

ÚJABB EREDMÉNYEK VALÓSZÍNŰSÉG-ELOSZLÁSFÜGGVÉNYEK KEVERÉKÉNEK ÖSSZETEVŐIRE BONTÁSÁVAL KAPCSOLATBAN

MEDGYESSY PÁL

Bevezetés

[1] dolgozatunkban a következő problémával foglalkoztunk : Legyen $F^*(x, t)$ a t paramétertől függő eloszlásfüggvény-család, $(-\infty < t < \infty)$ és $F^*(x, t)$ folytonos t -ben ; legyen továbbá $P(t)$ egy valószínűség-eloszlás-függvény. Az $F^*(x, t)$ komponensek $P(t)$ súlyfüggvénnyel vett keverékén az

$$(1) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(x, t) dP(t)$$

függvényt értettük ; ez maga is eloszlásfüggvény. Megvizsgálandó, meghatározható-e bizonyos feltételek mellett $F(x)$ és $P(t)$ vagy csak $F(x)$ ismeretében az (1) relációban szereplő többi függvény.

Ha a probléma megoldható, a megoldási eljárást $F(x)$ összetevőkre bontásának, *felbontásának* neveztük.

A felbontás problémája akkor is felvethető, amidőn bizonyos $f^*(x, t)$ sűrűségfüggvények (1)-hez hasonlóan értelmezett keverékéről van szó (mely maga is sűrűségfüggvény), vagy amidőn $P(t)$ tiszta lépcsősfüggvény véges számú ugrással.

Említett dolgozatunk azzal az egyetlen speciális esettel foglalkozott, amidőn a keverék sűrűségfüggvényén kívül csak a komponensek típusát ismertük, s azok Gauss-függvények voltak, a súlyfüggvényről pedig csak azt tudtuk, hogy tiszta lépcsős függvény véges számú ugrással ; ily módon az volt a feladatunk, hogy egy

$$(2) \quad f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}$$

típusú keverékből (amely tulajdonképpen különböző paraméterű, konstans faktorokkal szorzott Gauss-függvények szuperpozíciója), egyedül $f(x)$ ismeretében meghatározzuk az ismeretlen A_k, m_k, σ_k paramétereket. Az egyszerűbb

tárgyalás kedvéért, illetőleg a gyakorlati vonatkozásokat szem előtt tartva ezekről azt is feltettük, hogy

$$A_k > 0, 0 < m_1 < \dots < m_N, \sigma_k > 0.$$

A probléma gyakorlati fontosságáról említett cikkünkben eleget beszélünk. Mostani dolgozatunknak kettős célja van: egyrészt össze akarjuk foglalni azokat az újabb eredményeinket, amelyek a (2) keverék felbontására (az úgynevezett *Gauss-analízisre*) vonatkoznak és a gyakorlat szempontjából elsőrendű fontosságúak, másrészt ismertetni akarjuk, hogyan terjeszthető ki a Gauss-analízisnél alkalmazott úgynevezett »szóráscsökkentés« módszere egységesen egy egész függvény-családra, illetve hogyan alkalmazható ebbe a családba tartozó függvények (2) típusú keverékének felbontására.

1. §.

[1]-ben részletesen ismertettük a szóráscsökkentés módszerét Gauss-függvények esetében. Ennek az volt a lényege, hogy az általunk választott λ^2 paraméterrel csökkentett szórású komponenseket tartalmazó s így a komponensek grafikus különválasztására alkalmasabb,

$$(3) \quad f^*(x, \lambda^2) \equiv f^*(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}} \quad (\lambda^2 < \min \sigma_k^2)$$

keverék [$f(x)$ úgynevezett λ -transzformáltja] és a (2) alatti $f(x)$ függvény $\mathcal{F}$ -fel jelölt Fourier-transzformáltjai között az

$$(4) \quad \mathcal{F}\{f^*\} = e^{\frac{\lambda^2 t^2}{2}} \cdot \mathcal{F}\{f\}$$

összefüggés áll fenn, amelynek alapján $f(x)$ ismeretében $f^*(x)$ előállítható.

A (4) reláció a gyakorlatban nem használható; az [1] dolgozatban azonban megemlítettük, hogy ha az elég nagy $(0, l)$ intervallumon tekintett $f(x)$, illetve $f^*(x)$ függvényt a $(-l, 0)$ intervallumra párosan kiterjesztjük, és az így kapott függvényt a $(-l, l)$ intervallumon Fourier-cosinus-sorba fejtjük, a Fourier-együtthatók között (4)-hez hasonló összefüggés áll fenn közelítőleg.

Ezzel a λ -transzformált közelítő előállítására már találtunk egy módszert. Ez a módszer különben nem az egyetlen; mielőtt azonban a többire rátérnénk, ebből a Fourier-soros eljárásból ismertetünk annyit, amennyi a gyakorlat szempontjából szükséges (részletes tárgyalást itt nem közölhetünk).

Tekintsük az előbb említett $f(x)$ ill. $f^*(x)$ függvényeket és jelöljük ki oly nagy $(0, l)$ intervallumot, hogy annak határain az általában empirikusan adott $f(x)$ gyakorlatilag zérus. (Mivel $f^*(x)$ komponensei gyorsabban csökkennek $f(x)$ -énél, $f^*(x)$ -nek eleve meglesz ez a tulajdonsága.) A $(-l, l)$

intervallumra történő kiterjesztés után kapott Fourier-cosinus-együtthatókat $f(x)$ esetében a

$$(5) \quad Q_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

$f^*(x)$ esetében pedig az

$$(6) \quad R_n = \frac{2}{l} \int_0^l f^*(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

integrálok adják meg. Ezek között $f^*(x) \equiv f^*(x, \lambda^*)$ esetén közelítőleg fennáll az

$$(7) \quad R_n \sim Q_n e^{\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2}}$$

összefüggés. Következésképpen az $f^*(x, \lambda^2)$ függvényt úgy állíthatjuk elő, hogy $f(x)$ és a mondottak szerint választott l alapján meghatározzuk (pl. harmonikus analízissal) a Q_n együtthatókat, majd általunk választott λ^2 -tel (7) alapján az R_n együtthatókat. $f^*(x, \lambda^2)$ -et ekkor az R_n értékekkel,

mint együtthatókkal képezett $\frac{R_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cdot \cos \frac{n\pi}{l} x$ trigonometrikus sor ad-

ja meg közelítőleg, vagyis az R_n -értékekkel Fourier-szintézist kell végeznünk.

Természetesen a sorfejtést illetve szintézist csak bizonyos M indexig bezárolag végezhetjük el. Ez újabb hibát von maga után. Mindent figyelembe véve, bonyolult számítások után az ezen közelítő eljárásnál elkövetett hibára, D -re (az említett trigonometrikus sor szelete és közti különbség abszolút értékére) a

$$(8) \quad D \leq \left| \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sum_{k=1}^N A_k}{\sqrt{\min \sigma_k^2 - \lambda^2}} \left[1 - \Phi \left(\frac{M\pi \sqrt{\min \sigma_k^2 - \lambda^2}}{l} \right) \right] \right|$$

felső korlátot kapjuk $\left(\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)$. Ha a $\min \sigma_k^2 - \lambda^2$ értéket

rögzítjük, M növelésével csökkenthető a hiba. Az itt szereplő mennyiségek mind

megállapíthatók, vagy az eljárás során megbecsülhetők. $\sum_{k=1}^N A_k$ nagy pon-

tossággal az $f(x)$ alatti terület. Egy »kísérleti« λ^2 -értékkel elvégezve az eljárást, az egyes komponensek általában már annyira szétválnak, hogy a legkisebb szórás, $\sqrt{\min \sigma_k^2 - \lambda^2}$ értéket már meg tudjuk állapítani. Ezek után D -t is megbecsülhetjük. A paraméterek alkalmas választását itt nem taglalhatjuk. Nyilván mennél nagyobb M kívánatos; az l értékét úgysem lehet nagyon változtatni.

Berencz Ferenc [2] ezzel az eljárással ($M = 33$ mellett) feldolgozta atomos *Fe* bizonyos spektrumszakaszának hullámhossz-megállapításra közvetlenül nem használható intenzitás-diagrammját, (2) típusú keveréknek fogva fel azt. A szóráscsökkentés után az egyes spektrumvonalakhoz tartozó komponensek annyira különváltak, hogy a vonalak helyét már meg lehetett állapítani. Ellenőrzésül nagyobb felbontóképességű készülékkel is felvette ugyanazt a spektrumszakaszt. Ezen a felvételen az egyes vonalakhoz tartozó komponensek már nem mosták el egymást és így a vonalak helyét pontosan ki lehetett mérni. A Gauss-analízis alkalmazása után megállapított hullámhosszak jól egyeztek a nagyobb készülékkel kapott felvételtől közvetlenül kimért értékekkel: a matematikai eljárás mintegy *pótolta* a nagyobb felbontóképességű készüléket.

2. §.

Az [1] dolgozat 4. §-ában kimutattuk, hogy

$$(9) \quad f^*(x, \lambda^2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \lambda^{2\nu}}{\nu! 2^{\nu}} f^{(2\nu)}(x)$$

vagyis a λ -transzformált előállítható az analizálandó $f(x)$ páros deriváltjainak függvényesoraként. [1] 5. §-ában részletesen tárgyaltuk, hogyan alkalmazhatjuk a véges differenciákkal kifejezett differenciálhányadosokat, illetve. (9) egyes szeleteit $f^*(x, \lambda^2)$ közelítő meghatározásánál. Az eljárás hibáját ott csak érintettük; itt — részletek mellőzésével — most meg is adjuk.

Ha a sorfejtésben az R -edik tagnál állunk meg, emellett a differenciálhányadosokat közelítőleg határozzuk csak meg, kétszeres hibát követünk el, először is a sor maradéktagja elhanyagolásával, másodsor azzal, hogy a deriváltak közelítő értékei folytán a sorszelet sem lesz pontos. Legyen a 2ν -edik derivált numerikus meghatározásakor elkövetett abszolút hiba $\Delta_{2\nu}$, akkor a második hibaforrásból származó δ_2 abszolút hibára nyilván fennáll a

$$\delta_2 \leq \sum_{\nu=0}^R \frac{\lambda^{2\nu}}{\nu! 2^{\nu}} \Delta_{2\nu}.$$

reláció. A maradéktag elhagyásából származó abszolút hibát jelöljük δ_1 -gyel. Az összes abszolút hiba nyilván $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ lesz. $\Delta_{2\nu}$ -t és így δ_2 -t, mint tudjuk, tetszőlegesen lecsökkenthetjük a véges differenciák lépéseinek finomításával; $\Delta_{2\nu}$ kifejezését a közelítő számítások kézikönyveiben megtalálhatjuk (lásd például [3]). δ_1 -ről kimutatható, hogy

$$(10) \quad \delta_1 < \frac{0,85}{\sqrt{2\pi(R+1)} \min \sigma_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N A_k \left(\frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2} \right)^{R+1}} \frac{\sqrt{f(x)}}{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2} \right)}.$$

Itt ismét csupa kísérletileg könnyen meghatározható mennyiség szerepel; δ_1 függ azonkívül $f(x)$ -től is, vagyis a vizsgált helytől; ez előnyösebb, mint a Fourier-sorfejtés esetében volt, hiszen ott $f(x)$ kis értékei már hibahatáron belül estek.

Természetes, hogy előre megadott δ esetén is megmondhatjuk, milyen pontossággal végezzük a deriváltak meghatározását, valamint, hogy milyen R -ig menjünk el a sorfejtéssel. Részletekbe itt azonban nem bocsátkozhatunk

3. §.

Még egy közelítő eljárást említettünk az [1] dolgozat 5. §-ában : ennek az volt a lényege, hogy ha az analizálandó függvényt

$$(11) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \varphi^{(n)}(x)$$

$$\left(\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right)$$

Hermite-sorba fejtjük, $f^*(x)$ Hermite-sorfejtését bizonyos, a gyakorlatban mindig teljesíthető feltételek mellett, az

$$(12) \quad f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^*}{n!} \varphi^{(n)}(x)$$

kifejezés szolgáltatja, ahol

$$(13) \quad c_n^* = \sum_{q=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n! (-1)^q \lambda^{2q}}{(n-2q)! q! 2^q} c_{n-2q}$$

A gyakorlatban persze az a helyzet, hogy $f(x)$ sorfejtését bizonyos S indexnél abbahagyjuk, és $f^*(x)$ -et is csak közelítőleg határozzuk meg, (12)-t az S -edik tagnál zárva le. Az ekkor elkövetett Δ_S abszolút hibára a következő korlát adható meg :

$$(14) \quad \Delta_S < \frac{1,23}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \left(\sum_{k=1}^N A_k \right) \frac{e^{\frac{\max m_k^2}{4(1-\max \sigma_k^2 + \lambda^2)}} (\sqrt{1 - \min \sigma_k^2 + \lambda^2})^{S+1}}{1 - \sqrt{1 - \min \sigma_k^2 + \lambda^2}}$$

amelyben ismét könnyen megállapítható mennyiségek szerepelnek. Ez a korlát is függ a vizsgált helytől ; ha egy empirikus görbét nagyjából szimmetrikusan helyezünk el az origó körül, a görbe szélei felé a hibakorlát jóval kisebb lesz, mint az origó körül, minthogy a szélek felé a hibakorlátban szereplő $e^{-\frac{x^2}{4}}$ tag is rohamosan csökken.

Mindebből látható, hogy a Fourier-soros eljárás kivételével a többinél jól használható hibakorlátokat kapunk, s így gyakorlatban jobban beválnának. Ha megfelelő gépi segédeszközök rendelkezésre állanak, a Fourier-soros eljárással szemben határozottan előnyben kell részesíteni őket.

Ezzel lezártuk a Gauss-analízisre vonatkozó kiegészítéseinket.

4. §.

Mindaddig *normális* sűrűségfüggvények konstans súlyokkal vett keverékének a szóráscsökkentés módszerével történő felbontásáról volt szó.

A következőkben megmutatjuk, hogy a szóráscsökkentés módszere egy egész sűrűség- (illetve eloszlás-) függvénycsaládra is kiterjeszthető, illetve mindazon sűrűség-(eloszlás-) függvények konstans súlyokkal vett keveréke is felbontható ezzel a módszerrel, amelyek a szóbanforgó függvénycsaládba tartoznak.

Tudomásunk szerint a módszer ilyen általánosításával eddig nem foglalkoztak.

Megállapításainkat először eloszlásfüggvényekre fogalmazzuk meg.

A szóbanforgó függvénycsalád az úgynevezett *stabilis* eloszlás-, illetve sűrűségfüggvények családja (lásd például: [4]).

Egy $F(x)$ eloszlásfüggvényt akkor nevezünk stabilisnek, ha tetszőleges valós $a_1 > 0$, b_1 , $a_2 > 0$, b_2 esetén

$$F(a_1x + b_1) * F(a_2x + b_2) = F(ax + b)$$

ahol $a > 0$ és b az a_1 , a_2 , b_1 és b_2 értékektől függő valós állandók, a $*$ pedig a kompozíció műveletét jelenti.

Az így definiált stabilitás szükséges és elégséges feltétele, hogy $F(x)$ karakterisztikus függvényére, $\varphi(t)$ -re fennálljon a

$$(15) \quad \log \varphi(t) = i\gamma t - c|t|^a \{1 + i\beta \cdot \operatorname{sgn} t \omega(t, a)\}$$

összefüggés, ahol a , β , γ és c állandók: γ tetszőleges valós szám, $|\beta| \leq 1$, $0 < a \leq 2$, $c \geq 0$, ezenkívül

$$\omega(t, a) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} a, & \text{ha } a \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log |t|, & \text{ha } a = 1. \end{cases}$$

Mindezek értelemszerűen kiterjeszthetők sűrűségfüggvényekre is.

Ezen összefoglalás után eredményünket a következőképpen fogalmazzuk meg:

Tekintsük azokat az $F_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) stabilis eloszlásfüggvényeket, amelyeknek $\varphi_k(t)$ karakterisztikus függvénye

$$(16) \quad \varphi_k(t) = e^{i\gamma_k t - c_k |t|^a [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, a)]}$$

alakú. Ezek az általános esettől abban különböznek, hogy a és β mindegyik $F_k(x)$ -függvényénél ugyanaz. Vizsgáljuk az *ismert*

$$(17) \quad F(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot F_k(x)$$

keveréket ($A_k > 0$), amelynek karakterisztikus függvénye (16) alapján

$$(18) \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{i\gamma_k t - c_k |t|^\alpha [1 + i\beta \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]}$$

Erről kimondható a következő

Tétel: Legyen a (17) keverék-eloszlásfüggvény (18) karakterisztikus függvényében α, β ismert, a γ_k és c_k -k pedig ismeretlenek, ezen felül (az egyszerűség kedvéért) $\gamma_k \neq \gamma_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$) és $0 < c_1 < \dots < c_N$. Legyen továbbá $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ 0-tól monoton növekvő valós számok olyan sorozata, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = c_1$ és

$$(19) \quad \Psi(x, \lambda_n) = \mathcal{F}^{-1}[\varphi(t) \cdot e^{i\lambda_n |t|^\alpha [1 + i\beta \cdot \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]}]$$

($\mathcal{F}^{-1}$ inverz Fourier—Stieltjes-transzformálást jelent). Ekkor az ismeretlen c_1, γ_1, A_1 konstansokat egyértelműen meghatározzák a $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(x, \lambda_n) = \Psi^*(x)$ eloszlásfüggvény következő tulajdonságai:

$$(20) \quad \begin{aligned} a) \quad & \Psi^*(\gamma_1 + 0) - \Psi^*(\gamma_1 - 0) = A_1 \\ b) \quad & \Psi^*(x) \text{ minden más helyen folytonos.} \end{aligned}$$

Mielőtt a bizonyításra rátérnénk, rámutatunk a tétel lényegére: olyan keverékről van szó, ahol a komponensekről tudjuk, hogy ismert, közös α, β és ismeretlen γ_k, c_k paraméterű karakterisztikus függvényű stabilis eloszlásfüggvények, és az A_k súlyok is ismeretlenek. Ha ennek a keveréknek képezzük a karakterisztikus függvényét, majd általunk választott különböző λ_n paraméterértékekkel a (19)-ben szereplő szorzatot, s ezeket sorban vissza-transzformáljuk, az így kapott $\Psi(x, \lambda_n)$ eloszlásfüggvények sorozata $\lambda_n \rightarrow c_1$ esetén olyan $\Psi^*(x)$ eloszlásfüggvényhez fog tartani, amely az $x = \gamma_1$ helyen (és csakis itt) A_1 értékű ugrást mutat. Így tehát $\Psi^*(x)$ alakú tulajdonságaiból meghatározhatók az ismeretlen paraméterek.

Bizonyítás: Legyen $\psi_k(t) = e^{i\gamma_k t - (c_k - \lambda_n) |t|^\alpha [1 + i\beta \operatorname{sgn} t \cdot \omega(t, \alpha)]}$,

$$\Psi_k(x, \lambda_n) = \mathcal{F}^{-1}[\psi_k(t)] \quad (k = 1, \dots, N).$$

(18) és (19) alapján

$$\begin{aligned} \Psi(x, \lambda_n) &= A_1 \cdot \mathcal{F}^{-1}[\psi_1(t)] + \sum_{k=2}^N A_k \cdot \mathcal{F}^{-1}[\psi_k(t)] = \\ &= A_1 \cdot \Psi_1(x, \lambda_n) + \sum_{k=2}^N A_k \cdot \Psi_k(x, \lambda_n). \end{aligned}$$

$\Psi_k(x, \lambda_n)$ a $\psi_k(t)$ karakterisztikus függvényhez tartozó eloszlásfüggvény. Tekintsük a

$$\Psi^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(x, \lambda_n) = A_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_1(x, \lambda_n) + \\ + \sum_{k=2}^N A_k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_k(x, \lambda_n)$$

függvényt. $n \rightarrow \infty$ esetén, amidőn $\lambda_n \rightarrow c_1$, $\psi_1(t)$ minden t -re a folytonos $e^{i\gamma_1 t}$ karakterisztikus függvényhez konvergál. Ekkor a karakterisztikus- és eloszlásfüggvények közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés értelmében (lásd például: [4], p. 55, 1. és 2. tételek) a $\psi_1(t)$ -hez tartozó $\Psi_1(x, \lambda_n)$ eloszlás-

függvény konvergál az $e^{i\gamma_1 t}$ -hez tartozó $E_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > \gamma_1 \\ 0, & \text{ha } x \leq \gamma_1 \end{cases}$ eloszlásfüggvényhez, ennek minden folytonossági pontjában, azaz

$$A_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_1(x, \lambda_n) = \begin{cases} A_1, & \text{ha } x > \gamma_1 \\ 0, & \text{ha } x < \gamma_1 \end{cases},$$

vagyis olyan lépcsős függvény, amelynek egyetlen, A_1 értékű ugrása van az $x = \gamma_1$ pontban.

Ha $k \geq 2$, minden t -re

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_k(t) = e^{i\gamma_k t - (c_k - c_1)|t|^\alpha [1 + i\beta \cdot \text{sgn } t \cdot \omega(t, a)]}$$

és így (lásd például: [4], p. 55, 1. és 2. tételek) a $\psi_k(t)$ -hez tartozó $\Psi_k(x, \lambda_n)$ eloszlásfüggvény konvergál a $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_k(t)$ -hez tartozó eloszlásfüggvényhez,

ennek minden folytonossági pontjában, — vagyis azonos vele, mert a stabilis eloszlásfüggvények folytonosak, ha karakterisztikus függvényükben $|t|^\alpha$ együtthatója pozitív (lásd például: [4], p. 189). Így tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_k(x, \lambda_n)$ folyto-

nos ($k \geq 2$); mindezekből végülis az következik, hogy az $x = \gamma_1$ helyen $\Psi^*(x)$ jobb- és baloldali határértékének különbsége A_1 , egyébként pedig $\Psi^*(x)$ folytonos. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy a karakterisztikus függvények unicitási tétele értelmében (lásd például: [4], p. 55, 2. tétel) $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_k(x, \lambda_n)$ ($k \geq 2$) a kiindulási (17) keverék k -adik komponensével azonos típusú stabilis eloszlásfüggvény; ez azonnal látható (21) alatti karakterisztikus függvényéből.

Mielőtt továbbmennénk, nézzük a tétel gyakorlati alkalmazását. Mindenesetre tudnunk kell, milyen α, β paraméterekhez tartozó stabilis eloszlásfüggvények keverékéről van szó; ha a komponensek típusát ismerjük, ezt is tudjuk. Ekkor képezzük a keverék karakterisztikus függvényét, majd egyes monoton növekvő λ_n értékekkel kísérletezve megalkotjuk az $e^{\lambda_n |t|^\alpha [1 + i\beta \cdot \text{sgn } t \cdot \omega(t, a)]}$ függvényeket, szorozzuk velük a karakterisztikus függvényt és visszatranszformáljuk. Ha λ_n -nel közel járunk c_1 -hez, a visszatranszformálás után kapott eloszlásfüggvény az $x = \gamma_1$ helyen egyre inkább (A_1 értékű) ugrást fog mu-

tatni. Mivel c_1 -et nem ismerjük, a λ_n -eket sem adhatjuk meg előre; legjobb néhány kis értékű λ_n -nel elvégezni az eljárást és eredményeiket összehasonlítani. Ha nem léptük túl c_1 -et a λ_n -ekkel, a nagyobb λ_n -ekhez tartozó eredménygörbék egyre jobban mutatják az említett ugrást. Ha egy λ_n -nel c_1 -et már túlléptük, a hozzátartozó eredménygörbe a megelőzőhöz viszonyítva teljesen szabálytalan menetet mutat. Mindebből nagyjából megállapítható, melyik λ_n közelíti meg legjobban alulról c_1 -et; ezzel közelítő értéket kapunk c_1 -re is.

Azonnal látható, hogy az $\Psi^*(x) - A_1 E_1(x)$ függvényen az egész eljárás megismételhető és eredményéből most már c_2 , γ_2 , A_2 határozható meg, szem előtt tartva, hogy ekkor mindenütt $c_k - c_1$ szerepel, — és így tovább, komponensről komponensre.

Tételünk mechanikusan kiterjeszthető arra a legáltalánosabb esetre is, amidőn mind a c_k , mind a γ_k értékek közt egyenlők is vannak [de nincs olyan c_k , γ_k értékpár, amely megegyezne valamely másik c_l , γ_l ($l \neq k$) értékpárral]. Ekkor ugyanis legfeljebb egyszerre több helyen lép fel ugrás a határeloszlásfüggvényben. Ezeket persze mind le kell vonnunk, amidőn az eljárás ismétlésével újabb paramétereket akarunk meghatározni.

Mindezekből az is látható, hogy az ismeretlen paraméterek meghatározása egyértelmű (a diszkontinuitások egyértelműen jelentkeznek az eljárás után kapott eloszlásfüggvényben). *A különböző c_k , γ_k párok megszámlálásával N -et is megkapjuk.*

Ha ismerjük a komponensek típusát, azt is tudjuk, hogyan függnek össze a komponensek alakját jellemző paraméterek a karakterisztikus függvényben szereplő c_k , γ_k paraméterekkel. Ha tehát eljárásunk során egy komponens *karakterisztikus függvényének* c_k , γ_k értékpárját már megkaptuk, ebből meghatározhatjuk a *komponens* ismeretlen paramétereit is.

Sajnos, csak pár esetben ismerjük a stabilis eloszlásfüggvények explicit alakját. *Minden esetben meghatározható azonban a komponensek száma, mint arra fentebb már utaltunk.* Sokszor ez is elég. A gyakorlatban különben az is előadódhat, hogy egy ismert keverék komponenseinek karakterisztikus függvényét tudjuk csak meghatározni, — például elméleti fizikai úton, — a komponensek formuláját azonban nem (lásd például: [5]). Lehet tehát jelentősége az eljárásnak akkor is, amidőn a komponensek típusát explicite nem is ismerjük.

5. §.

Nagyon fontos a következő megállapítás: az előző §-ban ismertetett tétel és alkalmazása a gyakorlatba csak közelítőleg vihető át: az említett ugrást az eloszlásfüggvényben sohasem kapjuk meg a szó exakt értelmében, hanem csak többé-kevésbé lépcsőszerűen kiemelkedő szakasz jelentkezik. Ebből azonban nehéz paramétereket megállapítani. Éppen ezért nem az eloszlás-, hanem a hozzájuk tartozó *sűrűségfüggvények* keverékén végezzük az 5. §. tételében közölt eljárást, azzal a különbséggel, hogy Fourier—Stieltjes-transzformáció helyett Fourier-transzformációt szerepeltetünk. Az eredmény az lesz, hogy ha λ_n már közel jár c_1 -hez, az $x = \gamma_1$ helyen nem ugráshoz hasonló görberészletet, hanem végtelenbe keskenyedő görbeszakaszt (»tű«) kapunk. Ez azonban sokkal jobban felismerhető, mint az ugrás és segítségével γ_1 is könnyen meghatározható (itt lesz a »tű« maximuma). A következő lépésnél

ezt a »tűt« hagynánk ki a görbéből, megfelelően az ugrás levonásának. — A_1 -et viszont ekkor már nem olvashatjuk le közvetlenül, csak akkor, ha a »tű« alatti területet elég pontosan kimérhetjük (tudniillik könnyen igazolható, hogy ez éppen A_1 -gyel egyenlő). Minthogy ezt a gyakorlatban legtöbbször megtehetjük, egyéb módszerekre nem térünk ki. Általában az a helyzet, hogy egy-két λ_n érték alkalmazása után már »tűkre« válik szét a görbe, s ezekből az egyes paramétereket jó közelítéssel meghatározhatjuk. A $\lambda_n = c_1$ ideális esetet a gyakorlatban nem is érhetjük el soha.

6. §.

Befejezésül néhány példával illusztráljuk általános eljárásunkat.

Két olyan sűrűségfüggvény-keveréssel foglalkozunk, amely egyrészt stabilis komponensekből áll, másrészt explicit alakját és karakterisztikus függvényének paramétereit is ismerjük.

Az egyik Gauss-függvények keveréke :

$$(22) \quad f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_k},$$

ahol A_k , m_k , σ_k ismeretlenek, s egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_N$, $m_k \neq m_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$). Ezek a komponensek stabilisak; $f(x)$ karakterisztikus függvénye

$$(23) \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{i\gamma_k t - \frac{\sigma_k^2}{2} t^2}.$$

vagyis a komponensek karakterisztikus függvényeinek paramétereit: $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma_k = m_k$, $c_k = \frac{\sigma_k^2}{2}$. Eljárásunk itt alkalmazható és úgy végezzük el,

hogy a $\varphi(t)$ függvényt megszorozzuk alkalmas λ -val képezett $e^{i\lambda t}$ függvénnyel $\left(\lambda < \min \frac{\sigma_k^2}{2}\right)$, s a szorzatot visszatranszformáljuk. Az eredményben az

egyes komponensek jobban különválnak és ha λ közel jár a $\frac{\sigma_1^2}{2}$ értékhez, az »1«

indexű komponens »tűként« jelentkezik. Az eljárásból tehát az m_1 , és $\frac{\sigma_1^2}{2}$ ér-

tékeket jó közelítéssel megkaphatjuk; ezek nemcsak a karakterisztikus függvény jellemzői: a sűrűségfüggvény ismeretlen paramétereit is azonnal kiszámíthatók belőlük. Ez az eljárás különben az [1]-ben külön tárgyalt Gauss-analízis (csak ott λ helyett $\frac{\lambda^2}{2}$ szerepelt), ezért tovább nem foglalkozunk vele.

Második példaként tekintsük az úgynevezett Cauchy-féle sűrűségfüggvények konstans súlyokkal vett keverékét, vagyis legyen

$$(24) \quad f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{1}{\pi \sigma_k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(x - m_k)^2}{\sigma_k^2}}.$$

ahol $A_k > 0$, σ_k , m_k ismeretlen konstansok. Az egyszerűség kedvéért ismét feltesszük, hogy $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_N$, $m_k \neq m_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$).

Ezek a komponensek is stabilisak és $f(x)$ karakterisztikus függvénye:

$$(25) \quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{im_k t - \sigma_k^2 |t|}.$$

A komponensek karakterisztikus függvényeinek paraméterei tehát $a = 1$, $\beta = 0$, $\gamma_k = m_k$, $c_k = \sigma_k$. Ismét alkalmazhatjuk felbontási tételünket; az eljárás a következő lesz: a keverék ismeretében képezzük a $\varphi(t)$ függvényt, majd szorozzuk alkalmas λ -val képezett $e^{\lambda |t|}$ -vel ($\lambda < \min \sigma_k$), s a szorzatot visszatranszformáljuk. A visszatranszformálás után kapott sűrűségfüggvény-keverék már alkalmasabb a komponensek karakterisztikus függvényeiben szereplő ismeretlen paraméterek meghatározására. (A komponensek az eljárás folytán elkeskenyednek.) Ha $\lambda = \sigma_1$, $x = m_1$ esetén itt is végtelenbe futó »tű«, jelentkezik s így ezt a két paramétert máris ismerjük. Az eljárás azután éppúgy folytatható, mint a Gauss-analízisnél. Az így kapott paraméterek azonban egyszersmind a komponens Cauchy-sűrűségfüggvények ismeretlen paraméterei is. (Itt tapasztaljuk a legegyszerűbb összefüggést a komponensek és karakterisztikus függvények paraméterei közt: azonosak.)

A gyakorlatban persze ismét közelítő eljárással dolgozunk, pl. ismét Fourier-sorfejtést használunk. Erre itt nem térhetünk ki részletesen. Alkalmazásokat illetőleg megjegyezzük, hogy bizonyos körülmények közt spektrumvonalak intenzitáslefutását is leírhatja Cauchy-sűrűségfüggvény (legalábbis jó közelítéssel), így tehát eljárásunk felhasználásra találhat a spektroszkópiában. Más területeken is találkozunk Cauchy-sűrűségfüggvényekkel (például atommagfizikai vonatkozásban, lásd: [6]); felbontás gyakorlati elvégzésére azonban eddig még nem került sor.

Nem foglalkozunk itt azzal az esettel, amidőn a komponensek a Pearson-féle V-típus néven ismert stabilis sűrűségfüggvények. A függvény és karakterisztikus függvénye itt is explicite ismert, paramétereik közt azonban az összefüggés bonyolult és a szóráscsökkentési eljárás általában már nem alkalmas a komponensek szétválasztására, csak számuk meghatározására.

Záradékol bizonyítás nélkül még a következőket említjük meg:

1°. A szóráscsökkentési módszer nyitja a komponensek karakterisztikus függvényeinek jellegzetes $e^{P(t)}$ típusa, ahol $P(t)$ a t és $|t|$ valós együtthatós polinomja. Ez a típus nem-stabilis sűrűségfüggvélynél is felléphet s bebizonyítható, hogy eljárásunk ekkor is alkalmazható. Ezzel még jobban kiszélesítettük a szóráscsökkentés módszerének alkalmazási területét. — Az ettől a típustól eltérő komponenseknél egyes esetekben található ugyan »ad hoc« eljárás, általánosságban azonban még feldolgozatlan a problémának ez a része.

2° Ha a keverék komponensei olyan stabilis sűrűségfüggvények, amelyek a (16) alatt közölt karakterisztikus függvényeiben $\alpha = p/q$ racionális szám (p és q relatív prímek), $\beta = 0$, ha $\alpha = 1$, a (19) egyenletben szereplő $\Psi(x, \lambda_n)$ eloszlásfüggvény, illetve ennek sűrűségfüggvénye, amelynek alapján a keverék felbontása történik, elegendő tesz egy parciális differenciálegyenletnek, amelynek együtthatói csak az ismert α és β értékektől függnének. A kezdeti feltétel a keverék-függvény, amelynek a görbáját ismerjük; ekkor azonban a differenciálegyenlet alapján a $\Psi(x, \lambda_n)$ függvényt numerikus módszerekkel bármilyen α, β értékpár esetén közelítőleg meghatározhatjuk.

Lehetőség nyílik ezenkívül arra is, hogy a 2. §-ban közölt Fourier-sorfejtéses eljárást kiterjesszük bármilyen stabilis sűrűségfüggvényekből álló keverékre.

Ezeket a széleskörű általánosításokat tartalmazó vizsgálatokat azonban itt már nem közölhetjük. Ezekkel majd újabb dolgozatban foglalkozunk teljes részletességgel.

IRODALOM

- [1] MEDGYESSY P.: »Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire.« *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 165—177.
- [2] F. BERENCZ: »Bemerkungen zur Analyse der Absorptionskurven.« *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* 4 (1954) 317—325.
- [3] L. V. KANTOROVICS—V. I. KRÜLOV: *A felsőbb analízis közelítő módszerei*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.
- [4] B. V. GNYEGYENKO—A. N. KOLMOGOROV: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
- [5] L. A. J. EMSLIE—G. W. KING: »Spectroscopy from the point of view of the communication theory. II. Line-width.« *Journal of the American Optical Society* 43 (1953) 658—663.
- [6] В. ГЕЙЗЕНБЕРГ: *Теория атомного ядра*. Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1953. (W. Heisenberg »Theorie des Atomkerns« (1951) c. könyvének orosz kiadása.)
- [7] G. DOETSCH: »Die Elimination des Dopplereffekts bei Spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten.« *Zeitschrift für Physik* 49 (1928) 705—730.

О НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ РАЗЛОЖЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ СМЕСИ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

П. Меддеши

Резюме

Пусть $F^*(x, t)$ семейство функций распределения, зависящая от параметра $t - \infty < t < \infty$, и пусть $F^*(x, t)$ непрерывна относительно t . Если $P(t)$ является некоторой функцией распределения вероятностей, то функция

$$(1) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(x, t) dP(t)$$

называется смесью компонентов $F^*(x, t)$ с весовой функцией $P(t)$. Аналогично определяется смесь $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x, t) dP(t)$, компоненты которой функции плотности $f^*(x, t)$

В первой части настоящей работы, точно так же как и в предшествующей работе [1], рассматривается проблема:

В смеси функций плотности выбираем компоненты и весовую функцию так, чтобы она приняла вид (2), (то есть стала наложением нормальных функций плотности с различными параметрами). Пусть в (2) $f(x)$ известна, $A_k > 0$, $0 < m_1 < \dots < m_N$, $\sigma_k > 0$ неизвестны. Наша задача — определить при помощи $f(x)$ неизвестные параметры.

Если нам известны параметры, то мы уже знаем и компоненты, поэтому мы и можем называть метод решения нашей задачи *разложением на компоненты* смеси $f(x)$.

Решаем нашу проблему при помощи т. н. «метода уменьшения дисперсии» (см. также [1]). Произведем при помощи $f(x)$ смесь (3), которая отличается от (2) только тем, что она содержит σ_k^2 вместо $\sigma_k^2 - \lambda^2$. (λ^2 выбранный нами параметр). В (3) дисперсия компонент меньше, чем в (2), так что они показываются отдельно. Если записать (3) для нескольких λ^2 , монотонно возрастающих, то при $\lambda^2 \rightarrow \sigma_i^2$ компонента с σ_i^2 вырождается в «диракову δ ». Сильно отделяющиеся компоненты можно рассматривать как единственную кривую Гаусса, и таким образом можно приближенно определить их параметры. (Например, «дираковка δ » помещается у $x = m_i$ соответствующей σ_i^2 , а σ_i^2 равна λ^2 , приводящей к «дираковой δ »). После графического отделения «дираковой δ » (что по существу равносильно исключению одной компоненты), можно повторить применение приема.

(3)—т. н. преобразованную λ -нетрудно, однако, представить при помощи (4), связывающей преобразованные Фурье (2) и (3). Это соотношение было впервые замечено У. Дётчем ([7]).

(4) на практике неприменима, поэтому ищем приближенные методы. Краткому обсуждению таких методов и их оценок погрешности посвящается вторая часть настоящей работы.

В своей упомянутой работе Г. Дётч применяет ряды Фурье для представления преобразованной λ . Если продолжить $f(x)$ и $f^*(x)$ четно и разложить их ряд по косинусам в некотором интервале $(-l, l)$, то коэффициенты (5) и (6) этих разложений при больших l мало отличаются от преобразованных Фурье, взятых для $t = \frac{n\pi}{l}$, так что ввиду

(4) имеет место (7). $f^*(x)$ тогда можно задать приближенно при помощи синтеза Фурье. Абсолютная погрешность этого приближенного метода задается формулой (8) (этим вопросом Дётч не занимался). M означает число членов, до которых можно дойти анализом и синтезом Фурье.

Этим методом успешно были обработаны части спектра Fe [2].

Другой метод для приближенного представления $f^*(x)$ получается из легко доказываемого соотношения (9), (см. [1], § 4). Производные $f(x)$ однако следует определять численными методами. Если взять из (9) только R членов, то оценка для получаемой ошибки дается формулой (10), в которой — в противоположность (8) — фигурирует и $f(x)$. Погрешность при численном определении производных можно найти в соответствующих руководствах. В (1), § 5, мы уже дали пример для этого приема.

Третий метод основывается на том, что коэффициенты (11) и (12) разложений в ряд Чебышева—Эрмита функций $f(x)$ и $f^*(x)$ связаны соотношением (13). Если в разложении для $f(x)$ остановиться у индекса S , то для погрешности имеется предел (14).

В последней части настоящей работы метод уменьшения дисперсии распространяется на разложение таких смесей функций распределения (17) компонентами $F_k(x)$ которых служат т. н. *стабильные* функции распределения (см. [4]), то есть преобразованная Фурье смеси есть (18). Имеет место следующая.

Теорема. Пусть в (18) α , β -известны, γ_k , c_k неизвестны [$\gamma_k \neq \gamma_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$)], $0 < c_1 < \dots < c_N$, и пусть $\{\lambda_n\}$ последовательность вещественных чисел монотонно возрастающая, исходя от 0, пусть, наконец $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = c_1$. Тогда неизвестные c_1 , γ_1 , A_1 однозначно определяются соотношением (20), составленным при помощи (19), и непрерывностью $\Psi^*(x)$ во всех точках $x \neq \gamma_1$.

Доказательство опирается на некоторые теоремы о характеристических функциях и о стабильных функциях распределения ([5], ([6], [7]).

На практике эта теорема применяется следующим образом: представляем при помощи некоторых произвольных λ_n преобразованную Фурье разлагаемой смеси $\varphi(t)$, — а потом и $\Psi(x, \lambda_n)$ из (19). Если λ_n близок к c_1 , то $\Psi(x, \lambda_n)$ имеет скачок A_1 у $x = \gamma_1$, в противном случае непрерывна. Зная этот факт, можем определить параметры. После вычитания скачка прием опять можно применять. Основная идея становится ясной, если сравнить (4) с (19). Важно то обстоятельство, что преобразованные Фурье имеют тип $e^{P(t)}$ [$P(t)$ — многочлен с комплексными коэффициентами от t и $|t|$].

На практике мы имеем дело со смесью функций плотности. Ясно, что в этом случае для $x = \gamma_1$ получается «диракова δ », а не скачок. Некоторые параметры можно определить и из этого факта.

Если известно соотношение, связывающее параметры компонентов и $\alpha, \beta, \gamma_k, c_k$, то после определения γ_k и c_k можно построить также и компоненты. В противном случае можно определить лишь N (число компонент). Первая возможность реализуется для уже исследованной смеси функций Гаусса ($\alpha=2, \beta=0$; (22), (23)) и для смеси функций плотности Коши ($\alpha=1, \beta=0$; (24), (25)). При разложении этой последней смеси можно опять прибегнуть к разложению в ряд Фурье. Предлагаемое разложение может найти применение при некоторых исследованиях спектроскопии и ядерной физики, где результаты измерения является смесью функций плотности Коши ([8], [9]).

В общем случае основой разложения может служить тот факт, что в случае $\alpha = p/q$ (числа p и q взаимно простые) и $\beta = 0$, если $\alpha = 1$ функция $\Psi(x, \lambda_n)$ удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных (одно из краевых условий — разлагаемая смесь). Численное решение этого уравнения дало бы разложение произвольном данным λ_n . В случае функций плотности Коши, упомянутое дифференциальное уравнение переходит в уравнение Лапласа.

SOME RECENT RESULTS CONCERNING THE DECOMPOSITION OF COMPOUND PROBABILITY DISTRIBUTIONS

P. MEDGYESSY

Summary

Let $F^*(x, t)$ be a family of distribution functions depending on the parameter t ($-\infty < t < \infty$) and $F^*(x, t)$ be continuous in t . If $P(t)$ denotes another distribution function, the function $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(x, t) dP(t)$ (cf. (1)), will be called a compound distribution or, briefly, compound formed by the components $F^*(x, t)$ and the weight function $P(t)$. Similarly $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x, t) dP(t)$ is called the compound of the frequency function components $f^*(x, t)$.

In the first part of this paper the following problem (see also [1]) is considered:

Suppose that a compound of frequency functions has the form (2) (i. e. it is a superposition of normal frequency functions with different parameters). In (2) let $f(x)$ be known and the constants $A_k > 0$, $0 < m_1 < \dots < m_N$, $\sigma_k > 0$ be unknown. Our task will be to determine the unknown parameters from the curve of the function $f(x)$. Since the knowledge of these yields a perfect information about the components, the procedure giving the solution of our problem may be called the *decomposition* of the compound $f(x)$ into components.

The problem will be solved by the so-called «variance-reduction method» (see also [1]). The essence of this method is that by the aid of $f(x)$ we construct the compound (3) which differs from (2) so far as σ_k^2 is replaced by $\sigma_k^2 - \lambda^2$. (λ^2 denotes an arbitrary chosen parameter, $\lambda^2 < \min \sigma_k^2 \equiv \sigma_1^2$.) In (3) the variance of the components is smaller than that in (2); consequently the components will appear separately. If we form (3), with $\lambda^2 \rightarrow \sigma_1^2$ ($\lambda^2 < \sigma_1^2$) the component with the original variance σ_1^2 degenerates into a «Dirac- δ ». The markedly separated components can be handled as simple Gaussian (normal frequency) functions whose parameters may be approximately determined. After separating the «Dirac- δ » graphically (which actually means the dropping of a component) the procedure may be repeated.

(3) the so-called λ -transform — may be simply determined on the basis of (4) which exists between the Fourier-transforms of (2) and (3). This connection has been stated first by G. Doetsch [7].

In practice, however, (4) cannot be utilised, therefore approximate methods must be found. A short survey of these and their error formulae form the second part of the present paper.

In his paper G. Doetsch uses Fourier-series for the construction of the λ -transform: if, after an even continuation, $f(x)$ and $f^*(x)$ will be expanded into a cosine-series on some interval $(-l, l)$ then, for a sufficiently large l , the coefficients (5) and (6) of the expansions will only slightly differ from the Fourier-transforms taken at $t = \frac{n\pi}{l}$; hence,

by (4) we will have (7). In this case $f^*(x)$ can be approximately obtained by a Fourier-synthesis. The absolute error of this procedure is given by (8). (The error has not been estimated by G. Doetsch.) In (8) M signifies the number of the terms which are taken into account at the Fourier-analysis and synthesis.

Details of the spectrum of atomic Fe have been successfully analysed by this method (see [2]).

Another method for the approximation of $f^*(x)$ may be obtained by the relation (9) which can be proved easily (see [1] § 4.). The derivatives of $f(x)$, however, are to be determined by numerical methods. If we take only R terms from (9), the error arising here will be bounded by (10). In contrary with (8) in this estimation there figures also $f(x)$. The error of the applied numerical derivations may be found in the literature on the subject. In § 5. of [1] we also gave a numerical example for this procedure.

The basis of the third method is that there is a relation (13) between the coefficients (11) and (12) of the Chebyshev—Hermite expansion of $f(x)$ and $f^*(x)$, respectively. If, in the expansion of $f(x)$ we stop at the index S , the error will be bounded by (14).

In the last section of our paper we expand the «variance-reducing method» for the decomposition of such compounds (17) of distribution functions whose components $F_k(x)$ are the so-called stable distribution functions (see [4]), i. e. the Fourier-transform $\varphi(t)$ of the compound is given by (18). We prove the following

Theorem: In (18) let α, β be known and γ_k, c_k be unknown [$\gamma_k \neq \gamma_l$ ($k, l = 1, 2, \dots, N$; $k \neq l$), $0 < c_1 < \dots < c_N$] and let $\{\lambda_n\}$ be a monotonically increasing sequence of positive real numbers, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = c_1$. Then the unknown values of c_1, γ_1

A_1 will be uniquely determined by the relation (20) together with (19) and by that $\Psi^*(x)$ is continuous for all $x \neq \gamma_1$.

The proof is furnished by the use of some theorems ([5], [6], [7]) concerning characteristic functions and stable distribution functions.

In practice this theorem can be applied as follows: with some arbitrary λ_n 's we construct the Fourier-transform $\varphi(t)$ of the compound to be decomposed and the $\Psi(x, \lambda_n)$ in (19). If λ_n approaches to c_1 , $\Psi(x, \lambda_n)$ shows a jump of value A_1 at $x = \gamma_1$; otherwise it is continuous. From this situation the parameters can be determined. After having subtracted the jump the procedure can be repeated: the basic idea may be seen by the comparison of (4) and (19).

In practice we work with a compound of frequency functions. Evidently, in this case there appears a «Dirac- δ » at $x = \gamma_1$ instead of a jump when we have performed the procedure. Some parameters may be already determined from this fact too.

If we know the relations between the parameters of the components and the α_k 's, β_k 's, γ_k 's, c_k 's, then, after having determined γ_k, c_k the components can also be constructed. In the opposite case we can state the number N of the components only. The first case presents itself at the investigation of a compound of Gaussian functions discussed above ($\alpha = 2, \beta = 0$; see (22), (23)) and that of Cauchy frequency functions ($\alpha = 1, \beta = 0$; see (24), (25)). Decomposing the latter compound we may use Fourier expansions again. This decomposition may be applied e. g. in some investigations in spectroscopy and nuclear physics where the result of the measurements presents a compound of Cauchy frequency functions (see [8], [9]).

In the general case the decomposition can be based on the fact that in the case of $\alpha = p/q$ (p, q are relative primes) and $\beta = 0$ if $\alpha = 1$ $\Psi(x, \lambda_n)$ satisfies a certain partial differential equation.) The compound to be decomposed yields the boundary condition.) The numerical solution of this equation would give the decomposed compound $\Psi(x, \lambda_n)$ for an arbitrary λ_n . In the case of Cauchy frequency functions the mentioned differential equation will be that of Laplace.