  grafikonját. A készülék tehát alkalmas különböző függvények grafikus összeadására és kivonására.

A hozzáadandó függvényt azonban — eddig ismertett konstrukciójában — nem szorozza egy konstanssal, mint [5] alatti gépünk.

Segédkészülékünk kiegészítésével azonban könnyen elérhető, hogy ne a  $\pm f(x) \pm g(x)$  függvényt, hanem a  $k [\pm f(x) \pm g(x)]$  függvényt rajzolja fel ( $k$  konstans). Mielőtt a részletezésre térnénk, kimutatjuk, hogy  $f(x)$  és  $g(x)$  görbéjéből a  $k [\pm f(x) \pm g(x)]$  függvény grafikonját megrajzoló készülék segítségével — több lépésben — meg tudjuk rajzolni tetszőleges

$$F(x) = \sum_{r=1}^N A_r \cdot \Phi_r(x)$$

alakú függvény grafikonját, ahol a  $\Phi_r(x)$  függvények görbéi ugyanazon intervallumon, egyforma léptékben megrajzolva rendelkezésre állnak, az  $A_r$  értékek pedig megadott konstansok. Megrajzolhatjuk tehát harmonikus vagy más ortogonális függvényrendszer tagjainak lineáris kifejezését is (Fourier-, Hermite- stb. szintézis).

Az eljárás alapja a következő azonosság:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \sum_{r=1}^N A_r \cdot \Phi_r(x) \equiv \\ \left\{ \begin{array}{l} A_N \\ A_N \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} A_{N-1} \\ A_N \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} A_3 \\ A_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} A_2 \\ A_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \end{array} \right\} \Phi_1 - \Phi_2 \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} \Phi_3 \left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right\} \Phi_N \end{array} \right.$$

Ennek segítségével  $F(x)$ -et így állítjuk elő:  $f(x)$ -ként  $\Phi_1$ -et,  $g(x)$ -ként az azonosan 0 függvényt vesszük, és a készülékkel megrajzoltatjuk  $\frac{A_1}{A_2} \Phi_1$  görbét (vagyis a  $k = \frac{A_1}{A_2}$  értéket állítatjuk be). Most az  $\frac{A_1}{A_2} \Phi_1$  és  $\Phi_2$  görbék segítségével, a  $k = \frac{A_2}{A_3}$  érték beállításával, megrajzoltatjuk

$$\frac{A_2}{A_3} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \Phi_1 + \Phi_2 \right\}$$

görbét, és így tovább, lépésről lépésre. Látjuk, hogy az említett identitás folytán végül  $F(x)$ -et rajzolja fel a gép. Az utolsó szorzótényező  $A_N$ ; ezt 1-nek is vehetjük, ha csak az eredő lefutása érdekes, és nem az egyes ordináta-értékek (ez a leggyakoribb; legrosszabb esetben a végeredményt felnagyítjuk).

A  $k$ -val való szorzást többféle kiegészítő berendezéssel is elérhetjük. Ezek közül egyet az 1. ábra szaggatott vonal feletti része mutat: A 3 kerettel párhuzamosan a 6 jobbra-balra guruló asztalka van 1-en elhelyezve.  $M$  írónja a 6-on rögzített pausz-papírhoz nyomódik. 3-nak  $B$  pontjából indul ki az  $r$  rúd; felső vége az  $E$  körül forgó 9 hüvelyen megy át. 6 bal széléből  $b$ -n rögzíthetően fel-le tolható,  $b$ -re merőleges 7 rúd vezet ki. Vége  $F$ -nél az  $r$ -en csúszó 8 hüvelyhez kapcsolódik. Legyen a készülékbe helyezve  $+f(x)$  és  $+g(x)$ . A készülék működésbe hozásakor  $f(x)$  és  $g(x)$   $x$ -tengelyei egybeesnek.  $r$  ekkor  $EC$  irányában van. Toljuk el  $e$ -t valamilyen  $x_0$  abszcissza-értékig, majd 3-at annyira, hogy  $g(x)$  és  $e$  metszéspontja  $f(x)$  görbéjén legyen, vagyis  $f(x_0) + g(x_0)$  távolságnyra. Eközben  $B$  is ugyanennyit ( $CB$ ) mozdul el,  $F$  (és vele együtt 6) azonban csak az

$$\frac{ED}{EC} \cdot CB = \frac{ED}{EC} [f(x_0) + g(x_0)]$$

távolsággal mozdul el;  $M$  tehát 6-hoz viszonyítva a

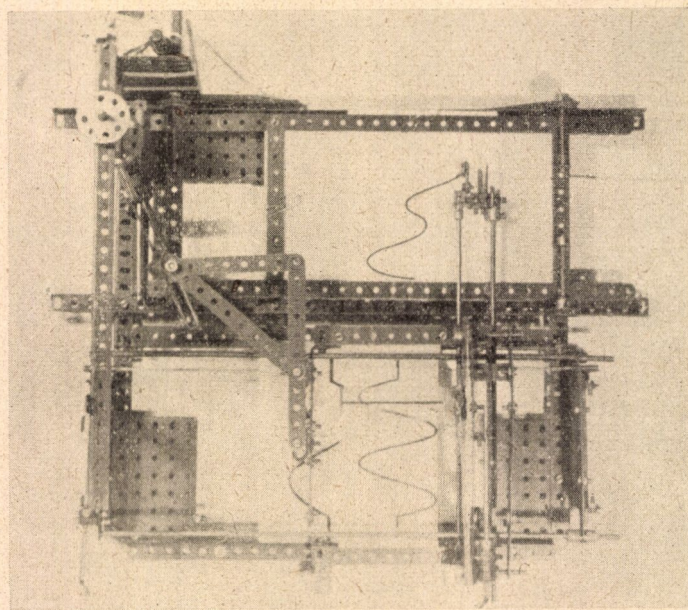
$$\left(1 - \frac{ED}{EC}\right) [f(x_0) + g(x_0)] = k [f(x_0) + g(x_0)]$$

távolsággal.

Míndez  $M$  fel-le mozgásától független, következőképp  $f(x)$  [és ezzel együtt  $g(x)$ ] végigjárásakor  $M$  a 6-ra helyezett papírra a  $k [f(x) + g(x)]$  függvény görbéjét fogja felrajzolni, megfelelő koordináta-rendszerben (ennek az origóját a bejárás megkezdésekor könnyen kijelölhetjük).

Ezzel tehát elértük az  $F(x)$  előállításához szükséges lépések gépi megvalósítását. 7 (s így 8) fel-le mozgatásával  $\frac{ED}{EC}$  folytonosan változtatható s így 0-tól 1-ig  $k$  minden értéke beállítható. Mechanikai szempontból előnyös

az itt bevezetett  $k \leq 1$  korlátozás.  $F(x)$  fenti előállításánál ez nem jelent hátrányt, mert az  $A_v$ ,  $\Phi_v$  tagok mindig átrendezhetőek úgy, hogy az  $\frac{A_1}{A_2}$ ,  $\frac{A_2}{A_3}$ , ... tényezők abszolút értékben 1-nél kisebbek legyenek, az  $A_N$ -nel való szorzásra pedig legtöbbször nincs szükség. Közelebbi technikai részletekre nem térünk itt ki.



2. ábra

A megoldás egyetlen hátránya, hogy nem a megelőző tagok összegéhez adja hozzá a következőket s így  $F(x) = \sum_{v=1}^N A_v \cdot \Phi_v$  alakulását nem követhetjük. Ez azonban csak demonstrációs céloknál hátrány.<sup>1)</sup>

Megjegyezzük, hogy csak Fourier-szintézis esetén az 1. ábra felső részén látható mellékkészüléket is elhagyhatjuk. Erre a legújabbban a *Caimann-Hoppe*-féle szintetizátornál [6] is felhasznált átalakítás nyújt módot: Egy Fourier-sor-szelet mindig előállítható, mint egyenlő amplitudójú, de *különböző fázisú sinus- és cosinus-függvények összege*. Az ilyen összeget azonban tagról tagra elő tudjuk állítani a készülékkel: Elég a  $g(x)$ -ként szereplő *sinus (cosinus)* függvénygörbét a keretben a fázisnak megfelelő távolsággal fel (le)

<sup>1)</sup> Az [5] dolgozatban, illetve itt leírt készülékek elemeit természetesen kombinálhatjuk is egymással: kvadrátplaniméter hozzákapcsolása, átlátszó, egymáson csúszó sablonok stb. [5]-nél is szóbajöhetnek, és így tovább.

eltolva helyezni el, és egyszerűen hozzáadni az addigi részletösszeget képviselő,  $f(x)$  helyén levő görbéhez.

Ha készülékünket ortogonális függvények szerinti sorfejtéshez használjuk, egyszer s mindenkorra el kell készíteni a függvényrendszer tagjainak rajzát, egyforma léptékben. Ezek segítségével dolgozunk analízisnél vagy szintézisnél egyaránt. (Harmónikus függvényeknél elég a *sinus*-függvények rajza is; ha negyedperiódussal eltoljuk, a *cosinus*-függvényekre jutunk.)

Látható, hogy segédkészülékünket egyetlen kezelő egy kézzel kezelheti. Mind a »sablonok« elkészítése, mind a leolvasás a lehető legegyszerűbb. Mindezeket figyelembe véve, mondhatjuk, hogy *készülékünk, illetve eljárásunk talán a legegyszerűbb olyan készülék, illetve eljárás, amely nemcsak Fourier-, hanem általános ortogonális függvényanalízisnél és szintézisnél is használható.* Ha csak Fourier-analízisről van szó, berendezésünk jóval olcsóbb egy külön harmonikus analízátornál. Nyilvánvaló, hogy diagrammok egyszerű összeadására, affin transzformálására is felhasználható.

A segédkészülék Märklin-fémítőszekrény alkatrészeiből megépített primitív modelljét a 2. ábrán látható fénykép mutatja.

## IRODALOM

[1] W. MEYER ZUR CAPELLEN: *Mathematische Instrumente*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949.

[2] H. L. HAZEN—G. S. BROWN: »The cinema integrator.« *Journal of the Franklin Institute* 230 (1940) 19—44 és 183—200.

[3] A. B. МАСНЕЕ: »A high speed product integrator.« *Review of Scientific Instruments* 24 (1953) 207.

[4] М. Г. СЕРЕВРЕННИКОВ: *Гармонический анализ*. Гостехиздат, Москва, 1948 (p. 356—393).

[5] MEDGYESSY P.: »Új készülék Fourier-szintézis és analízis, valamint hasonló sorfejtési feladatok elvégzésére.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 179—185.

[6] V. CALMANN—W. HOPPE: »Die Berechnung von ein- und mehrdimensionalen Fourier-reihen mit einem mechanischen Überlagerer neuer Konstruktion.« *Zeitschrift für angewandte Physik* 5 (1953) 120—130.

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ПРОВЕДЕНИЕ СИНТЕЗА ФУРЬЕ И РЕШЕНИЕ ПОДОБНЫХ ЗАДАЧ СОЧЕТАНИЕМ КВАДРАТНОГО ПЛАНИМЕТРА И НОВОГО ПРИБОРА

П. Меддеш

### Резюме

Представленный автором механический прибор может найти применение для следующих целей: 1. его сочетание с квадратным планиметром [5] может служить для интегрирования произведения двух функций, заданных в графическом виде; 2. отдельно можно прибором провести синтез Фурье и подобные синтезы. Все эти задачи решаются проще, чем общепринятыми приборами ([1], [2], [3], [4], [6]).

Конструкция прибора показана на рисунке. Рама 3 движется во втулках 2, над просвечиваемой стеклянной пластинкой 1. Во втулках 4 движется стержень  $AM$  перпендикулярный к 3. К середине прикреплена прозрачная линейка 5 на которой линия  $e$  перпендикулярна к  $AM$ . Графики рассматриваемых функций  $f(x)$  и  $g(x)$  следует нарисовать на кальке в идентичном масштабе («шаблон»), с противоположно направленными осями у ординат.  $g(x)$  закрепляется на 3,  $f(x)$  на 1.  $f(x)$ ,  $g(x)$  и 5 перекрывают друг друга. Системы координат функций  $f(x)$  и  $g(x)$  можно привести в совпадение пере-

мещением 3. Если двигать  $e$  и 3 таким образом, чтобы точка пересечения  $e$  и  $g(x)$  описывала  $f(x)$ , а потом возвращаясь вдоль оси  $x$  в начало координат, то точка  $M$  (при удобном выборе системы координат) описывает  $f(x) + g(x)$ . Осуществление такого движения точки пересечения нетрудно, ибо кривые можно просвечивать, так что становится видимым расположение  $f(x)$ ,  $g(x)$  и  $e$ . Переворачивая  $f(x)$  и  $g(x)$  можно получить  $-f(x)$  и  $-g(x)$ .

В  $M$  помещен карандаш с острием, прижатым к кальке, прикрепленной к катящемуся столику 6. Из  $B$  исходит стержень  $r$ , который при движении 3 двигает при помощи 8 и 7 столик 6. Параллельным перемещением 7 (изменением передаточного отношения  $ED/EC$ ) можно добиться того, что при смещении 3 на  $f(x_0) + g(x_0)$ , 6 смещается только на  $\frac{ED}{EC} [f(x_0) + g(x_0)]$  относительно оси абсцисс  $f(x)$  ( $0 \leq \frac{ED}{EC} \leq 1$ ). Тогда  $M$  смещается по сравнению с 6 на  $(1 - \frac{ED}{EC}) [f(x_0) + g(x_0)]$ . Так как все эти движения независимы от движения  $M$  вверх и вниз, то при описании  $f(x)$ ,  $M$  нарисует на бумажный лист в 6 график функции  $k[f(x) + g(x)]$  ( $k = 1 - \frac{ED}{EC}$ ,  $0 \leq k \leq 1$ ), то есть прибором осуществляется однонаправленное аффинное преобразование.

Интегрирование произведения осуществляется следующим образом:

Установим  $k = 1$  и прикрепим к  $M$  вместо карандаша направляющее острие квадратного планиметра. Если проходим вдоль  $f(x)$ , то квадратный планиметр дает интеграл функции  $[f(x) + g(x)]^2$ , из которого можно непосредственно вычислять интеграл  $f(x)g(x)$ . Взяв за  $f(x)$  ортогональные функции, можно определить этим методом коэффициенты соответствующего ортогонального разложения.

Синтез Фурье, или синтез по ортогональным функциям проводится следующим образом: Пусть в искомой сумме (4)  $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n$  (этого всегда можно добиться надлежащей перестановкой членов). Предварительно вычерчиваем графики ортогональных функций  $\Phi_i$  (изготавливаем «шаблоны»). Взяв за  $f(x) = \Phi_1$ ,  $g(x) \equiv 0$ , установив  $k = \frac{A_1}{A_2} \leq 1$ ,

мы можем нарисовать на 6  $\frac{A_1}{A_2} \Phi_1$ . Исходя из этой функции и из  $\Phi_2$  мы можем при установке  $k = \frac{A_2}{A_3}$  нарисовать  $\frac{A_2}{A_3} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \Phi_1 + \Phi_2 \right\}$  и т. д. последовательно все скобки в правой части (4).

Описанный прибор является результатом дальнейшего развития прибора, обсуждаемого в [4]. По сравнению с другими подобными приборами он имеет следующие преимущества: требует лишь одного обслуживателя, не нуждается примененные оптические детали, а также и механически используемые шаблоны. Конструкция прибора проста. Если его сочетать с часто встречающимся квадратным планиметром, то он может заменить и продукт-интегратор (гармонический анализатор). Изготовление шаблонов самое простое. Невыгодным является необходимость задания кривых в идентичном масштабе. Если нас интересует только синтез Фурье, то на основе принципов, сообщенных в [6], достаточно просто складывать графики функций  $f(x)$  и  $g(x)$  после сдвига на соответствующую «фазу», без умножения на  $k$ . Тогда 6 и связанные с ним детали отпадают. Применение данного прибора к аффинному преобразованию уже выше было изложено.

## PRODUCT INTEGRATION, FOURIER-SYNTHESIS AND SIMILAR OPERATIONS CARRIED OUT BY MEANS OF A SQUARE PLANIMETER AND A NEW APPARATUS

P. MEDGYESSY

### Summary

The mechanical apparatus described in the present paper can be used as follows: 1. Combining it with square planimeter [5] the integral of the product of two graphically given functions can be determined; 2. It can perform Fourier-synthesis and can be applied to similar purposes. All these operations will be performed in a simpler way than by using the apparatuses applied commonly (see [1], [3], [4], [6]).

Figure 1. shows the sketch of the apparatus. The framework 3 moves in the sleeves 2 over the glass plate 1 illuminated from below. The bar  $AM$ , which is per-



pendicular to 3 moves in the sleeves 4. In the middle of  $AM$ , the transparent rule 5 is mounted; the line  $e$  on it is perpendicular to  $AM$ .  $f(x)$  and  $g(x)$ , the two functions in question, are drawn in the same scale on tracing-paper («templates») so that the ordinates face each to the other.  $g(x)$  and  $f(x)$  are fixed on 3 and 1 respectively.  $f(x)$ ,  $g(x)$  and 5 lie one on the other. Slipping 3, the coordinate systems of  $f(x)$  and  $g(x)$  may be brought in covering. If we move  $e$  and 3 so that the intersection point of  $e$  and  $g(x)$  runs along  $f(x)$  and, on the  $x$ -axis, back to the origin then (in a suitable coordinate system) the point  $M$  describes  $f(x) + g(x)$ . Guiding may be performed easily since the curves can be illuminated from below so that we see  $f(x)$ ,  $g(x)$  and  $e$  simultaneously one over the other. Turning over  $f(x)$  and  $g(x)$ ,  $-f(x)$  and  $-g(x)$  can also be introduced.

In  $M$  there is a pencil; it is pressed to the tracing-paper fixed on the rolling desk 6. A bar  $r$  starts from  $B$ ; if we move 3,  $r$  moves 6 by the aid of 8 and 7. By such a parallel translation of 7 (this may be obtained by varying the ratio  $ED/EC$ ) it can be obtained that if 3 moves with  $f(x_0) + g(x_0)$  then 6 will move only with

$\frac{ED}{EC} [f(x_0) + g(x_0)]$  as compared to the axis of abscissae of  $f(x)$  ( $0 \leq ED/EC \leq 1$ ).

In this case  $M$  will move with  $(1 - ED/EC) [f(x_0) + g(x_0)]$  as compared to 6. Since all these are independent from the up and down motion of  $M$ , then running along  $f(x)$ ,  $M$  will draw  $k [f(x) + g(x)]$  on the paper fixed on 6 ( $k = 1 - ED/EC$ ,  $0 \leq k \leq 1$ ), i. e. the apparatus will perform an unidirectional affine transformation

The product integration is performed as follows: Put  $k = 1$  and instead of the pencil connect the tracer point of a square planimeter with  $M$ . Running along  $f(x)$  the planimeter yields the integral of  $[f(x) + g(x)]^2$ , from which the integral of  $f(x)g(x)$  may be computed. Taking orthogonal functions for  $f(x)$ , we can determine by this procedure the coefficients of the concerning orthogonal expansion.

Fourier-synthesis (synthesis of orthogonal functions) can be performed as follows: In the sum (4) to be determined let  $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n$  (this can always be reached by a suitable rearrangement) the orthogonal functions  $\Phi_v$  are previously sketched («templates» are made). Taking  $f(x) = \Phi_1$ ,  $g(x) \equiv 0$  and, putting  $k = \frac{A_1}{A_2} \leq 1$ ,

let us draw  $\frac{A_1}{A_2} \Phi_1$  on 6. By the aid of the latter and  $\Phi_2$  and taking  $k = \frac{A_2}{A_3}$  we let

the apparatus plot  $\frac{A_2}{A_3} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \Phi_1 + \Phi_2 \right\}$ , — and so on each of the brackets figuring on the right-hand side of (4).

The apparatus is a development of that described in [4]. Comparing with other analogous apparatuses, its advantages are as follows: It needs only one operator and does not contain optical parts and mechanically employed templates. Its construction is simple. Combining with a square planimeter substitutes also for a product integrator (harmonic analyser). The chief disadvantage is that the curves must be drawn according to the same scale. If we want to make Fourier-synthesis only, then, on the basis of some formulae in [6], it suffices to add the curves of  $f(x)$  and  $g(x)$  displaced with a suitable «phase» (without any multiplication by  $k$ ). In this case 6 and all the other component parts connected to it can be omitted. Applications for affine transformations have already been mentioned.