IMPLICIT ALAKÚ FÜGGVÉNYKAPCSOLATOK ÁBRÁZOLÁSA PONTSOROS NOMOGRAMMOKKAL

BOTOS GYÖRGY[1] és HOSSZÚ MIKLÓS[2]

Bevezetés

Dolgozatunkban egyrészt a (6), (14) és (24) — vagy más alakban az (5), (15) és (27) — alatti differenciálegyenlet-kritériumokat adjuk meg implicit alakú függvénykapcsolat pontsoros nomogrammal való ábrázolhatóságának eldöntésére, másrészt pedig módszert mutatunk a skálafüggvények meghatározására is [(4), (20)]. A probléma felvetése *Hajós György*-től származik. Az egyes tételekhez fűzött megjegyzések útmutatást nyújtanak arra, hogy adott esetben hogyan lehet eldönteni kritériumaink alapján az ábrázolhatóság kérdését, és hogyan lehet meghatározni a skálafüggvényeket.[3].

Az 1. és 2. § a három, illetve négy egyenes tartójú kapcsolt nomogrammal ábrázolható $u(x, y, z) = 0$, illetve $u(x, y, t, z) = 0$ implicit alakú függvényekkel foglalkozik, a 3. § pedig a két egyenes és egy görbe tartóval ábrázolhatókkal.

1. §.

Ismeretes, hogy a három egyenes tartós pontsoros nomogrammal ábrázolható $z = z(x, y)$ függvények legáltalánosabb alakja :

$$Z(z) = X(x) + Y(y), \quad [z = z(x, y)]. \tag{1}$$

P. *Saint-Robert*-től [2] származik a

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{z_x}{z_y} = 0 \tag{2}$$

differenciálegyenlet-kritérium, melynek teljesülése szükséges és elegendő ahhoz, hogy $z = z(x, y)$ (1) alakú legyen. (2) igen egyszerűen nyerhető (1)-ből x, illetve y szerinti deriválással, ha a két kapott egyenlet hányadosát képezzük :

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{X'(x)}{Y'(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}. \tag{3}$$

[1] Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen
[2] Rákosi Mátyás Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc
[3] E tekintetben *Aczél János*-nak [1] az explicit alakú függvénykapcsolat esetén követett módszerét használtuk fel, átírva a megfelelő képleteket implicit alakú függvénykapcsolat esetére.

Ennek logaritmusát x, majd y szerint deriválva kapjuk (2)-t. (3) egyszersmind megadja a független változók skálafüggvényeit is:

$$X(x) = \int \varphi(x)\,dx\,,\quad Y(y) = \int \psi(y)\,dy. \tag{4}$$

Az $u(x, y, z) = 0$ implicit függvény esetében tehát problémánk megoldást nyer, ha a szereplő képletekben $z(x, y)$ parciális deriváltjait kifejezzük $u\,(x, y, z)$ parciális deriváltjaival:

$$z_x = -\frac{u_x}{u_z}\,,\quad z_y = -\frac{u_y}{u_z}\,.$$

Ezekkel (3) így alakul:

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}\,,\quad [u(x, y, z) = 0]\,. \tag{5}$$

Képezzük az (5) x szerinti logaritmikus deriváltját, és helyettesítsük be z_x értékét:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\log u_x - \log u_y] = \frac{u_{xx} + u_{xz} z_x}{u_x} - \frac{u_{yx} + u_{yz} z_x}{u_y} =$$

$$= \frac{u_{xx}}{u_x} - \frac{u_{xz}}{u_z} - \frac{u_{xy}}{u_y} + \frac{u_{yz} u_x}{u_y u_z}\,.$$

Mégegyszer deriválva y szerint, és z_y értékét behelyettesítve:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\log\frac{u_x}{u_y} = \frac{\left(u_{xxy} - u_{xxz}\dfrac{u_y}{u_z}\right)u_x - \left(u_{xy} - u_{xz}\dfrac{u_y}{u_z}\right)u_{xx}}{u_x^2} -$$

$$- \frac{\left(u_{xyz} - u_{xzz}\dfrac{u_y}{u_z}\right)u_z - \left(u_{zy} - u_{zz}\dfrac{u_y}{u_z}\right)u_{xz}}{u_z^2} -$$

$$- \frac{\left(u_{yyx} - u_{yxz}\dfrac{u_y}{u_z}\right)u_y - \left(u_{yy} - u_{yz}\dfrac{u_y}{u_z}\right)u_{xy}}{u_y^2} +$$

$$+ \frac{\left(u_{yyz} - u_{yzz}\dfrac{u_y}{u_z}\right)u_x + \left(u_{xy} - u_{xz}\dfrac{u_y}{u_z}\right)u_{yz}}{u_y^2 u_z^2}\,u_y u_z -$$

$$- \frac{\left(u_{yy} - u_{yz}\dfrac{u_y}{u_z}\right)u_z + \left(u_{zy} - u_{zz}\dfrac{u_y}{u_z}\right)u_y}{u_y^2 u_z^2}\,u_{yz} u_x = 0.$$

Beszorozva az egyenletet $u_x^2\, u_y^2\, u_z^2$-nel, és az összevonásokat elvégezve:

$$u_{xxy}\, u_x\, u_y^2\, u_z^3 - u_{xxz}\, u_x\, u_y^3\, u_z^2 + u_{yyz}\, u_x^3\, u_y\, u_z^2 - u_{yyx}\, u_x^2\, u_y\, u_z^3 +$$

$$+ u_{xzz}\, u_x^2\, u_y^3\, u_z - u_{yzz}\, u_n^3\, u_y^2\, u_z + u_{xx}\, u_y^2\, u_z^2\, (u_{xz}\, u_y - u_{xy}\, u_z) +$$

$$+ u_{yy}\, u_x^2\, u_z^2\, (u_{xy}\, u_z - u_{yz}\, u_x) + u_{zz}\, u_x^2\, u_y^2\, (u_{yz}\, u_x - u_{xz}\, u_y) = 0$$

a keresett differenciálegyenlet. A

$$\partial_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial i} & \frac{\partial}{\partial j} \\ u_i & u_j \end{vmatrix}$$

jelölés bevezetésével ez így is írható:

$$u_x\, u_y^2\, u_z^2\, \partial_{yz}\, u_{xx} + u_y\, u_z^2\, u_x^2\, \partial_{zx}\, u_{yy} + u_z\, u_x^2\, u_y^2\, \partial_{xy}\, u_{zz} + u_{xx}\, u_y^2\, u_z^2\, \partial_{zy}\, u_x +$$

$$+ u_{yy}\, u_z^2\, u_x^2\, \partial_{xz}\, u_y + u_{zz}\, u_x^2\, u_y^2\, \partial_{yx}\, u_z = 0\ .$$

s mivel $\partial_{ij} = -\partial_{ji}$, a megfelelő tagok összevonásával:

$$u_x^2\, u_y^2 \begin{vmatrix} \partial_{xy}\, u_{zz} & \partial_{xy}\, u_z \\ u_{zz} & u_z \end{vmatrix} + u_y^2\, u_z^2 \begin{vmatrix} \partial_{yz}\, u_{xx} & \partial_{yz}\, u_x \\ u_{xx} & u_x \end{vmatrix} + u_z^2\, u_x^2 \begin{vmatrix} \partial_{zx}\, u_{yy} & \partial_{zx}\, u_y \\ u_{yy} & u_y \end{vmatrix} = 0.$$

Röviden:

$$(6) \qquad \begin{cases} u_x^2\, u_y^2\, \Delta_z + u_y^2\, u_z^2\, \Delta_x + u_z^2\, u_x^2\, \Delta_y = 0, \\ \qquad [\, u(x, y, z) \to 0]\ , \end{cases}$$

ahol

$$(7) \qquad \Delta_k^{ij} = \Delta_k = \begin{vmatrix} \partial_{ij}\, u_{kk} & \partial_{ij}\, u_k \\ u_{kk} & u_k \end{vmatrix}, \ \partial_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial i} & \frac{\partial}{\partial j} \\ u_i & u_j \end{vmatrix}.$$

Minthogy csupa megfordítható átalakítást végeztünk, ezért a (6) egyenletrendszer egyenértékű (3)-mal, illetve (1)-gyel. Így tehát bebizonyítottuk, hogy érvényes a következő

I. Tétel. Ahhoz, hogy az $u\,(x, y, z) = 0$ implicit függvénykapcsolat ábrázolható legyen három egyenes tartójú nomogrammal, szükséges és elégséges a (6)—(7) egyenletrendszer fennállása.

Megjegyzés. Adott függvény esetén sokszor nehézkes a (6) kritérium alapján eldönteni az ábrázolhatóság kérdését. De gyakorlatilag legtöbbször nincs is szükség arra, hogy a számolást addig kelljen vezetni. Igen gyakran már a (6)-tal egyenértékű (5) egyenletrendszer segítségével eldönthető ez a kérdés. Adott esetben tehát azt kell csupán megnézni, hogy $\frac{u_x}{u_y}$ szétválasztható-e — az $u(x, y, z) = 0$ összefüggés esetleges felhasználásával — egy x-től és egy y-tól függő tényezőből álló szorzatra. Ha a

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}, \quad [u\,(x, y, z) = 0] \tag{8}$$

szétválasztás lehetséges, akkor $\frac{z_x}{z_y} = \frac{u_x}{u_y}$, és (3)-ra való tekintettel (4) adja meg a független változók skálafüggvényeit.

2. §.

Tekintsük a négy egyenes tartójú kapcsolt nomogrammal ábrázolható, azaz

$$Z(z) = X(x) + Y(y) + T(t) \tag{9}$$

alakban felírható $z = z(x, y, t)$ háromváltozós függvényeket. Egyszerű deriválással (2)-höz hasonlóan nyerjük a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{z_x}{z_y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{z_y}{z_t} = 0, \\ &\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \log \frac{z_x}{z_y} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial t} \log \frac{z_y}{z_t} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

differenciálegyenlet-rendszert (lásd: [3])[4]. Kimutatjuk, hogy viszont (10) fennállása elegendő is ahhoz, hogy $z\,(x, y, t)$ felírható legyen a (9) alakban.

Ugyanis (10) harmadik egyenletéből kétszeri integrálással

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{\varphi(x, t)}{\psi(y, t)}$$

adódik. Minthogy azonban (10) első egyenlete szerint $\frac{z_x}{z_y}$ nem függ t-től, kell, hogy

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)} \tag{11}$$

[4]) E dolgozat a (10) egyenleteken kívül megköveteli a ciklikusan képzett további két egyenlet fennállását is.

legyen. Továbbá (10) első két egyenletéből

$$z_{xt} z_y = z_x z_{yt},$$

$$z_{xy} z_t = z_{xt} z_y,$$

tehát

$$z_{xy} z_t = z_x z_{yt},$$

azaz

$$\frac{\partial}{\partial y} \log \frac{z_x}{z_t} = 0.$$

Másrészt (11)-ből és a megfelelő analóg

$$\frac{z_y}{z_t} = \frac{\bar{\psi}(y)}{\chi(t)}$$

egyenletből

$$\frac{z_x}{z_t} = \frac{\varphi(x)}{\chi(t)} \frac{\bar{\psi}(y)}{\psi(y)},$$

tehát

$$\frac{\partial}{\partial y} \log \frac{z_x}{z_t} = \frac{d}{dy} \log \frac{\bar{\psi}(y)}{\psi(y)} = 0,$$

ami csak úgy lehet, ha

$$\bar{\psi}(y) = c\,\psi(y).$$

A c-t $\chi(t)$-be olvasztva

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)} = \frac{X'(x)}{Y'(y)}, \quad \frac{z_y}{z_t} = \frac{\psi(y)}{\chi(t)} = \frac{Y'(y)}{T'(t)}.$$

A $\Phi(x, y, t) = X(x) + Y(y) + T(t)$ függvényt bevezetve látjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} z_x & z_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z_y & z_t \\ \Phi_y & \Phi_t \end{vmatrix} = 0,$$

tehát

$$u(x, y, t) = \Psi(\Phi) = \Psi[X(x) + Y(y) + T(t)],$$

mely (9)-től csak jelölésben különbözik.

Térjünk rá ezután az $u(x, y, t, z) = 0$ implicit függvénykapcsolattal meghatározott $z = z(x, y, t)$ függvény négy egyenes tartójú, kapcsolt nomogrammal való ábrázolhatóságának kérdésére. Egyszerű deriválással számíthatók $z(x, y, t)$ parciális deriváltjai:

$$z_x = -\frac{u_x}{u_z}, \quad z_y = -\frac{u_y}{u_z}, \quad z_t = -\frac{u_t}{u_z}.$$

Ezekkel a (8) differenciálegyenletrendszer

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \log \dfrac{u_x}{u_y} = 0, & \dfrac{\partial}{\partial x} \log \dfrac{u_y}{u_t} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \log \dfrac{u_x}{u_y} = 0, & \dfrac{\partial^2}{\partial y\, \partial t} \log \dfrac{u_y}{u_z} = 0, \\[2ex] \multicolumn{2}{c}{[\, u(x, y, t, z) = 0\,]} \end{cases}$$

alakot ölt. Az első egyenlet rögtön átírható:

$$\left(u_{xt} - u_{xz} \frac{u_t}{u_z}\right) u_y - \left(u_{yt} - u_{yz} \frac{u_t}{u_z}\right) u_x = 0,$$

további átalakítással (felhasználva a (7) alatt bevezetett ∂-szimbólumot):

$$u_y\, \partial_{zt}\, u_x - u_x\, \partial_{zt}\, u_y = \Delta_{xy}^{zt} = 0.$$

Hasonlóan, (12) második egyenletéből:

$$\Delta_{yt}^{xz} = 0,$$

ahol

$$(13) \qquad \Delta_{kl}^{ij} = \begin{vmatrix} \partial_{ij}\, u_k & \partial_{ij}\, u_l \\ u_k & u_l \end{vmatrix}.$$

(12) harmadik és negyedik egyenlete a (2)—(6) egyenletekből csak a betűk elnevezésében különbözik, úgyhogy végeredményben (12) átírása így fest:

$$(14) \qquad \begin{cases} \Delta_{xy}^{zt} = 0, \ \Delta_{yt}^{xz} = 0, \\ u_x^2 u_y^2 \Delta_z^{xy} + u_y^2 u_z^2 \Delta_x^{yz} + u_z^2 u_x^2 \Delta_y^{zx} = 0, \\ u_y^2 u_z^2 \Delta_z^{yt} + u_t^2 u_z^2 \Delta_y^{tz} + u_z^2 u_y^2 \Delta_t^{zy} = 0, \\ \qquad [\, u(x, y, t, z) = 0\,], \end{cases}$$

ahol a Δ-szimbólumok (7), illetve (13) alatt vannak értelmezve.

Kimondhatjuk tehát, hogy érvényes a következő

II. Tétel. Ahhoz, hogy az $u(x, y, t, z) = 0$ implicit függvénykapcsolattal meghatározott $z = z(x, y, t)$ függvény négy egyenes tartójú, kapcsolt nomogrammal ábrázolható legyen, azaz felírható legyen a (9) alakban, szükséges és elégséges a (14) [— (7), (13)] alatti egyenletek fennállása mindazon x, y, t, z értékek mellett, melyek az $u(x, y, t, z) = 0$ összefüggést kielégítik.

1. megjegyzés. Adott $u(x, y, t, z) = 0$ függvénynél legtöbbször nincs szükség a (14) egyenletrendszer kipróbálására, hanem elég csupán azt megvizsgálni, hogy (5) mintájára lehetséges-e a

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{X'(x)}{Y'(y)}, \quad \frac{u_y}{u_t} = \frac{Y'(y)}{T'(t)}, \quad [\,u(x, y, t, z) = 0\,] \tag{15}$$

szétválasztás, s akkor az $X(x)$, $Y(y)$, $T(t)$ skálafüggvények is (4)-hez hasonlóan egyszerű integrálással számíthatók.

2. megjegyzés. (12) első két egyenlete helyett szerepelhetett volna

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{u_x}{u_y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{u_y}{u_t} = 0$$

is, de az adott esetben a logaritmikus deriváltakkal egyszerűbb a számolás, és egyébként a másik két egyenlethez úgyis szükség van a hányadosok logaritmusára.

3. §.

Foglalkozzunk az

$$\alpha(z)\, f(x) + \beta(z)\, g(y) = 1$$

alakban felírható, azaz két egyenes és egy görbe tartójú pontsoros nomogrammal ábrázolható $z = z(x, y)$ függvényekkel [4].

Képezzük a (16)-ból x, illetve y szerinti deriválással kapott egyenletek felhasználásával a

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{\alpha(z)}{\beta(z)}\,\frac{f'(x)}{g'(y)} = \varphi(x)\,\psi(y)\,\chi(z) \tag{17}$$

hányados logaritmusát :

$$\log \frac{z_x}{z_y} = \log\varphi(x) + \log\psi(y) + \log\chi(z) = A(x) + B(y) + C(z).$$

Ebből x és y szerinti deriválással

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \log \frac{z_x}{z_y} = C''(z)\, z_x\, z_y + C'(z)\, z_{xy}\ , \tag{18}$$

majd a

$$v = \frac{z_{xy}}{z_x z_y}, \quad \omega = \frac{1}{z_x z_y} \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \log \frac{z_x}{z_y}$$

jelöléssel, többszöri deriválás után a (16) típusú függvényeket jellemző

$$\frac{w_x}{z_x} = \frac{w_y}{z_y} = \omega - vw, \tag{19}$$

z-re nézve ötödrendű differenciálegyenlet-rendszer adódik, ahol

$$w = \frac{\omega_x z_y - \omega_y z_x}{v_x z_y - v_y z_x} = C'(z).$$

A skálafüggvények és a görbeskálát parametriálisan előállító $\alpha(z)$ és $\beta(z)$ függvények is könnyen felírhatók:

$$\left\{\begin{aligned} & X(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\int \varphi(x)\,dx}, \qquad Y(y) = \frac{1}{g(y)} = \frac{1}{\int \frac{dy}{\psi(y)}}, \\ & \alpha(z) = \frac{1}{\int \varphi(x)\,dx + \frac{1}{\chi(z)} \int \frac{dy}{\psi(y)}}, \quad \beta(z) = \frac{1}{\chi(z) \int \varphi(x)\,dx + \int \frac{dy}{\psi(y)}}, \\ & [z = z(x,y)]. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

E módszer *L. Lecornu*-tól [5] származik.

Megjegyzés. Gyakorlatilag rendszerint nincs szükség arra, hogy adott $z(x, y)$ függvény esetében a (19) differenciálegyenletrendszerig kelljen vinni a számolást, legtöbbször a (17) alak már megmutatja, hogy $z(x, y)$ a (16) típushoz tartozik-e. Sőt (17)-et még egyszerűsíthetjük egy megjegyzéssel. Tekintsük a $z = z(x, y)$ összefüggésben y-t mint x és z függvényét: $y = y(x, z)$; akkor x szerint parciálisan deriválva

$$0 = z_x + z_y y_x,$$

ahonnan

$$y_x = -\frac{z_x}{z_y}.$$

Ezt (17)-tel összevetve látjuk, hogy elég csupán egyik változót kifejezni, s a kapott egyenlet egyik változó szerinti parciális deriváltját megvizsgálni, hogy az felbomlik-e három, x-, y-, illetve z-től függő tényezőre. Ha ez a próbálkozás sikertelen, akkor képezzük a másik változó szerinti parciális deriváltakat, s ha ez sem látszik szétválaszthatónak, akkor képezzük a két derivált hányadosát, majd ha ez sem látszik közvetlenül szétválaszthatónak, akkor a (19) egyenletrendszerhez folyamodunk. Pontosabban, egy adott $z = z(x, y)$ függvény esetén először képezzük z_x-et; ha ez az x, y, illetve z változók függvényének szorzatára bomlik, akkor $z = z(x, y)$ ábrázolható két egyenes és egy görbe tartójú nomogrammal, ahol a görbe skálára az y értékei kerülnek. Ellenkező esetben képezzük z_y-t; ha ez felbomlik három, külön-külön csupán x-, y-, illetve z-től függő tényezőre, akkor szintén lehetséges a kérdéses típusú nomogrammal való ábrázolás, csak a görbe skála az x változót hordja. Végül, ha egyik előző próbálkozás sem vezet eredményre, képezzük a z_x/z_y hányadost, s csak ha ez sem látszik közvetlenül szétválaszthatónak, a vázolt módszer alapján tovább számolunk, míg el nem jutunk a (19) egyenletrendszerig.

Térjünk rá ezután az $u(x, y, z) = 0$ implicit alakban megadott függvény két egyenes és egy görbe tartójú nomogrammal való ábrázolhatóságának kérdésére. Feladatunk most is abban áll, hogy átírjuk a differenciálegyenleteket, z parciális deriváltjait kifejezve u parciális deriváltjaival. A (18) egyenletből indulhatunk ki, melynek baloldalát már átalakítottuk az 1. §-ban (6) alatt. Így csak a jobboldalt kell átírni. $z_x z_y$-nal osztva és a megfelelő átalakításokat végrehajtva a

$$C''(z) + C'(z)\, v = \omega \tag{21}$$

differenciálegyenletet nyerjük, ahol $\omega(x, y, z)$ és $v(x, y, z)$ kifejezhető pusztán u parciális deriváltjaival:

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{z_x z_y}\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{z_x}{z_y} = \frac{u_z^2}{u_x u_y}\,(u_x^2 u_y^2 \Delta_z + u_y^2 u_z^2 \Delta_x + u_z^2 u_x^2 \Delta_y)\,, \\ v &= \frac{z_{xy}}{z_x z_y} = \frac{\Delta_{zy}^{xz}}{u_x\, u_y\, u_z}\,. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

(Az utóbbira vonatkozólag ugyanis a

$$z_{xy} = \frac{u_{zy}\, u_x - u_{zz}\dfrac{u_y}{u_z}\, u_x - u_{xy}\, u_z + u_{xz}\dfrac{u_y}{u_z}\, u_z}{u_z^2} = \frac{u_y\, \partial_{xz}\, u_z - u_z\, \partial_{xz}\, u_y}{u_z^3} = \frac{\Delta_{zy}^{xz}}{u_z^3}$$

relációt tekinthetjük.)

Itt Δ_k a (7) alatt és Δ_{zy}^{xz} a (13) alatt értelmezett szimbólum.

Deriváljuk (21)-et x, illetve y szerint:

$$C'''(z) z_x + C''(z)\, z_x\, v + C'(z)\,(v_x + v_z\, z_x) = \omega_x + \omega_z\, z_x,$$

$$C'''(z) z_y + C''(z)\, z_y\, v + C'(z)\,(v_y + v_z\, z_y) = \omega_y + \omega_z\, z_y.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet z_y-nal, a másodikat $(-z_x)$-szel, és adjuk össze őket, s egyúttal írjuk z parciális deriváltjai helyett u parciális deriváltjaival kifejezett alakjukat:

$$C'(z)\left[v_y \frac{u_x}{u_z} - v_x \frac{u_y}{u_z}\right] = \omega_y \frac{u_x}{u_z} - \omega_x \frac{u_y}{u_z}\,;$$

innen

$$C'(z) = \frac{\omega_y u_x - \omega_x u_y}{v_y u_x - v_x u_y} = w(x, y, z). \tag{23}$$

Ezt deriválva x, illetve y szerint :

$$-C''(z)\frac{u_x}{u_z} = w_x - w_z \frac{u_x}{u_z},$$

$$-C''(z)\frac{u_y}{u_z} = w_y - w_z \frac{u_y}{u_z},$$

tehát

$$-C''(z) = w_x \frac{u_z}{u_x} - w_z = w_y \frac{u_z}{u_y} - w_z.$$

Ezt összevetve (21)-gyel és (23)-mal, a keresett differenciálegyenlet-rendszer :

$$w_x \frac{u_z}{u_x} = w_y \frac{u_z}{u_y} = w_z - \omega + vw, \qquad [u(x, y, z) = 0]. \tag{24}$$

Kimutatjuk, hogy viszont (24) teljesülése elégséges is ahhoz, hogy az $u(x, y, z) = 0$ implicit összefüggéssel meghatározott $z = z(x, y)$ függvény (16) alakban felírható legyen. Tekintsük e célból (24) első egyenletét :

$$\frac{w_x}{u_x} = \frac{w_y}{u_y},$$

másként

$$\frac{w_x}{w_y} = \frac{u_x}{u_y} = \frac{z_x}{z_y},$$

azaz

$$\begin{vmatrix} w_x & w_y \\ z_x & z_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(w, z)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Tehát w és z nem függetlenek :

$$w[x, y, z(x, y)] = C'(z). \tag{25}$$

Deriváljuk ezt pl. y szerint :

$$-C''(z)\frac{u_y}{u_z}=w_y-w_z\frac{u_y}{u_z};$$

átrendezéssel (és figyelembe véve (24)-et és (23)-at is) :

$$C''(z)=w_z-w_y\frac{u_z}{u_y}=\omega-vw=\omega-C'(z)\,v,$$

s ez éppen (21). Ezután v és ω helyébe visszaírva a (22) értelmezés alapján u majd z parciális deriváltjait, azonos átalakítások után visszakapjuk a (18), illetve a vele ekvivalens

$$\frac{z_x}{z_y}=\varphi(x)\,\psi(y)\,\chi(z) \tag{26}$$

egyenletet. Minthogy $u(x, y, z) = 0$ folytán

$$y_x=-\frac{z_x}{z_y},$$

a $-g'(y)=\dfrac{1}{\psi(y)}$ jelöléssel (26) így alakul :

$$g'(y)\,y_x=\varphi(x)\,\chi(z),$$

amit x szerint integrálva

$$g(y)=\chi(z).\int\varphi(x)\,dx+k(z)$$

adódik, s ez a jelölésektől eltekintve megegyezik (16)-tal.

Kimondjuk tehát, hogy érvényes a

III. Tétel. Ahhoz, hogy az implicit $u(x, y, z) = 0$ alakban megadott $z = z(x, y)$ függvény két egyenes és egy görbe tartójú pontsoros nomogrammal ábrázolható legyen, azaz felírható legyen a (15) alakban, szükséges és elegendő, hogy mindazon x, y, z értékhármasok mellett, melyek az $u(x, y, z) = 0$ összefüggést kielégítik, fennálljanak a (24) alatti egyenletek, ahol az ω, v, w kifejezések (22) és (23) alatt vannak értelmezve, továbbá az értelmezésnél felhasznált Δ-szimbólumok definíciója megtalálható (7), illetve (13) alatt.

Megjegyzés. Gyakorlatilag természetesen itt is elég legtöbbször a

$$\frac{u_x}{u_y}=\varphi(x)\,\psi(y)\,\chi(z),\quad [u(x,y,z)=0] \tag{27}$$

szétválaszthatóságot megvizsgálni. Ennek a felbontásnak a lehetősége már biztosítja, hogy az $u(x, y, z) = 0$ implicit összefüggéssel meghatározott $z = z(x, y)$ függvény két egyenes és egy görbe tartóval ábrázolható, azaz (16) alakú legyen. A skálafüggvények és a z görbeskálát előállító függvény is könnyen meghatározható (20) alapján.

1. példa. A *van der Waals*-féle gáz-állapotegyenlet:

$$u(p, T, v) = \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) - RT = 0$$

esetében

$$\frac{u_p}{u_T} = \frac{1}{R}(b - v),$$

tehát a $v = v(p, T)$ összefüggés ábrázolható két egyenes és egy görbe tartójú nomogrammal. A skálafüggvények (20) alapján:

$$X(p) = \frac{1}{\int \varphi(p)\,dp} = \frac{1}{p}, \qquad Y(T) = \frac{1}{\int \frac{dT}{\psi(T)}} = \frac{1}{\int R dT} = \frac{1}{RT},$$

$$\alpha(v) = \frac{1}{p + \frac{1}{b - v}\frac{1}{RT}} = -\frac{v^2}{a}, \quad \beta(v) = \frac{1}{(b - v)p + RT} = \frac{v^2}{a(v - b)}.$$

Ez az (α, β)-koordinátarendszerben a

$$\beta = \frac{\alpha}{b - \sqrt{-a\alpha}}$$

görbe, ahol $v > b$ miatt $\alpha = \alpha(v) < -\frac{b^2}{a}$.

A függvénynek közvetlenül a (11) alakra való hozása sem nehéz egyébként.

A fentiek alapján nyert nomogrammot lásd az ábrán.[5)]

2. példa. Tekintsük az

$$u = xze^y + \log\frac{x}{z} + y - 1 = 0$$

összefüggést. Minthogy

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{ze^y + 1/x}{xze^y + 1} = \frac{1}{x},$$

tehát lehetséges a három egyenes tartójú nomogrammal való ábrázolás. Az x, y független változók skálafüggvényei:

$$X(x) = \int \frac{dx}{x} = \log x,$$

$$Y(y) = \int dy = y.$$

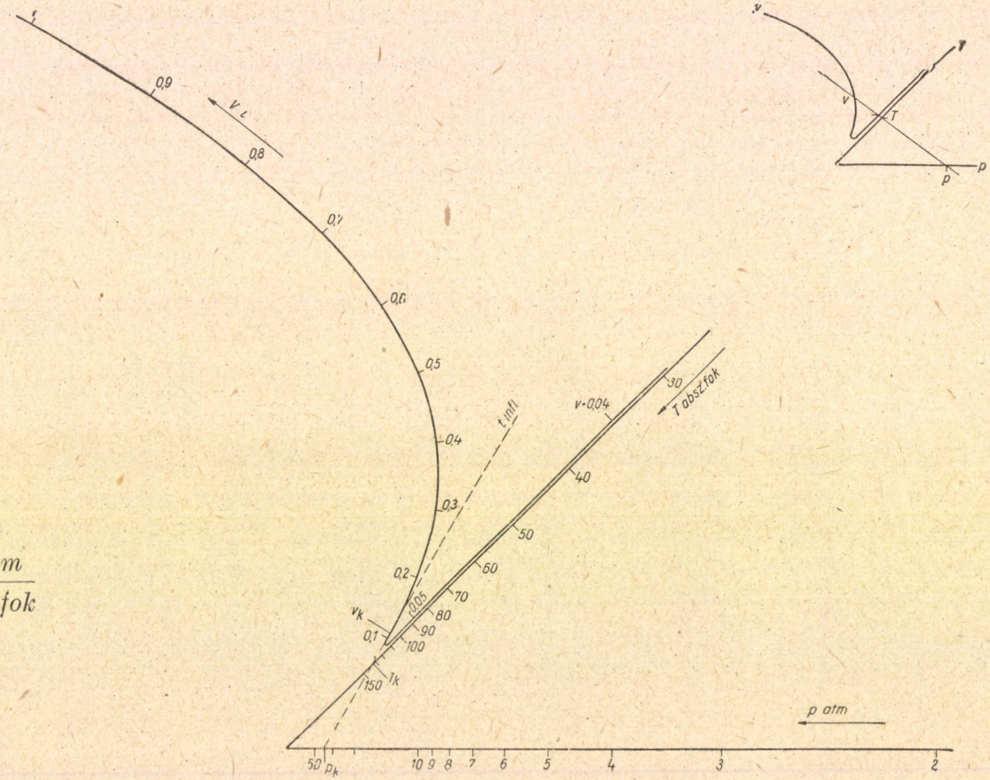
[5)] A nomogrammot *Török Sándor* rajzolta.

LEVEGŐ $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \mathrm{RT} = 0$ ÁLLAPOTEGYENLETÉNEK NOMOGRAMMJA

$$a = 1{,}33 \, \frac{l^2 . atm}{mol^2}$$

$$b = 0{,}0366 \, \frac{l}{mol}$$

$$R = 0{,}0821 \, \frac{l. \; ntm}{mol. \; fok}$$



IRODALOM

[1] J. Aczél: »Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen.« *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 12 (1950) 73—80.

[2] P. Saint-Robert: »De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante.« *Mémoire delle R. Accademia di Scienze di Torino* (2) 25 (1871) 53—72.

[3] S. Martis-Biddau: »Sulla caratterizzazione di alcune classi di funzioni.« *Collectanea Matematica* 1 (1948) 67—84.

[4] M. D'Ocagne: *Traité de nomographie.* Paris, 1921 (p. 214).

[5] L. Lecornu: »Sur le problème de l'anamorphose«. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)* 102 (1886) 813—816.

ИЗОБРАЖЕНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НОМОГРАММИ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК

Дь. Ботош и М. Хоссу

Резюме

В настоящей работе задаются критерии в форме дифференциальных уравнений [(6), (14), (24), или в другой форме (5), (15), (27)] для изображаемости неявной функциональной зависимости номограммой из выравненных точек и указывается метод для определения шкальных функций [(4), (20)]. Проблема была поставлена *Дь. Хайошом.* Примечания к отдельным теоремам дают указания, как в данном случае разрешить на основе наших критериев вопрос об изображаемости и как определить шкальные функции

В §§ 1—2 исследуются неявные функции видов $u(x, y, z) = 0$ и $u(x, y, z, t) = 0$, изображаемых связанной номограммой с тремя или с четырьмя прямыми опорами, а в § 3 исследуются функции, изображаемые номограммой с двумя прямыми и одной кривой опорами.

REPRESENTATION OF IMPLICIT FUNCTIONS BY POINTWISE NOMOGRAMS

GY. BOTOS and M. HOSSZÚ

Summary

In the present paper it is shown that the differential equations (6), (14), (24), or in other form (5), (15), (27) give criteria for the possibility of representing an implicit function by scale nomograms; formulae (4) and (20) can be used to construct the graduation of the scales. The authors apply *J. Aczél*'s method [1] developed for explicitely given functional relations, while the problem was raised by *Gy. Hajós.*

The §§ 1 and 2 deal with implicit functions $u(x, y, z) = 0$ and $u(x, y, z, t) = 0$ the nomograms of which contain three resp. four straight scales, finally § 3 treats the representation of an implicit function by nomograms with two straight and one curved scales.