HIBÁS SCALEREK (JELOSZTÓK) JELEINEK VALÓSZÍNŰSÉG-ELOSZLÁSÁRÓL

BÉKÉSSY ANDRÁS

Bevezetés

Mint ismeretes, a scaler (jelosztó) nagyon szapora jelek megszámlálására alkalmas elektronikus berendezés, amelynek működési elve a következő: a bemenő jelek — elektromos feszültség-lökések — a scaler első fokozatára kerülnek, amely két stabil állapottal rendelkező multivibrátorból áll. Rövidség kedvéért nevezzük az egyik állapotot »üres« állapotnak, a másikat »töltött« állapotnak. Az első bemenő jel az első fokozatot az üres állapotból töltöttbe billenti át, a második jel a töltött állapotból megint vissza az üresbe, az utóbbi billenés közben azonban az első fokozat jelet ad a második fokozat bemenetére. A második fokozat hasonló az elsőhöz : az első fokozat első jelére üres állapotból töltöttbe billen, a második jelre megint visszabillen, de eközben jelet ad a harmadik fokozatra, és így tovább. Láthatólag az első fokozat minden második, a második fokozat minden negyedik, általában az i-edik fokozat minden 2^i-edik bemenő jelre ad jelet a következő fokozatnak. Az utolsó fokozat kimenő jele végül is mechanikus számlálóhoz kerül, amely azt regisztrálja. Pl. 10 fokozat esetében a mechanikus számláló ilyenformán csak minden 1024-edik jelre van igénybevéve és így a közbeiktatott scaler lehetővé teszi olyan szapora jelek regisztrálását is, amelyeket különben a mechanikus számlálószerkezet, tehetetlensége folytán, nem tudna egyenkint megszámlálni, mert ilyen módon a még éppen megszámlálható jelsorozat sűrűségét nem a mechanikus számláló tehetetlensége, hanem a scalerfokozatok tehetetlensége határozza meg, amely az előbbinél több nagyságrenddel kisebb.

Így működik a scaler, ha jó. Mielőtt azonban a scalert egy készülékbe beépítenénk, természetesen meg kell győződnünk arról, hogy valóban jól működik-e. A hitelesítésnél a scalert ismert frekvenciájú periodikus jelekkel működtetjük. Ha azonban a scalert nem periodikusan érkező, hanem statisztikusan ingadozó időközökben érkező jelek fogják működtetni a mérés során, (mint pl. kozmikus sugárzást mérő készülék esetében), akkor nem árt a scalert ellenőrizni ilyen »statisztikus« jelekkel, még akkor is, ha előre tudjuk, hogy csak elhanyagolhatóan kis valószínűséggel fognak olyan jelek érkezni, amelyeknek egymástól való időbeli távolsága kisebb a scaler periodikus jelek segítségével megállapított felbontóképességénél. A scalereknek éppen statisztikus jelekkel való ellenőrzése még inkább szükségesnek látszik a folyamatos üzemben, amikor nem akarjuk a berendezésből kivenni, és a mérést megszakítani.

azonban mégis tudni akarjuk, hogy nem romlott-e el kísérlet közben. Kozmikus sugárzással kapcsolatos egyetlen folyamatos mérés hetekig tarthat, ez bőven elég idő ahhoz, hogy a beépített scalerek esetleg időközben hibássá váljanak.

Folyamatos ellenőrzés alapjául szolgálhat a következő gondolat: a scalert működtető jelek számának valószínűség-eloszlása határozza meg a mechanikus számláló jeleit, amelyek tehát szintén valamilyen valószínűség-eloszlást mutatnak. Ha a scaler rossz, akkor a mechanikus számláló más átlagos jelsűrűséget regisztrál, mint amilyent kellene, ezt azonban nem vesszük észre, mert nem tudjuk, hogy milyen volt a bemenő jelek sűrűsége. Várható azonban, hogy az átlagos sűrűségen kívül az egész eloszlás jellege megváltozik, eltorzul, és ebből az eltorzulásból következtethetünk a scaler hibás voltára. A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy egy bizonyos, a valóságban feltehetően gyakran előforduló scaler-hiba esetében milyen a torzulás.[1]

Megköszönöm *Jánossy Lajos* akadémikusnak, hogy a jelen problémára figyelmemet felhívta, és megköszönöm *Rényi Alfréd*-nak és *Frey Tamás*-nak a dolgozat írása folyamán tett értékes megjegyzéseiket.

1. §. A feladat felállítása

Tegyük fel, hogy a scaler hibája abban áll, hogy az egyes fokozatok nem billennek teljes biztossággal, hanem csak bizonyos valószínűséggel, pl. mert a fokozatok közötti jelek túl kicsinyek, vagy nem egyenlő amplitúdójúak. Tegyük fel, hogy egy k-fokozatú scaler i-edik fokozata az $(i-1)$-edik fokozat bemenő jelére $p_i^{(1)}$ valószínűséggel billen üres állapotból töltöttbe és $p_i^{(0)}$ valószínűséggel vissza. Lehetséges esetleg, hogy az $(i-1)$-edik fokozat tévesen nem ad le jelet az i-edik fokozatnak és így az utóbbi nem is billen. Ezt a hibalehetőséget azonban belefoglalva képzeljük a $p_i^{(0)}$, $p_i^{(1)}$ valószínűségekbe, vagyis feltesszük, hogy a töltöttből üres állapotba való átmenetnél a jel-leadás mindig megtörténik, legfeljebb az i-edik fokozat a jelre hibásan nem billen. Tegyük fel, hogy az egyes fokozatok billenései függetlenek. Tegyük fel, hogy a mechanikus számláló az utolsó fokozat kimenő jelét p_{k+1} valószínűséggel regisztrálja. Jó scaler esetében természetesen $p_i^{(0)} = p_i^{(1)} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $p_{k+1} = 1$.

Más jellegű hibát, mint pl. hogy valamelyik fokozat indító jel nélkül, »magától« billen, nem tételezünk fel. A billenések függetlenségét feltételezve elhanyagoljuk azt, hogy az egyes fokozatok felbontóképessége nem végtelen nagy.

Feltesszük, hogy a scalerre érkező jelek közötti időkülönbségek egymástól függetlenek és egyforma sűrűségfüggvényük van, sőt a végeredmény levezetésénél azt is, hogy az időegység alatt érkező jelek száma Poisson-eloszlást követ.

Más típusú hibák vizsgálatára, valamint gyengébb feltételek mellett való általánosabb eredmények kidolgozására egy későbbi alkalommal kívánunk visszatérni.

A mondott feltételek mellett ki akarjuk számítani annak $Q_n(t)$ valószínűségét, hogy t időpontban a mechanikus számláló n-et mutat, feltéve,

[1] A tárgyalás csupán a valószínűségszámítás tankönyveiben megtalálható ismeretekre támaszkodik. Lásd például: [1].

hogy a $t = 0$ időpontban a scaler minden fokozata üres volt és a mechanikus számláló is nullán állt.

Legyen $V_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$ a valószínűsége annak, hogy az i-edik fokozat első jelét a $(t, t + \Delta t)$ időintervallumban adja le, feltéve, hogy $t = 0$-ban az i-nél nem nagyobb sorszámú fokozatok üresek voltak. Legyen $V_i(t)$ Laplace-transzformáltja $v_i(s)$.[2] Ahhoz, hogy az i-edik fokozat $(t, t + \Delta t)$-ben leadja első jelét, előzőleg az $(i-1)$-edik fokozatnak valamilyen a számú jelet kellett leadni, amelyből az első $a - 1$ elveszett $[1 - p_i^{(1)}]^{a-1}$ valószínűséggel, az utolsó pedig $p_i^{(1)}$ valószínűséggel az i-edik fokozatot töltött állapotba billentette át ; azután újabb b számú jelet kellett leadnia, amelyekből az első $b - 1$ számú $(1 - p_i^{(1)})^{b-1}$ valószínűséggel megint elveszett, az utolsó pedig $p_i^{(0)}$ valószínűséggel az i-edik fokozatot újra üres állapotba billentette vissza, és így az első jelleadás megtörtént. Írhatjuk tehát :

$$V_i(t) = \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} [1 - p_i^{(1)}]^{a-1} [1 - p_i^{(0)}]^{b-1} p_i^{(1)} p^{(0)} V_{i-1}^{*a+b}(t),$$

ahol $V_{i-1}^{*a+b}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ jelöli annak valószínűségét, hogy az $(i - 1)$-edik fokozat az $(a + b)$-edik jelét éppen $(t, t + \Delta t)$-ben adja le. Az $(a + b)$-edik jel beérkezési ideje olyan valószínűségi változó, amely $a + b$ számú, egyenkint $V_{i-1}(t)$ sűrűségfüggvényű független változó összege. Áttérve tehát a valószínűségi sűrűségfüggvények Laplace-transzformáltjára :

$$v_i(s) = \sum_a \sum_b [1 - p_i^{(1)}]^{a-1} [1 - p_i^{(0)}]^{b-1} p_i^{(0)} p_i^{(1)} [v_{i-1}(s)]^{a+b},$$

vagy elvégezve az összegezést,

$$v_i(s) = \frac{p_i^{(1)} v_{i-1}(s)}{1 - (1 - p_i^{(1)}) v_{i-1}(s)} \cdot \frac{p_i^{(0)} v_{i-1}(s)}{1 - (1 - p_i^{(0)}) v_{i-1}(s)} . \tag{1}$$

Ez a rekurzív összefüggés az $i = 1$ esetben is érvényes marad, ha $V_0(t)\Delta t + o(\Delta t)$-vel annak valószínűségét jelöljük, hogy az első fokozatra $(t, t + \Delta t)$-ben érkezik az első jel.

Vezessük be a következő jelöléseket :

$$\begin{cases} p_i^{(0)} p_i^{(1)} = g_i^2, \\ p_i^{(1)} + p_i^{(0)} = 2a_i \end{cases} \tag{2}$$

Ezekkel a jelölésekkel egyszerű átalakítások után (1)-ből a következő viszonylag egyszerűbb egyenletet kapjuk :

$$\left(\frac{1}{v_i(s)} - 1\right) = \frac{1}{g_i^2} \left\{ \left[\left(\frac{1}{v_{i-1}(s)} - 1\right) + a_i \right]^2 - a_i^2 \right\} . \tag{3}$$

Legyen k számú fokozat és $W_n(t)\Delta t + o(\Delta t)$ a valószínűsége annak, hogy

[2] A következőkben további megjegyzés nélkül az egyes eloszlások idő szerinti Laplace-transzformáltjait a megfelelő kis betűvel fogjuk jelölni.

a mechanikus számláló éppen t és $t+\Delta t$ között ugrik n-ről $(n+1)$-re. Hasonlóképpen az előbbiekhez, könnyen belátható, hogy

$$\frac{1}{w_1(s)} - 1 = \frac{1}{p_{k+1}}\left(\frac{1}{v_k(s)} - 1\right), \tag{4}$$

és

$$w_n(s) = [w_1(s)]^n \cdot \tag{5}$$

Végül a keresett $Q_n(t)$ valószínűség a $W_n(t)$-vel a következőképpen függ össze:

$$Q_n(t) = \int_t^\infty [W_{n+1}(\tau) - W_n(\tau)]\, d\tau, \tag{6}$$

$$Q_0(t) = \int_t^\infty W_1(\tau)\, d\tau \cdot \tag{7}$$

Hiszen ha az $(n+1)$-edik jel a t időpont után érkezett meg az utolsó fokozatról, akkor a mechanikus számláló mutathat 0-tól n-ig akármit, ha pedig az n-edik jel érkezett t után, akkor 0-tól $(n-1)$-ig akármit. Tehát:

$$\int_t^\infty W_{n+1}(\tau)\, d\tau = Q_0(t) + Q_1(t) + \ldots + Q_{n-1}(t) + Q_n(t),$$

$$\int_t^\infty W_n(\tau)\, d\tau = Q_0(t) + Q_1(t) + \ldots + Q_{n-1}(t) \cdot$$

A felső egyenlőségből kivonva az alsót, megkapjuk a (6) összefüggést, míg (7) egyszerűen azt fejezi ki, hogy a számláló akkor és csak akkor mutathat nullát, ha az első jel t után érkezett.

Vezessük be a $Q_n(t)$ valószínűségek generátorfüggvényét:

$$G(u\,;t) + \sum_{n=0}^\infty u^n Q_n(t), \tag{8}$$

illetve ennek t szerinti Laplace-transzformáltját:

$$g(u\,;s) = \int_0^\infty G(u\,;t)\, e^{-st}\, dt = \sum_{n=0}^\infty u^n q_n(s), \tag{9}$$

akkor a (4)—(9) összefüggések felhasználásával:

$$g(u\,;s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + (1-u)\dfrac{p_{k+1} V_k(s)}{1 + v_k(s)}} \cdot \tag{10}$$

$V_0(t)$ ismeretében (1) segítségével kiszámítható $v_k(s)$, azután (10)-ből $g(u\,;s)$ és végül — legalább is elvben — $Q_n(t)$.

2. §. *A hibátlan scaler esete*

Most $p_i^{(1)} = p_i^{(0)} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, és így az (1) és (10) összefüggések a következőkre redukálódnak:

$$v_i(s) = v_{i-1}^2(s), \quad g(u\,;s) = \frac{1}{s}\,\frac{1 - v_k(s)}{1 - u\,v_k(s)},$$

vagyis

$$g(u\,;s) = \frac{1}{s}\,\frac{1 - v_0^{2^k}(s)}{1 - u\,v_0^{2^k}(s)}. \tag{11}$$

Írhatjuk tehát:

$$Q_n(t) = \int_0^t [V_0^{*2^k n}(\tau) - V_0^{*2^k(n+1)}(\tau)]\,d\tau, \tag{12}$$

ahol $V_0^{*r}(t)$ jelenti $V_0(t)$-nek önmagával való r-szeres kompozícióját, jelekben

$$V_0^{*r}(t) = \int_0^t V_0(t - \tau_1)\,d\tau_1 \int_0^{\tau_1} V_0(\tau_1 - \tau_2)\,d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{r-2}} V_0(\tau_{r-2} - \tau_{r-1})\,V_0(\tau_{r-1})\,d\tau_{r-1}$$

A (12) eredmény triviális, hiszen $\int_0^t V_0^{*2^k n}(\tau)\,d\tau$ jelenti annak valószínűségét, hogy az $n2^k$-adik jel a t időpont előtt érkezik, de az $(n+1)\,2^k$-adik jel t-ig még nem érkezett meg, vagy ami ugyanaz, hogy a $(0, t)$ intervallumban vagy $n2^k$, vagy $n2^k + 1, \ldots,$ vagy $(n+1)\,2^k - 1$ jel futott be, amelyekből n jutott a mechanikus számlálóra.

Ha a bemenő jelek egymástól függetlenek és egy jel beérkezésének valószínűsége a Δt időintervallumban $p\,\Delta t + o(\Delta t)$ (Poisson-folyamat), akkor mint ismeretes:

$$V_0(t) = pe^{-pt}\ .$$

tehát $v_0(s) = \dfrac{p}{s+p}$, és (10) szerint

$$q_n(s) = \frac{1}{s}\left[\frac{p^{n\,2^k}}{(s+p)^{n\,2^k}} - \frac{p^{(n+1)2^k}}{(s+p)^{(n+1)2^k}}\right],$$

ebből pedig inverz Laplace-transzformációval

$$Q_n(t) = \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \frac{(pt)^{n\,2^k+\nu}}{(n2^k+\nu)!}\,e^{-pt}\ . \tag{13}$$

Mivel a bemenő jelek Poisson-folyamatot alkotnak, $\dfrac{(pt)^{n2^k+\nu}}{(n2^k+\nu)!}\,e^{-pt}$ a valószínűsége annak, hogy t idő alatt $n2^k+\nu$ jel érkezzék és így a (13) eredmény megint csak triviális, mert egyszerűen csak azt fejezi ki, hogy a mechanikus számláló akkor mutat n-et, ha vagy $n2^k$, vagy $n2^k+1, \ldots$, vagy $(n+1)\,2^k-1$ bemenő jel érkezett t idő alatt.

Az eloszlás momentumainak meghatározására szolgálhat a következő meggondolás: a faktoriális momentumokat a generátorfüggvény deriváltjai adnák, Laplace-transzformáltjaikat tehát a generátorfüggvény Laplace-transzformáltjainak megfelelő deriváltjai adják. Képezzük ezeket a deriváltakat:

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{u=1} &= \frac{p^{2^k}}{s}\,\frac{1}{(s+p)^{2^k}-p^{2^k}},\\
\left.\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right|_{u=1} &= \frac{2!\,(p^{2^k})^2}{s}\,\frac{1}{[(s+p)^{2^k}-p^{2^k}]^2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

A (14) jobboldalán álló mennyiségek inverzei rendre adják a faktoriális momentumokat. Mármost pl. a $\dfrac{p^{2^k}}{s}\,\dfrac{1}{(s+p)^{2^k}-p^{2^k}}$ kifejezésről látható, hogy $s=0$ a nevezőben álló polinom kétszeres gyöke, az összes többi gyökök pedig $-p\left(1-\exp\dfrac{2i\pi\nu}{2^k}\right)$ $(\nu=1,\,2,\,\ldots,\,2^k-1)$ alakúak. Tehát a parciális-tört forma

$$
\frac{A_0^{(1)}}{s^2}+\frac{A_1^{(1)}}{s}+\sum_{\nu}\frac{C_\nu}{s+p\left(1-\exp\dfrac{2i\pi\nu}{2^k}\right)}
$$

volna, az inverz transzformált pedig, amely n várható értéke, ennek megfelelően:

$$
\mathbf{M}(n)=\bar{n}=A_0^{(1)}t+A_1^{(1)}+\sum_{\nu}C_\nu\exp\{-pt\,(1-e^{2i\pi\nu/2^k})\}\,.
$$

Ha t elég nagy,

$$
t \gg \frac{1}{2p\sin^2\dfrac{\pi}{2^k}},
$$

akkor a fenti Σ alatti tagok már elhanyagolhatóan kicsinyek és akkor $\mathbf{M}(n)=\bar{n}\sim A_0^{(1)}t+A_1^{(1)}$. (Az $\sim$ jelet $t\to\infty$ értelemben használjuk.) $A_0^{(1)}$ értékére $p2^{-k}$, $A_1^{(1)}$-ére pedig $\dfrac{1-2^{-k}}{2}$ adódik, tehát

$$
\mathbf{M}(n)=\bar{n}=pt\cdot 2^{-k}-(1-2^{-k})\,/\,2+O\,(e^{-ct})\,.
$$

Hasonlóképpen számíthatók a magasabb momentumok is nagy t esetében. A

$$\left.\frac{\partial^m g}{\partial u^m}\right|_{u=1} = \frac{m!\,(p^{2^k})^m}{s}\,\frac{1}{[(s+p)^{2^k}-p^{2^k}]^m}$$

kifejezés parciális tört-alakja a következő:

$$m!\,(p^{2^k})^m \left\{ \frac{A_0^{(m)}}{s^{m+1}} + \frac{A_1^{(m)}}{s^m} + \ldots + \frac{A_m^{(m)}}{s} + R(s) \right\},$$

ahol $R(s)$ olyan törtfüggvény, amelynek $s = 0$ már nem pólusa. Könnyen belátható, hogy

$$A_l^{(m)} = \frac{1}{e!}\frac{d^l}{ds^l}\left[\frac{s}{(s+p)^{2^k}-p^{2^k}}\right]^m_{s=0},$$

és innen

$$\mathbf{M}\,[n\,(n-1)\ldots(n-m+1)] \sim (p^{2^k})^m\,[A_0^{(m)}\,t^m + m\,A_1^{(m)}\,t^{m-1} + \ldots + m!\,A_m^{(m)}].$$

Ki kell számítani tehát az $A_l^{(m)}$ együtthatókat. Mivel az $A_l^{(m)}$-ek az $\left(\frac{s}{(s+p)^{2k}-p^{2k}}\right)^m$ függvény $s = 0$ körüli Taylor-sorának együtthatói, előállítjuk ezt a sort:

$$\left(\frac{s}{(s+p)^{2^k}-p^{2^k}}\right)^m = \frac{1}{2^{mk}\,p^{m(2^k-1)}}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\binom{-m}{\lambda}\left[\sum_{n=1}^{2^k-1}\binom{2^k}{n+1}\left(\frac{s}{p}\right)^n\frac{1}{2^k}\right]^{\lambda},$$

és így az $A_l^{(m)}$ mennyiségeket s megfelelő hatványainak együtthatói adják. Ilyen módon számítva például a szórásnégyzet kifejezése a következő:

$$\text{(15)} \qquad \mathbf{D}^2(n) = \sigma^2 = \frac{pt}{2^{2k}} - \frac{(1-2^{-k})(2-2^{-k})}{6} + O(te^{-ct}).$$

A magasabb momentumok számítása meglehetősen fáradságos, de a jelzett úton elvégezhető. Látható, hogy az eloszlás várható értéke a bemenő jelszám várható értékének 2^k-ad részére csökken, amint ez nagyon természetes is, a szórás azonban még relatíve is lecsökken: míg a bemenő Poisson-eloszlásnál $\frac{\sigma^2}{\overline{n}} = 1$, itt $\frac{\sigma^2}{\overline{n}} \sim \frac{1}{2^k}$, ha t elég nagy.

Mindezek a hibátlan scalerre vonatkozó eredmények vagy triviálisak, vagy pedig elemi eszközökkel egyszerűbben is elérhetőek[3], az alábbiakban tárgyalásra kerülő hibás scaler esetében azonban már kényelmesebb éppen a fenti tárgyalásmódot választani mintának.

3. §. A hibás scaler esete

A generátorfüggvény Laplace-transzformáltját (10) adja meg, $v_k(s)$ pedig (3)-ból számítható. Egyszerűség kedvéért legyen

$$\frac{1}{v_k(s)} - 1 = u_k(s) ,$$

vagyis (3) szerint

$$u_i(s) = \frac{1}{g_i^2}\left[\left(u_{i-1}(s) + a_i\right)^2 - a_i^2\right]. \tag{16}$$

Ha a bemenő jelek Poisson-folyamatot alkotnak, akkor mint az előbb, $v_0(s) = \frac{p}{s+p}$, és a (16) rekurzióból látható, hogy $u_k(s)$ az s-nek 2^k-adfokú polinomja lesz, amelynek $s = 0$ egyszerű gyöke.

Míg a $Q_n(t)$ Laplace-transzformáltjának meghatározása (10)-ből egyszerű:

$$q_n(s) = \frac{p_{k+1}^n}{s\left[u_k(s) + p_{k+1}\right]^n} - \frac{p_{k+1}^{n+1}}{s\left[u_k(s) + p_{k+1}\right]^{n+1}},$$

a visszatranszformálás általánosságban nagyon fáradságos volna, bár elvileg semmi akadálya sincs. Megelégszünk az eloszlás várható értékének és szórásának kiszámításával — mint az előbb, nagy t esetére. Ugyanúgy, mint előbb:

$$\mathbf{M}(n) = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} + O(e^{ct})$$

$$\mathbf{M}[n(n-1)] = \frac{1}{2} A_0^{(2)} t^2 + A_1^{(2)} t + A_0^{(2)} + O(e^{-ct}) ,$$

ahol

$$A_l^{(m)} = \frac{m!}{l!} \frac{d^l}{ds^l}\left[\frac{p_{k+1}\, s}{u_k(s)}\right]^n_{s=0} . \tag{17}$$

Az $A_l^{(m)}$ együtthatók meghatározásához szükségünk lesz $u_k(s)$ deriváltjainak az $s = 0$ helyen felvett értékére. A (16) szerint

$$u_i'(0) = \frac{2a_i\, u_{i-1}'(0)}{g_i^2} \qquad i = 1, 2, \ldots, k ,$$

tehát $u_0'(0) = \frac{1}{p}$ miatt

[3] Lásd például: [1], 9. fejezet 25. feladat, p. 334—335.

$$u_i'(0) = \frac{2^k a_1 a_2 \ldots a_k}{p g_1^2 g_2^2 \ldots g_k^2},$$

továbbá

$$u_i''(0) = \frac{2 a_i}{g_i^2} u_i''(0) + \frac{2}{g_i^2} [u_{i-1}'(0)]^2,$$

vagyis

$$\frac{u_i''(0)}{[u_i'(0)]^2} = \frac{g_i^2}{2a_i} \frac{u_{i-1}''(0)}{[u_{i-1}'(0)]^2} + \frac{g_i^2}{2 a_i^2},$$

és $u_0''(0) = 0$ miatt végül is

$$\frac{u_k''(0)}{[u_k'(0)]^2} = \frac{g_k^2}{2 a_k^2} + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2}{2^2 a_k a_{k-1}^2} + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2 g_{k-2}^2}{2^3 a_k a_{k-1} a_{k-2}^2} + \ldots + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2 g_{k-2}^2 \ldots g_1^2}{2^k a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_2 a_1^2}.$$

Írhatjuk tehát :

$$A_0^{(1)} = \lim_{s \to 0} \frac{s p_{k+1}}{u_k(s)} = \frac{p_{k+1} p g_1^2 g_2^2 \ldots g_k^2}{2^k a_1 a_2 \ldots a_k},$$

$$A_1^{(1)} = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{s p_{k+1}}{u_k(s)} \right) = -\frac{1}{2} \frac{u_k''(0)}{[u_k'(0)]^2},$$

hasonlóképpen

$$A_0^{(2)} = [A_0^{(1)}]^2, A_1^{(2)} = 4 A_0^{(1)} A_1^{(1)},$$

és így a várható értékre, illetve szórásnégyzetre a következő kifejezést kapjuk:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{M}(n) = \bar{n} \sim \frac{p_{k+1} g_1^2 g_2^2 \ldots g_k^2}{a_1 a_2 \ldots a_k} \frac{pt}{2^k} \\ &\sigma^2 \sim \bar{n} \left[1 - p_{k+1} \left(\frac{g_k^2}{2 a_k^2} + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2}{4 a_k a_{k-1}^2} + \ldots + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2 \ldots g_1^2}{2^k a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1^2} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Mint látható,

$$(19) \quad \frac{\sigma^2}{\bar{n}} \sim 1 - p_{k+1} \left(\frac{g_k^2}{2 a_k^2} + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2}{4 a_k a_{k-1}^2} + \ldots + \frac{g_k^2 g_{k-1}^2 \ldots g_1^2}{2^k a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1^2} \right) \geq$$

$$\geq 1 - p_{k+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{g_k}{4} + \frac{g_k g_{k-1}}{8} + \ldots + \frac{g_k g_{k-1} \ldots g_2}{2^k a_k a_{k-1} \ldots a_2} \right) \geq \frac{1}{2^k},$$

vagyis nagyobb, mint a hibátlan scaler esetében. Folyamatos mérésnél tehát a $\sigma^2/\bar{n}$ arány abnormisan nagy értékének scaler-hiba lehet az egyik valószínű oka. Mivel kozmikus sugárzás mérésénél úgyis éppen az időegység alatt beérkező jelek számát mérjük, ebből az empirikus várható értéket és empirikus szórást számíthatjuk, a szórásnégyzet/várható érték arány becsülhető.

A fenti arány a hibákra meglehetősen érzékeny, így pl. 10-fokozatú scaler esetében, ha $p_i^{(0)} = p_i^{(1)} = 0,9999$, akkor a várható érték csökkenése a hibátlan scalerhez viszonyítva csupán egy ezrelék, a szórásnégyzet/átlag növekedése viszont ugyanekkor 10%. Mindenesetre magasabb fokozatok hibájára az arány érzékenyebb. Az első fokozat hibája csak akkor növeli az arányt, ha $p_1^{(0)} \neq p_1^{(1)}$.

IRODALOM

[1] Rényi A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СИГНАЛОВ ПОВРЕЖДЕННЫХ СКЭЛЕРОВ

А. Бекешши

Резюме

Скэлеры, встроенные в приборы для счета космических частиц, в течение долговременного действия могут выходить из строя. В таком случае желательно обнаружить дефект без прерывания эксперимента. Если некоторые импульсы не регистрируются скэлером, то кажущееся число частиц уменьшается, однако, отсюда нельзя вывести заключение, так как верное число частиц заранее неизвестно.

Из распределения чисел частиц, приходящих на единицу времени, можно вычислять распределение числа импульсов, исходящих из скэлера. Однако, это последнее распределение искажается, если скэлер не работает безупречно: оказывается, что отношение дисперсии к математическому ожиданию больше, чем для безошибочного скэлера, если только число импульсов, приходящих в одинаковые интервалы времени, подвергается распределению Пуассона, а дефект скэлера заключается в том, что отдельные каскады, получив сигнал, не действуют непременно, но только с вероятностью < 1. В соответствии с двумя возможными состояниями отдельных каскадов, обозначим эти вероятности через $p_i^{(0)}, p_i^{(1)}$ $(i = 1, 2 \ldots, k)$, где k число каскадов. p_{k+1} вероятность действия механического счетного прибора в конце скэлера. Если i-ый каскад безошибочный, то $p_i^{(0)} = p_i^{(1)} = 1$. Положение иллюстрируется формулами (18) и (19) а также формулой (2); при этом однако предполагается, что одинаковые интервалы времени, в конце которых проводятся отсчеты, имеют достаточную длительность. Отношение (19) можно оценить исходя из эмпирического ожидания и из дисперсии. Если это отношение значительно превышает $\frac{1}{2k}$, то можно скэлер считать испорченным. Другие источники ошибок, а также и то обстоятельство, что четкость разложения скэлеровых каскадов не бесконечна, при наших выводах пренебрегались.

ÜBER DER WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG DER IMPULSANZAHL BEI FEHLERHAFT ARBEITENDEN UNTERSETZERN

A. BÉKÉSSY

Zusammenfassung

Die Untersetzer (scaler), welche für Abzählung kosmischer Teilchen in irgendwelchen Apparaten eingebaut sind, und seit längerer Zeit arbeiten, werden während des Betriebs möglicherweise fehlerhaft. Es ist erwünscht solche Fehler ohne Unterbrechung des Experimentes aufzudecken. Wenn ein Untersetzer einige Impulse nicht registriert, so vermindert sich die scheinbare Teilchenzahl, daraus kann aber keine Folgerung gezogen werden, weil die tatsächliche Teilchenanzahl vorher unbekannt ist.

Aus der Verteilung der Teilchenanzahl, die in der Zeiteinheit ankommt, kann man auch die Verteilung der vom Untersetzer ausgehenden Impulssignale berechnen. Diese letztere Verteilung verändert sich aber, wenn etwaige Fehler vorhanden sind und zwar es stellt sich heraus, dass das Verhältnis des Streuungsquadrats zum Erwartungswert grösser wird, als beim fehlerfreien Untersetzer, vorausgesetzt, dass die ankommenden Impulse einen Poissonschen Prozess bilden und der Fehler des Untersetzers besteht darin, dass die einzelnen Stufen, wenn sie einen Impuls bekommen, nicht mit Sicherheit, sondern nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit, die kleiner als Eins ist, funktionieren. Den zwei möglichen Zuständen der einzelnen Stufen entsprechend sind diese Wahrscheinlichkeiten mit $p_i^{(0)}$, $p_i^{(1)}$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ bezeichnet, wo k die Anzahl der Stufen ist, p_{k+1} bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der mechanische Zählapparat am Ende des Untersetzers, funktioniert. Ist die i-te Stufe fehlerfrei, so ist $p_i^{(0)} = p_i^{(1)} = 1$. Die Formeln (18), (19) nebst (2) zeigen die Verhältnisse, dabei ist aber noch vorausgesetzt, dass diejenigen gleichlangen Zeitintervalle, an deren Ende das Ablesen erfolgt, lang genug sind. Man kann das Verhältnis (19) aus dem empirischen Erwartungswert und aus der empirischen Streuungsquadrats abschätzen und wenn dieses Verhältnis viel grösser als $\frac{1}{2k}$ wird, so kann man einen Fehler in dem Untersetzer vermuten. Andere Fehlermöglichkeiten sind nicht in Rücksicht genommen. Auch die Tatsache, dass das Auflösungsvermögen des Untersetzers nicht unendlich gross ist, wurde ausser Acht gelassen.