

MOZDONYOK VÁRAKOZÁSI IDEJÉRŐL

SARKADI KÁROLY

Az alábbi probléma a MÁV-nál a gyakorlatban merült fel, Intézetünk-höz megoldás végett a *Közlekedéstudományi Műszaki Egyetem (Szolnok) Matematikai Tanszéke* küldte meg.

Tegyük fel, hogy egy állomásra naponta n számú vonat érkezik be, és ugyanannyi távozik onnan. A menetrendi adatokat valószínűségi változóknak tekintjük, úgy hogy mind az érkezések, mind az indulások egyenletesen oszlanak el a nap folyamán. Feltételezzük, hogy adott menetrend esetén csak annyi mozdonyral látják el a vonatok közlekedését, amennyire feltétlenül szükség van, és így a mozdonyok átlagos várakozási ideje az állomáson a lehető legkisebb. A feladat az így adódó átlagos várakozási idő várható értékének kiszámítása.

Feltételezzük, hogy a vonatok érkezései és indulásai a nap folyamán egyenletesen oszlanak el: azaz az n vonat érkezési időpontja, nap-egységben kifejezve n darab, a $(0,1)$ számközben egyenletes eloszlású valószínűségi változó, ugyanúgy az n indulásé is.

Jelöljük a t időpontban az állomáson tartózkodó mozdonyok számát ξ_t -vel, a nap kezdetétől a t időpontig beérkezett vonatok számát η_t -vel, az ugyanaz idő alatt kifutott vonatok számát ζ_t -vel. Nyilván fennáll ξ_t és ξ_0 között a következő összefüggés:

$$(1) \quad \xi_t = \xi_0 + \eta_t - \zeta_t.$$

A mozdonyok összes várakozási idejét megkapjuk, ha a várakozó mozdonyok számát megszorozzuk a várakozási idővel. Mivel az előbbi a nap folyamán változik, tehát integrálva,

$$\int_0^1 \xi_t dt$$

lesz az összes mozdony együttes várakozási ideje 1 nap alatt. Mivel naponta n mozdony érkezik be, így egy mozdony átlagos várakozási ideje a beérkezéstől számítva:

$$(2) \quad \mu = \frac{1}{n} \int_0^1 \xi_t dt$$

Mivel μ maga még valószínűségi változó, $\mathbf{M}(\mu)$ értékét kell kiszámítanunk, ez lesz az egy mozdony várakozási idejének a várható értéke. ξ_t értelmezésénél fogva csak nemnegatív értékeket vesz fel. A mozdonyok akkor vannak jól kihasználva, ha van olyan időpont a nap folyamán, amikor $\xi_t = 0$. Ellenkező esetben ugyanis egy mozdonyt el lehet még vinni az állomásról, anélkül, hogy ez a közlekedésben fennakadást okozna. Feltételezve tehát, hogy a mozdonyok kihasználását a konkrét menetrend által megszabott lehetőségén belül a lehető legjobban biztosítják, min $\xi_t = 0$ és így az (1)-ből

$$\xi_0 = \max (\zeta_t - \eta_t),$$

tehát

$$\xi_t = \max (\zeta_t - \eta_t) + \eta_t - \zeta_t.$$

Ha ezt a (2) képletbe beírjuk és figyelembe vesszük, hogy η_t és ζ_t egyforma eloszlásúak és így

$$\mathbf{M} \left(\int_0^1 \eta_t dt \right) = \mathbf{M} \left(\int_0^1 \zeta_t dt \right),$$

kapjuk, hogy

$$\mathbf{M}(\mu) = \frac{1}{n} \mathbf{M} \{ \max (\zeta_t - \eta_t) \}.$$

A $\frac{\zeta_t}{n}$ -et egy, a (0,1) intervallumban egyenletes eloszlású változóból vett n -elemű minta empirikus eloszlásfüggvényének, $\frac{\eta_t}{n}$ -et pedig egy ugyanabból az eloszlásból vett, az előbbitől független minta empirikus eloszlásfüggvényének tekinthetjük. Két ilyen empirikus eloszlásfüggvény különbsége szélső értékének az eloszlása ismeretes. *Gnyegyenko* és *Koroljuk* egy tétele szerint [1]

$$\mathbf{P} \{ \max (\zeta_t - \eta_t) \leq x \} = 1 - \frac{\binom{2n}{n-x-1}}{\binom{2n}{n}},$$

ha x nemnegatív egész szám. Ebből

$$\mathbf{M} \{ \max (\zeta_t - \eta_t) \} = \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} - \frac{1}{2},$$

tehát

$$(3) \quad \mathbf{M}(\mu) = \frac{1}{2n} \left\{ \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} - 1 \right\}.$$

$\mathbf{M}(\mu)$ -nek a fenti képlet alapján kiszámított értékét n -nek 1-től 10-ig terjedő értékeire a függeléként közölt táblázat tünteti fel.

n nagy értékei esetén számolhatunk a fenti képletből a Stirling-formula alkalmazásából adódó

$$\mathbf{M}(\mu) \sim \frac{\sqrt{n\pi} - 1}{2n}$$

képlettel. Ez a közelítő képlet már $n = 10$ esetén is egy tized óránál kisebb eltéréssel adja meg $\mathbf{M}(\mu)$ értékét.

Ezzel feltett kérdésünkre a választ meg is adtuk. Az alábbiakban az eredményt néhány megjegyzéssel egészítjük ki.

A bizonyításban nem használtuk ki azt, hogy az indulások, illetve érkezések eloszlása egyenletes, tehát eredményünk abban az esetben is érvényes, ha pl. a nap egyik szakában sűrűbben érkeznek és indulnak a vonatok, mint egy másik napszakban. Szükséges azonban, hogy az érkezések eloszlása meg-egyezzék az indulások eloszlásával.

A függetlenség feltevésén is enyhíteni lehet: elég, ha az indulások és érkezések időpontjai $2n$ darab ekvivalens valószínűségi változó (ezen azt értjük, hogy közülük bárhogyan választunk ki k darabot, ezek együttes eloszlása nem függ attól, hogy melyik k -t választottuk ki). A Gnyegyenko — Koroljuk-tétel ugyan csak függetlenség esetére vonatkozik, azonban bizonyítása minden további nélkül nyilvánvalóan érvényes ekvivalens változók esetére. Ez a bizonyítás ugyanis abból a feltevésből, hogy a $2n$ darab változó független és egyforma eloszlású, csak annyit használ ki, hogy a belőlük alkotott rendezett mintában a változók bármilyen sorrendje egyformán lehetséges. Ez viszont akkor is fennáll, ha a változók csak ekvivalensek. Így tehát azzal a feltétellel, hogy az érkezések és indulások sem külön-külön, sem egymás között nem eshetnek egymáshoz bizonyos időköznel (pl. fél óránál) közelebb, eredményünk érvényes marad.

Ha ezt az időközt a pálya foglaltságának ideje szabja meg, akkor bizonyára a valóságban — fentitől eltérően — az lesz a helyzet, hogy az indulások nem eshetnek egymáshoz bizonyos t_0 időköznel közelebb, ugyanúgy az érkezések sem; ezzel szemben érkezés után indulás azonnal történhetik, míg indulást követően csak $2t_0$ idő múlva lehet legközelebb érkezés. Fenti meg-gondolásaink akkor is érvényesek maradnak, csak az indulások időpontjai helyett a náluk t_0 -al későbbi időpontokat kell azokban szerepeltetnünk.

Nem marad viszont érvényes a fenti eredmény abban az esetben, ha figyelembe vesszük, hogy mikor egy mozdony befut az állomásra, ugyanaz a mozdony nem indulhat el onnan rögtön, hanem csak egy bizonyos idő múlva. Ennek a feltételnek a figyelembevétele további számításokat tesz szükségessé.

Megoldásra váró probléma továbbá az összes várakozási idő eloszlásának, vagy legalább szórásának meghatározása.

Függelék

Mozdonyok száma	Egy mozdonyra eső várakozási idő óra
1	12
2	10
3	8,8
4	7,97
5	7,35
6	6,87
7	6,39
8	6,14
9	5,86
10	5,61

IRODALOM

[1] Б. В. ГНЕДЕНКО—В. С. КОРОЛЮК : «О максимальном расхождении двух эмпирических распределений.» Доклады Академии Наук СССР 80 (1951) 525—528.

О ВРЕМЕНИ ПРОСТОЯ ПАРОВОЗОВ

К. Шаркади

Резюме

В настоящей работе рассматривается следующая проблема : на железнодорожную станцию ежедневно прибывают n поездов, и отбывает такое же число поездов. Прибытия и отбывания рассматриваются по графику как $2n$ эквивалентные случайные величины. Предположим, что в течение дня наступает момент, когда на станции нет ни одного паровоза. При таких предположениях математическое ожидание для времени простоя отдельного паровоза дается формулой (3). Автор использовал при доказательстве теорему Гнеденко и Королюка о сравнении двух проб [1].

ON THE WAITING-TIME OF LOCOMOTIVES

K. SARKADI

Summary

Suppose that there are n trains arriving every day to a railway-station and the same number of trains leaving it. The moments of arrivals and departures will be regarded as $2n$ equivalent random variables. Suppose that during the day there is a moment when no locomotive stays in the station. In this case the expected waiting-time of a single locomotive is given by (3). In the proof the author utilizes a theorem of Gnedenko and Korolyuk concerning the comparison of two samples [1].