EGY HŐVEZETÉSI FELADATRÓL

SZILVAY GÉZÁNÉ és ZERGÉNYI ERZSÉBET

A *Magyar Hidrológiai Társaság*-tól kaptuk az alábbi feladatot, mely melegedő jégrétegben fellépő hőmérsékleteloszlásra vonatkozik.[1]

Megoldandó a

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

differenciálegyenlet a következő feltételek mellett :

$$(1) \qquad \begin{cases} a) & u(0,x) = \dfrac{u_0}{L} x \\ b) & u(t,0) = 0 \\ c) & u(t,L) = \begin{cases} u_0 - at, & \text{ha } t < u_0/a \\ 0, & \text{ha } t \geq u_0/a \end{cases} \quad (u_0/a > 0) \end{cases} .$$

Állítsuk elő a megoldást két függvény összegeként :

$$u = u_1 + u_2,$$

ahol mind u_1, mind u_2 megoldása a differenciálegyenletnek, ezenkívül u_1-re vonatkozó kezdeti, illetve határfeltételek :

$$(2) \qquad \begin{cases} a) & u_1(0,x) = \dfrac{u_0}{L} x, \\ b) & u_1(t,0) = 0, \\ c) & u_1(t,L) = u_0; \end{cases}$$

[1] Az eredmények értékelésére és azok hasznosítására a megbízó a »*Vízépítés*« c. folyóiratban még vissza kíván térni.

u_2-re pedig

$$
(3) \qquad \begin{cases} a) \ u_2(0,x) = 0 \\ b) \ u_2(t,0) = 0 \\ c) \ u_2(t,L) = \begin{cases} -at, & \text{ha} \quad t < \dfrac{u_0}{a} \\ -u_0, & \text{ha} \quad t \geqq \dfrac{u_0}{a} \,. \end{cases} \end{cases}
$$

Könnyen belátható, hogy $u = u_1 + u_2$ az (1) feltételnek eleget tesz. Az

$$
u_1(x,t) = \frac{u_0}{L} x
$$

függvény kielégíti (2)-t. u_2-t a következő alakban keressük:

$$
u_2(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \, e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-\tau)}} F(\tau)\, d\tau +
$$

$$
+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \, e^{-\frac{(L-x)^2}{4k^2(t-\tau)}} G(\tau)\, d\tau \ .
$$

Ez a kifejezés tetszés szerinti korlátos és integrálható $F(t)$ és $G(t)$ függvények mellett eleget tesz differenciálegyenletünknek, sőt a (3) alatti *a)* feltételnek is. Válasszuk meg $F(t)$ és $G(t)$-t úgy, hogy $u_2(x,t)$ a (3) alatti *b), c)* határfeltételeket is kielégítse.

A feladatot Laplace-transzformáció segítségével oldjuk meg (lásd: [2]). Ha

$$
\mathcal{L}\{F(t)\} = f(p)
$$

$$
\mathcal{L}\{G(t)\} = g(p)
$$

$$
\mathcal{L}\{u_2(x,t)\} = \overline{u}_2(x,p) \ ,
$$

akkor a konvoluciótétel alapján

$$
(4) \qquad \overline{u}_2(x,p) = f(p) \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{x}{k}\sqrt{p}} + g(p) \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{L-x}{k}\sqrt{p}} \ .
$$

A határfeltételeket is transzformáljuk:

$$
(5) \qquad \begin{cases} \overline{u}_2(0,p) = 0 & ((3)\,b)\text{-ből}) \\ \overline{u}_2(L,p) = \dfrac{a}{p^2}\left(e^{-p\frac{u_0}{a}} - 1\right) & ((3)\,c)\text{-ből}) \end{cases}
$$

A (4) és (5) képletek felhasználásával a következő egyenletrendszerre jutunk :

$$f(p)+g(p)\,e^{-\frac{L}{k}\sqrt{p}}=0$$

$$f(p)\,e^{-\frac{L}{k}\sqrt{p}}+g(p)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\frac{a}{p^2}\left(e^{-p\frac{u_0}{a}}-1\right).$$

Innen $f(p)$ és $g(p)$ meghatározható :

$$f(p)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\frac{a}{p_2}\,\frac{e^{-p\frac{u_0}{a}}-1}{1-e^{-\frac{2L}{k}\sqrt{p}}}=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-p\frac{u_0}{a}}-1}{p}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{e^{-\frac{L}{k}\sqrt{p}}}{1-e^{\frac{-2L}{k}\sqrt{p}}}$$

$$g(p)=\sqrt{\frac{p}{\pi}}\,\frac{a}{p_2}\,\frac{e^{-\frac{pu_0}{a}}-1}{1-e^{-\frac{2L}{k}\sqrt{p}}}=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-p\frac{u_0}{a}}-1}{p}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{1}{1-e^{\frac{-2L}{k}\sqrt{p}}}\,.$$

Az $\dfrac{e^{-p\frac{u_0}{a}}-1}{p}$ függvény inverz Laplace-transzformáltja :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-p\frac{u_0}{a}}-1}{p}\right\}=\varphi(t),$$

ahol

$$\varphi(t)=\begin{cases}-1,\ \text{ha } t<\dfrac{u_0}{a}\\[2ex] 0,\ \text{ha } t\geqq\dfrac{u_0}{a}\,.\end{cases}$$

Valamint

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{1-e^{\frac{-2L}{k}\sqrt{p}}}\right\}=\Psi(t),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{e^{-\frac{L}{k}\sqrt{p}}}{1-e^{-2\frac{L}{k}\sqrt{p}}}\right\}=\Phi(t),$$

ahol

$$\Psi(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[n\frac{L}{k}\right]^2\frac{1}{t}}$$

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{L}{k}\right]^2\frac{1}{t}}\,dt\ .$$

Ugyanis

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{\sqrt{\pi t}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[\frac{nL}{k}\right]^2\frac{1}{t}}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\left[\frac{nL}{k}\right]^2\frac{1}{t}}dt=\\ \displaystyle =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot e^{-\frac{2L}{k}\sqrt{p}\,u}=\frac{1}{p}\,\frac{1}{1-e^{-\frac{2L}{k}\sqrt{p}}}\ , \end{cases}$$

ha $\mathcal{Re}\, p > 0$. A szummálás és integrálás felcserélhetőségének bizonyításához felhasználjuk a fenti összeg Θ-függvényekkel kifejezett alakját.

A Θ-függvények általános definíciója (lásd : [1]) :

$$\Theta_{\mu\nu}(v/z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi v\left(n+\frac{\mu}{2}\right)+i\pi z\left(n+\frac{\mu}{2}\right)^2+i\pi n\nu}\ .$$

Ez a sor abszolút és egyenletesen konvergens tetszőleges komplex μ, ν, v mellett, ha $\mathcal{Im}\, z > 0$.

Fontosabb speciális esetek :

$$\vartheta_0(v)=\Theta_{01}(v)\quad ,\quad \vartheta_2(v)=\Theta_{10}(v)\quad ,\quad \vartheta_3(v)=\Theta_{00}(v)\ .$$

A ϑ-függvényekkel a következőképpen fejezhetők ki a Φ-ben és Ψ-ben fellépő sorok :

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{L^2}{k^2}\cdot\frac{1}{t}}=\frac{1}{2}\,\vartheta_0\left(0|z\right)=\frac{i}{\pi}\frac{L^2}{k^2}\frac{1}{t}\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2\frac{L^2}{k^2}\frac{1}{t}}=\frac{1}{2}\left[\vartheta_0\left(0|z=\frac{i}{\pi}\frac{L^2}{k^2}\frac{1}{t}\right)+1\right]\ . \end{cases}$$

A

$$\lim_{z\to 0} \sqrt{z}\,\vartheta_3(0|z) = \frac{1+i}{2}$$

összefüggésből (lásd például: [3], p. 20.) leolvasható, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[n\frac{L}{k}\right]^2 \frac{1}{t}}$$

az egész zárt $[0, \infty]$ félegyenesen korlátos.

Ennek következtében a (6) integrál $p > 0$ esetén konvergens és az integrálás tagonként végezhető el.

A konvolució-tétel szerint:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(p)\} = F(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \Phi(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{a}{\pi} \int_\delta^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{L}{k}\right]^2 \frac{1}{\tau}} d\tau\,,$$

és

$$\mathcal{L}^{-1}\{g(p)\} = G(t) = -\frac{a}{\pi} \int_\delta^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left[n+\frac{L}{k}\right]^2 \frac{1}{\tau}} d\tau\,.$$

ahol

$$\delta = \begin{cases} 0 & ,\ \text{ha} \quad t < \dfrac{u_0}{a} \\ t - \dfrac{u_0}{a}, & \text{ha} \quad t \geq \dfrac{u_0}{a}\,. \end{cases}$$

Az itt szereplő sorokat numerikus számításra alkalmas alakra ϑ-függvények segítségével hozzuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{L^2}{k^2}\frac{1}{t}} = \frac{1}{2}\,\vartheta_2\left(0 \,\middle|\, z = \frac{i}{\pi}\,\frac{L^2}{k^2}\,\frac{1}{t}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \frac{L^2}{k^2}\frac{1}{t}} = \frac{1}{2}\left[\vartheta_0\left(0 \,\middle|\, z = \frac{i}{\pi}\,\frac{L^2}{k^2}\,\frac{1}{t}\right) + 1\right]$$

Ezek a sorok nagy z, tehát kis t esetén jól konvergálnak, nagy t mellett a konvergenciát megjavíthatjuk a ϑ-sorokra vonatkozó transzformációs képletek felhasználásával (lásd például: [1]):

$$\vartheta_2(0\,|\,z) = \sqrt{\frac{i}{z}}\,\vartheta_0\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{z}\right)$$

$$\vartheta_3(0\,|\,z) = \sqrt{\frac{i}{z}}\,\vartheta_3\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{z}\right).$$

Innen

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{L^2}{k^2}\frac{1}{t}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{i}{z}}\,\vartheta_0\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{2}=i\pi\frac{k^2}{L^2}t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi t}\,\frac{k}{L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{-\pi^2\frac{k^2}{L^2}n^2 t} =$$

$$= \sqrt{\pi t}\,\frac{k}{L}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\pi^2\frac{k^2}{L^2}n^2 t}\right].$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2\frac{L^2}{k^2}\frac{1}{t}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{i}{t}}\,\vartheta_3\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{z}=i\pi\frac{k^2}{L^2}t\right)+1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}+\sqrt{\pi t}\,\frac{k}{2L}+\sqrt{\pi t}\,\frac{k}{L}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi^2 n^2\frac{k^2}{L^2}t}.$$

A transzformáció által az eredeti

$$\Sigma\, q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}, \text{ illetve } \qquad \Sigma\, q^{n^2}$$

alakú sorokból hasonlókat kaptunk, csak míg a transzformáció előtt

$$q = e^{-\frac{L^2}{k^2}\frac{1}{t}}$$

volt, addig most

$$q = e^{-\pi^2\frac{k^2}{L^2}}.$$

Így
$$e^{-\frac{L^2}{k^2}\frac{1}{t}} < e^{-\pi^2\frac{k^2}{L^2}},$$

azaz $t < \dfrac{L^2}{k^2\pi}$ esetén az eredeti sorokkal számolunk, ellenkező esetben a transzformálttal. q legnagyobb értékét tehát az

$$e^{-\frac{L^2}{k^2}\frac{1}{t}} = e^{-\pi^2\frac{k^2}{L^2}t}, \quad \text{azaz } t = \frac{L^2}{k^2\pi}$$

helyen veszi fel, ekkor $q = e^{-\pi} < 0{,}05$. A konvergencia most olyan jó, hogy a sorok számításánál elég a második tagig menni, a relatív hiba így is elég kicsi, hiszen az elhanyagolás

$$\sum_{n=2}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} < \sum_{n=2}^{\infty} q^{n^2} < q^4 \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \frac{q^4}{1-q^2},$$

és ez még a maximális $q = 0{,}05$ mellett is csak 10^{-5} nagyságrendű.

A fentiek felhasználásával a következő közelítő formulát nyerjük:

$$F(t) = \frac{\alpha}{\pi}\left[\int_{\delta}^{\frac{L^2}{k^2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(e^{-\frac{L^2}{4k^2}\frac{1}{\tau}} + e^{-\frac{9}{4}\frac{L^2}{k^2}\frac{1}{\tau}}\right)d\tau + \int_{\frac{L^2}{k^2\pi}}^{t} \sqrt{\pi}\,\frac{k}{L}\left(\frac{1}{2} - e^{-\pi^2\frac{k^2}{L^2}\tau}\right)d\tau\right]$$

$$G(t) = -\frac{\alpha}{\pi}\left|\int_{\delta}^{\frac{L^2}{k^2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(1 + e^{-\frac{L^2}{k^2}\frac{1}{\tau}}\right)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{L^2}{k^2\pi}}^{t} \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi\tau}}{2}\frac{k}{L} + \sqrt{\pi\tau}\,\frac{k}{L}\,e^{-\pi^2\frac{k^2}{L^2}\tau}\right)d\tau\right].$$

(Ha $t \leq \dfrac{L^2}{k^2\pi}$, akkor $F(t)$, illetve $G(t)$ az első integrandus δ-tól t-ig terjedő integráljával egyenlő; ha $\delta \geq \dfrac{L^2}{k^2\pi}$, akkor a második integrandus integrálja 0-tól t-ig, csak $\delta < \dfrac{L^2}{k^2\pi}$, $t > \dfrac{L^2}{k^2\pi}$ esetén érvényesek a felírt képletek.)

Az analitikusan kiintegrálható tagok integrálását elvégezve, a többieket egyszerűbb alakra hozva, a

$$h(t) = \frac{e^{-t^2}}{t} + 2 \int_0^t e^{-t^2} dt \quad ,$$

és az $u = \dfrac{L^2}{k^2 \pi}$ jelölés bevezetésével nyerjük:

$$F(t) = \frac{a}{\pi} \left[\frac{L}{k} \left\{ h\left(\frac{L}{2k\sqrt{u}} \right) - h\left(\frac{L}{2k\sqrt{\delta}} \right) \right\} + \frac{3L}{k} \left\{ h\left(\frac{3}{2} \frac{L}{k\sqrt{u}} \right) - h\left(\frac{3}{2} \frac{L}{k\sqrt{\delta}} \right) \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi k}}{L} \left\{ \frac{1}{2} (t-u) + \frac{e^{-\frac{\pi^2 k^2}{L^2} t} - e^{-\pi^2 \frac{k^2}{L^2} u}}{\pi^2 \frac{k^2}{L^2}} \right\} \right],$$

$$G(t) = -\frac{a}{\pi} \left[2(\sqrt{u} - \sqrt{\delta}) + \frac{2L}{k} \left\{ h\left(\frac{L}{k} \frac{1}{\sqrt{u}} \right) - h\left(\frac{L}{k} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right) \right\} + \right.$$

$$\left. + (\sqrt{t} - \sqrt{u}) + \frac{\sqrt{\pi}\, k}{L} \left\{ \frac{1}{2} (t-u) - \frac{e^{-\pi^2 \frac{k^2}{L^2} t} - e^{-\pi^2 \frac{k^2}{L^2} u}}{\pi^2 \frac{k^2}{L^2}} \right\} \right]$$

$F(t)$ és $G(t)$ ismeretében feladatunk megoldását felírhatjuk:

$$u(x,t) = \frac{u_0}{L} x + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-\tau)}} F(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(L-x)^2}{4k^2(t-\tau)}} G(\tau)\, d\tau .$$

Az integrálokat a paraméterek speciális értékeire numerikus integrálással számítottuk.

Itt mondunk köszönetet *Freud Gézá*-nak segítségéért, melyet munkánkhoz nyújtott.

IRODALOM

[1] A. Hurwitz—R. Courant: *Funktionentheorie.* Springer, Berlin, 1929.

[2] M. I. Kontorovics: *Operátorszámítás és stacionárius jelenségek elektrotechnikai alkalmazásai.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

[3] W. Oberhettinger—F. Magnus: *Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik.* Springer, Berlin, 1949.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г. Силваи и Э. Зергени

Резюме

В настоящей работе дается решение следующей задачи теплопроводности: Требуется решить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x_1 t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u(x_1 t)}{\partial x^2}$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(0, x) = \frac{u_0}{L} x$$

$$u(t, 0) = 0$$

$$u(t, L) = \begin{cases} u_0 - at & \text{при} \quad t < \frac{u_0}{a}, \\ 0 & \text{при} \quad t \geqq \frac{u_0}{a}. \end{cases} \quad \left(\frac{u_0}{a} > 0\right)$$

Представим решение в виде суммы двух функций, каждая из которых является решением дифференциального уравнения и для которых справедливы соотношения:

$$u = u_1 + u_2$$

$$u_1(0, x) = \frac{u_0}{L} x \qquad u_2(0, x) = 0$$

$$u_1(t, 0) = 0 \qquad u_2(t, 0) = 0$$

$$u_1(t, L) = u_0 \qquad u_2(t, L) = \begin{cases} -at & \text{при} \quad t < \frac{u_0}{a} \\ -u_0 & \text{при} \quad t \geqq \frac{u_0}{a} \end{cases}$$

Из предположений, сделанных для u_1 вытекает, что

$$u_1(x, t) = \frac{u_0}{L} x$$

Представим $u_2(x, t)$ при помощи преобразования Лапласа в виде

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-\tau)}} F(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(L-x)^2}{4k^2(t-\tau)}} G(\tau)\, d\tau .$$

Преобразованные Лапласа u_2 и граничных условий для u_2 получаются при обозначениях

$$f(p) = \mathcal{L}\{F(t)\}, \quad g(p) = \mathcal{L}\{G(t)\} \quad \text{и} \quad \bar{u}_2(x, p) = \mathcal{L}\{u_2(x, t)\}$$

в виде

$$u_2(x, p) = f(p) \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{x}{k}\sqrt{p}} + g(p) \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{L-x}{k}\sqrt{p}}$$

$$\bar{u}_2(0, p) = 0\,; \qquad u_2(L, p) = \frac{a}{p^2}\left(e^{-p\frac{u_0}{a}} - 1\right)$$

Обратные преобразованные Лапласа функций $f(p)$ и $g(p)$, определенных при помощи граничных условий, представляются разложением в ряд для функций ϑ.

Выражения, сообщенные для $F(t)$ и $G(t)$ имеют погрешности порядка не превышающего 10^{-5}.

ÜBER EIN WÄRMELEITUNGSPROBLEM

Frau G. SZILVAY und E. ZERGÉNYI

Zusammenfassung

Es wird die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

unter folgenden Bedingungen gelöst:

$$u(0, x) = \frac{u_0}{L} x$$

$$u(t, 0) = 0$$

$$u(t, L) = \begin{cases} u_0 - at & \text{für } t < \frac{u_0}{a}, \\ 0 & \text{für } t \geqq \frac{u_0}{a}. \end{cases} \quad \left(\frac{u_0}{a} > 0\right)$$

Die Lösung wird als Summe zweier Funktionen dargestellt. Beide Summanden genügen der Differentialgleichung und erfüllen nach folgende Bedingungen:

$$u_0 = u_1 + u_2$$

$$u_1(0, x) = \frac{u_0}{L} x \qquad u_2(0, x) = 0$$

$$u_1(t, 0) = 0 \qquad u_2(t, 0) = 0$$

$$u_1(t, L) = u_0 \qquad u_2(t, L) = \begin{cases} -at, & \text{für } t < \frac{u_0}{a} \\ -u_0, & \text{für } t \geqq \frac{u_0}{a} \end{cases}$$

Aus den Ansätzen für u_1 wird sofort klar, dass

$$u_1(x, t) = \frac{u_0}{L} x$$

$u_2(x, t)$ wird mittels Laplace. Transformation in folgender Gestalt dargestellt:

$$u_2(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-\tau)}}\, F(\tau)\, d\tau$$

$$\int_0 \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{(L-x)^2}{4k^2(t-\tau)}}\, G(\tau)\, d\tau$$

Die Laplace-Transformation für die Randbedingungen ist

$$\overline{u}_2(x,p) = f(p)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{x}{k}\sqrt{p}} + g(p)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{L-x}{k}\sqrt{p}}$$

$$\overline{u}_2(0,p) = 0\,; \quad \overline{u}_2(L,p) = \frac{a}{p^2}\left(e^{-p\frac{u_0}{a}} - 1\right)$$

wobei

$$f(p) = \mathcal{L}\left\{F(t)\right\};\ g(p) = \mathcal{L}\left\{G(t)\right\};\ \overline{u}_2(x,p) = \mathcal{L}\left\{u_2(x,t)\right\}$$

Die inverse Laplace-Transformierte der durch die Randbedingungen bestimmten Funktionen $f(p)$ und $g(p)$ ist mittels der Reihenentwicklungen für die ϑ -Funktionen dargestellt.

Die Grössenordnung der Fehler in dem Ausdruck von $F(t)$ und $G(t)$ wie die in der Arbeit dargestellt werden, beträgt höchstens 10^{-5}.