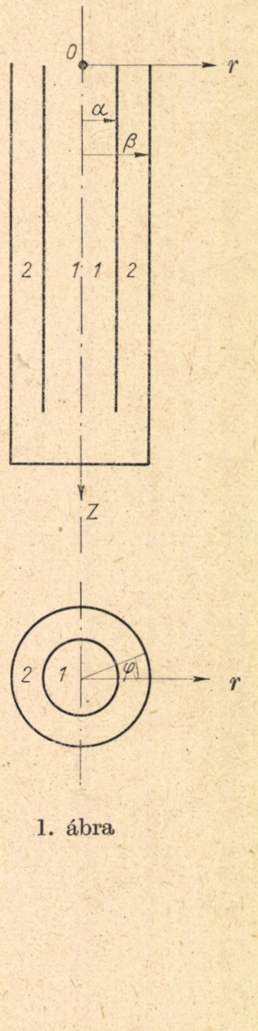
HŐMÉRSÉKLETELOSZLÁS SZÁMÍTÁSA KETTŐSCSÖVES HŐCSERÉLŐBEN

SZILVAY GÉZÁNÉ

Bevezetés

A kettőscsöves hőcserélő egy külső, alsó végén zárt és egy beléje helyezett kisebb átmérőjű, rövidebb, alsó végén nyitott hengeres csőből áll (lásd : [1]). A gáz felülről áramlik a belső csőbe, azután végigmegy a belső és külső cső közötti gyűrűs keresztmetszeten. A hőcserélő környezetének hőmérsék-



1. ábra

lete magasabb, mint a hőcserélőé, illetve a benne áramló gázé. Ezért a csőfalon keresztül hőcsere történik: a hőcserélő környezetéből hőmennyiséget vesz fel, mely az áramló gázt felmelegíti. A külső csőben áramló — most már felmelegedett — gáz melegíti a belső csövet, azaz bizonyos hőmennyiséget ad át a belső csőben áramló közegnek. Ha a hőmérsékleti viszonyokat tekintjük egy keresztmetszetben, a fentiek alapján nyilvánvaló, hogy a cső tengelyében, vagyis a keresztmetszet középpontjában lesz a hőmérséklet a legalacsonyabb, s sugár mentén haladva a cső külső fala irányában a hőmérséklet folytonosan emelkedik. Természetesen a hőcserélő zárt végén a belső és külső cső találkozásánál sem lehetséges hőmérsékleti ugrás: áramló közeg hőmérséklete a hőcserélőben folytonosan változik.

Feladatunk a hőmérsékleteloszlás meghatározása a hőcserélőben. Számításainkban a csőfalat végtelen vékonynak tekintjük. A belső cső sugara α, a külső csőé β. A továbbiakban a belső csövet »1«, a külsőt »2« indexszel jelöljük.

A dolgozat első részében a feladat tetszőleges határfeltételhez illesztett általános megoldását adjuk, ha a gáz sebessége állandó. A második részben azt az egyszerűsített problémát tárgyaljuk, ha a hőmérséklet radiális irányú változása elhanyagolható.

1. §. Általános eset

A probléma megoldásánál a hővezetés differenciálegyenletét használjuk fel (lásd például: [2], II., Kap. XIV. § 1.):

$$a^2 \triangle u - \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

ahol u a hőmérséklet, $\boldsymbol{v}$ az áramló közeg sebessége, a^2 a hővezetési tényező, t pedig az idő. Csak a stacionárius esetet vizsgáljuk, azaz a hőmérséklet a hőcserélő minden pontjában időben változatlan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Mivel a kettőscsöves hőcserélő hengerszimmetrikus, hengerkoordinátákra térünk át. A szimmetricitásból következik, hogy eredményünk a polárszögtől független lesz:

$$u(x, y, z) = u(r, z).$$

Így az (1) egyenlet

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{grad}\, u = 0 \tag{2}$$

alakú lesz.

A koordinátarendszer kezdőpontját a kettős cső nyitott végén képzeletben keresztülfektetett sík és a szimmetriatengely metszéspontjában vesszük fel. A z-tengelyt függőlegesen lefelé, r-et pedig a z-tengelytől kifelé irányítjuk.

A gáz áramlását turbulensnek tekintjük. Így az áramlás sebessége (egy átmeneti rétegtől eltekintve) állandónak vehető és a közeg csőfal-menti viselkedését elhanyagoljuk. Esetünkben a sebesség a koordinátatengellyel párhuzamos, a külső és belső csőben egymástól eltérő állandó érték, jelöljük v_{z_1}-gyel illetve v_{z_2}-vel. Ezt felhasználva a (2) egyenletet külön írjuk fel a külső és belső csőre:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_1}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \dfrac{v_{z_1}}{a^2}\dfrac{\partial u_1}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_2}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \dfrac{v_{z_2}}{a^2}\dfrac{\partial u_2}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

A (3) parciális differenciálegyenlet-rendszert a következő határfeltételek mellett kell megoldanunk:

1°. A hőmennyiség a belső és külső cső közötti falon folytonosan menjen keresztül, azaz u_1 és u_2 függvények normális irányú (itt sugár irányú) deriváltjai az $r = a$ helyen megegyezzenek:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a}.$$

2°. Bármely z értékre a külső és belső csőben uralkodó hőmérséklet különbsége arányos a normális irányú deriválttal:

$$u_2 - u_1 = k\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a},$$

ahol k a fal hőátbocsátási tényezője.

Azon a szakaszon, ahol a gáz a belső csőből a külső csőbe áramlik át, a hőmérsékleti viszonyok szabatos matematikai tárgyalása reménytelennek látszik. Numerikus számítások szerint azonban elegendőnek mutatkozik az a feltevés, hogy a cső végén $z = l$-nél az *1.* és *2.* csőben áramló gáz között fennálló hőmérsékletkülönbség igen kicsi legyen. Ez könnyen megvalósítható feltétel.

A (3) egyenletek megoldását szorzat-alakban keressük:

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} u_1 &= R_1(r)Z_1(z) \\ u_2 &= R_2(r)Z_2(z). \end{aligned}$$

Behelyettesítve (3)-ba, és szétválasztva a változókat:

$$(5)\qquad \begin{cases} R_1'' + \frac{1}{r} R_1' - \nu_1^2 R_1 = 0 \\ R_2'' + \frac{1}{r} R_2' - \nu_2^2 R_2 = 0 \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} Z_1'' - \frac{v_{z_1}}{a^2} Z_1' + \nu_1^2 Z_1 = 0 \\ Z_2'' - \frac{v_{z_2}}{a^2} Z_2' + \nu_2^2 Z_2 = 0 \end{cases}$$

ν_1 és ν_2 egyelőre még határozatlan állandó érték.

Az (5) egyenletek megoldásai a zérus-rendű Bessel-függvények:

$$R_1 = A_1 J_0(i\nu_1 r) + B_1 K_0(\nu_1 r), \text{ ha } 0 \leqq r \leqq \alpha,$$

$$R_2 = A_2 J_0(i\nu_2 r) + B_2 K_0(\nu_2 r), \text{ ha } \alpha \leqq r \leqq \beta.$$

$B_1 = 0$, mert $K_0(0) = \infty$, és ez fizikailag lehetetlen megoldást realizálna.

A (6) egyenleteket kielégítő függvényeket exponenciális alakban keresünk:

$$Z_1 = e^{\lambda_1 z}; \quad Z_2 = e^{\lambda_2 z}.$$

Behelyettesítve az egyenletekbe és figyelembevéve, hogy $v_{z_2} < 0$, tehát $v_{z_2} = -|v_{z_2}|$; a következő karakterisztikus egyenletekre jutunk:

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda_1^2 - \frac{v_{z_1}}{a_2} \lambda_1 + \nu_1^2 = 0 \\ \lambda_2^2 + \frac{|v_{z_2}|}{a^2} \lambda_2 + \nu_2^2 = 0. \end{cases}$$

A határfeltételeket kielégítő megoldást akkor találhatunk, ha $\lambda_1 = \lambda_2$. Mivel ν_1-et és ν_2-t szabadon választhatjuk, keresünk olyan értékpárt, melynél létezik a (7) egyenletek közös megoldása. Az algebrából ismeretes, hogy két egyenletnek akkor és csak akkor van közös gyöke, ha a rezultáns értéke zérus. Ebből a feltételből:

$$(8)\qquad \left(\nu_2^2 \frac{v_{z_1}}{a^2} + \nu_1^2 \frac{|v_{z_2}|}{a^2}\right)\left(\frac{v_{z_1}}{a^2} + \frac{v_{z_2}}{a^2}\right) + (\nu_2^2 - \nu_1^2)^2 = 0$$

(8)-at kielégítő ν_1 és ν_2 választás esetén meghatározható az a közös λ_0 gyöke a (7) egyenleteknek, melyre

$$z_1 = z_2 = e^{\lambda_0 z}.$$

A (2) egyenletrendszer megoldása tehát

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} u_1 = e^{\lambda_0 z} A_1 J_0(i\nu_1 r) \\ u_2 = e^{\lambda_0 z} [A_2 J_0(i\nu_2 r) + B_2 K_0(\nu_2 r)]. \end{cases}$$

Ehhez az eredményhez természetesen még tetszésszerinti konstans érték adható. Ennek segítségével a megoldásrendszer bármely megadott belépési hőfokhoz hozzáilleszthető.

A (9)-ben szereplő, még határozatlan állandókat a határfeltételek segítségével számítjuk ki. (9)-et 1°-be és 2°-be helyettesítve két darab három ismeretlent tartalmazó egyenletet nyerünk. Végigosztva például B_2-vel és bevezetve az

$$\frac{A_1}{B_1} = A_3, \quad \frac{A_2}{B_2} = A_4$$

jelöléseket, kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk, melyből a keresett együtthatók $B_2 = 1$ választás mellett meghatározhatók.

A (9) egyenletből

$$\text{(10)} \qquad \left.\begin{matrix} u_1(\lambda,r) \\ u_2(\lambda,r) \end{matrix}\right\} = e^{\lambda z}\, U(\lambda, r),$$

ahol

$$U(\lambda,r) = \begin{cases} A_3 J_0(i\,\nu_1 r), & \text{ha} \quad 0 \leq r \leq \alpha \\ A_4 J_0(i\,\nu_2 r) + K_0(\nu_2 r), & \text{ha} \quad 0 \leq r \leq \beta. \end{cases}$$

Gyakorlatban a hőcserélő külső falán is adott valamilyen $u_3(z)$ hőmérsékleteloszlást, mely csak hosszirányban változik, de a rögzített $r = \beta$ és z értékre a külső cső körül köröskörül ugyanakkora. Ezen kívül a külső csőfalra is fennáll a 2°-höz hasonló kikötés, azaz

$$\text{(11)} \qquad u_3 - u_2 = k^* \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\beta}$$

ahol k^* a külső csőfal hőátbocsátási tényezője. Ezt a kikötést (10) általában nem teljesíti. Azonban differenciálegyenletünk lineáris, tehát a (11) feltételt kielégítő megoldást (10) alakú függvények lineáris szuperpozíciójaként kereshetjük:

$$\text{(12)} \qquad u = \int h(\lambda)\, e^{\lambda z}\, U(\lambda, r)\, d\lambda.$$

A külső hőmérsékleteloszlás (11) miatt kielégíti az

$$u_3(z) = U(\lambda, \beta) + k^* U_r'(\lambda, \beta)$$

egyenlőséget. (12)-t behelyettesítve :

$$u_3(z) = \int h(\lambda) [U(\lambda, \beta) + k^* U_r'(\lambda, \beta)] e^{\lambda z} d\lambda. \tag{13}$$

Másrészt az adott $u_3(z)$-t előállítjuk Laplace-transzformált alakjában :

$$u_3(z) = \int f(\lambda) e^{\lambda z} d\lambda. \tag{14}$$

A (13) és (14) egyenletek baloldalainak azonosságából $f(\lambda)$ kiszámítása után

$$h(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{U(\lambda, \beta) + k^* U_r'(\lambda, \beta)}.$$

A határfeltételeket kielégítő, az adott külső hőmérsékleteloszláshoz illeszkedő megoldás tehát :

$$u = \int \frac{f(\lambda)}{U(\lambda, \beta) + k^* U_r'(\lambda, \beta)} e^{\lambda z} U(\lambda, r) d\lambda.$$

2. §. A radiális irányban állandó hőmérséklet esete

Itt feltételezzük, hogy a hőmérséklet a hőcserélőben radiális irányban állandó, azaz

$$u = u(z).$$

Az áramló gáz fajhője C és a teljes keresztmetszeten másodpercenként átáramló gázmennyiség G.

A belső cső dz vastagságú hengerében a hőmérsékletváltozás

$$\left(u_1 + \frac{du_1}{dz} dz\right) - u_1 = \frac{du_1}{dz} dz.$$

A hőmennyiségváltozás

$$CG \frac{du_1}{dz} dz.$$

Ez a hőmennyiség tart egyensúlyt a csőfalon át belépő hővel. Az elemi hengerpalást felszíne $2\pi a\, dz$, ezen át belépő hőmennyiség $k 2\pi a (u_2 - u_1) dz$. Tehát

$$CG \frac{du_1}{dz} dz = 2\pi a k (u_2 - u_1) dz. \tag{15}$$

A külső csőben a hőmennyiségváltozás két részből áll. Egyik része — a belső csőhöz hasonlóan — a konvekcióból eredő hőmennyiségváltozás,

$$-CG\frac{du_2}{dz}dz,$$

másik része pedig a belső csőnek átadott hő,

$$2\pi ak(u_2-u_1)\,dz;$$

ezek összege a környezettől felvett

$$2\pi\beta k^*(u_3-u_2)\,dz$$

hőmennyiséggel egyenlő. Egyenletünk tehát :

$$-CG\frac{du_2}{dz}dz+2\pi ak(u_2-u_1)\,dz=2\pi\beta k^*(u_3-u_2)\,dz. \tag{16}$$

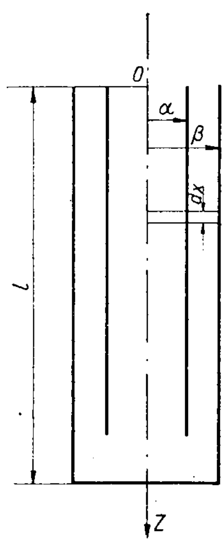
A (15) és (16) egyenletekből álló rendszerhez két kezdeti feltétel csatlakozik :

3°. A külső és belső cső hőmérséklete a cső lezárt végén megegyezik :

$$u_1(l)=u_2(l).$$

4°. A kilépő gáz hőfoka azonos a környezet hőmérsékletével :

$$u_2(0)=u_3(0).$$



2. ábra

Végeredményben tehát megoldandó a

$$(17)\qquad \begin{cases} CG\dfrac{du_1}{dz} = 2\pi ak(u_2 - u_1) \\ CG\dfrac{du_2}{dz} = 2\pi ak(u_2 - u_1) - 2\pi\beta k^*(u_3 - u_2) \end{cases}$$

egyenletrendszer a 3°. és 4°. feltételek mellett. (17)-ben végigosztva CG-vel és bevezetve a

$$A = \frac{2\pi ka}{CG};\quad B = \frac{2\pi k^*\beta}{CG}$$

jelöléseket, nyerjük a

$$\frac{du_1}{dz} = -Au_1 + Au_2$$

$$\frac{du_2}{dz} = -Au_1 + (A+B)u_2 - Bu_3$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert. Ennek általános megoldása:

$$(18)\qquad \begin{cases} u_1(z) = \dfrac{B}{\sqrt{B^2+4AB}}\displaystyle\int_0^z u_3(\zeta)\,e^{-\lambda_2\zeta}d\zeta\cdot\left[-(A+\lambda_1)e^{\lambda_1 z} + Ae^{\lambda_2 z}\right] + \\ \qquad\qquad + g_1Ae^{\lambda_1 z} + g_2Ae^{\lambda_2 z}, \\ u_2(z) = \dfrac{B}{\sqrt{B^2+4AB}}\displaystyle\int_0^z u_3(\zeta)\,e^{-\lambda_2\zeta}d\zeta\cdot\left[-\dfrac{(A+\lambda_1)^2}{A}e^{\lambda_1 z} + (A+\lambda_2)e^{\lambda_2 z}\right] + \\ \qquad\qquad + g_1(A+\lambda_1)e^{\lambda_1 z} + g_2(A+\lambda_2)e^{\lambda_2 z}, \end{cases}$$

ahol λ_1 és λ_2 a homogén rendszer

$$\begin{vmatrix} \lambda + A & -A \\ A & \lambda-(A+B) \end{vmatrix} = 0$$

karakterisztikus egyenletének gyökei. A kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást (18)-nak a kezdeti feltételekbe való behelyettesítésével g_1-et és g_2-t kiszámítva nyerjük.

Végül itt kell köszönetet mondanom *Freud Gézá*-nak a munkámhoz nyújtott segítségéért.

IRODALOM

[1] A. G. KASZATKIN: *Alapműveletek, gépek és készülékek a vegyiparban.* Nehézipari Könyv- és Folyóiratkiadó, V., Budapest, 1953.

[2] PH. FRANK—R. VON MISES: *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik.* Vieweg, Braunschweig, 1930.

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТЕПЛООБМЕННИКЕ С ДВОЙНОЙ ТРУБКОЙ

Г. Силваи

Резюме

В настоящей работе определяется распределение температуры в теплообменнике с двойной трубкой при постоянстве скорости газового потока.

В первой части работы автор приводит общее решение, распространяющееся на случай любого распределения наружной и любой входной температуры. Дается решение методом Фурье уравнения

$$a^2 \triangle u - \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{grad}\, u = 0$$

установившейся переносной теплопроводности, отдельно для наружной и для внутренней трубок теплообменника. Распределение во внутренней трубке u_1, а в наружной u_2. Граничные условия следующие:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a} = a$$

и

$$u_2 - u_1 = k\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a}.$$

Частное решение, удовлетворяющее граничным условиям имеет вид

$$u_1 = e^{\lambda_0 z} A_1 J_0 (i\nu_1 r)$$

$$u_2 = e^{\lambda_0 z} [A_2 J_0 (i\nu_2 r) + B_2 K_0 (\nu_2 r)],$$

где K_0 модифицированная функция Бесселя, а λ_0 общий корень характеристических уравнений

$$\lambda_1^2 - \frac{v_{z_1}}{a^2}\lambda_1 + \nu_1^2 = 0$$

$$\lambda_2^2 + \frac{|v_{z_2}|}{a^2}\lambda_2 + \nu_2^2 = 0.$$

Возможные значения для ν_1 и ν_2 получаются из условия равности нулю равнодействующей характеристических уравнений. Значения постоянных можно вычислять из граничных условий. Решение, приспособленное к произвольному данному распределению $u_3(z)$ температуры среды, окружающей теплообменник, дается формулой

$$u = \int \frac{f(\lambda)}{U(\lambda, \beta) + k^* U'_r(\lambda, \beta)} e^{\lambda z} U(\lambda, r)\, d\lambda,$$

где $f(\lambda)$ можно вычислить из уравнения

$$u_3(z) = \int f(\lambda)\, e^{\lambda z}\, d\lambda,$$

и

$$U(\lambda, r) = \begin{cases} A_3 J_0 (i\nu_1 r)_1 \text{ если } 0 \leqq r \leqq a \\ A_4 J_0 (i\nu_2 r) + K_0 (\nu_2 r) \text{ если } a \leqq r \leqq \beta. \end{cases}$$

Во второй части работы рассматривается случай, когда температура газового потока в радиальном направлении не изменяется

$$u = u(z)$$

Для решения этой задачи необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение дается формулой (18).

BERECHNUNG DER TEMPERATURVERTEILUNG IM DOPPEL-ROHRWÄRMEAUSTAUSCHER

Frau G. SZILVAY

Zusammenfassung

Es wird die Temperaturverteilung in einem Doppelrohrwärmeaustauscher bestimmt unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit des strömenden Gases konstant ist.

Im ersten Teil wird die Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$a^2 \triangle u - \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{grad}\ u = 0$$

durch die Fouriersche Methode unter folgenden Randbedingungen gelöst: Es sei u_2 die Verteilung der Temperatur im äusseren Rohr, u_1 diejenige im inneren Rohr, dann gilt

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a}$$

und

$$u_2 - u_1 = k\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a}$$

Eine partikuläre Lösung, die diesen Randbedingungen genügt, ist folgende:

$$u_1 = e^{\lambda_0 z} A_1 J_0(i\nu_1 r)$$

$$u_2 = e^{\lambda_0 z}\left[A_2 J_0(i\nu_2 r) + B_2 K_0(\nu_2 r)\right]$$

wo K_0 die modifizierte Besselsche Funktion und λ_0 die gemeinsame Wurzel der charakteristischen Gleichungen

$$\lambda_1^2 - \frac{v_{z_1}}{a^2}\lambda_1 + \nu_1^2 = 0$$

$$\lambda_2^2 + \frac{|v_{z_2}|}{a^2}\lambda_2 + \nu_2^2 = 0$$

darstellt, wobei sich die möglichen Werte, von ν_1 und ν_2 aus den Nullstellen der Resultan t der charakteristischen Gleichungen ergeben. Die Konstanten können aus den Rand bedingungen berechnet werden. Ist $u_3(z)$ die gegebene Temperaturverteilung in de Umgebung des Wärmeaustausches, so ist die dieser Temperaturverteilung angepass t Lösung der Wärmeleitungsgleichung,

$$u = \int \frac{f(\lambda)}{U(\lambda,\beta) + k^*\, U_r(\lambda,\beta)}\, e^{\lambda z} u(\lambda, r)\, d\lambda$$

wobei $f(\lambda)$ aus der Gleichung

$$u_3(z) = \int f(\lambda)\, e^{\lambda z}\, d\lambda$$

bestimmt werden kann, während

$$U(\lambda, r) = \begin{cases} A_3 J_0(i\nu_1 r), \text{ wenn } 0 \leqq r \leqq a \\ A_4 J_0(i\nu_2 r) + K_0(\nu_2 r), \text{ wenn } a \leqq r \leqq \beta \end{cases}$$

st.

Im zweiten Teil der Arbeit wird der Fall behandelt, dass sich die Temperatur des strömenden Gases in radialer Richtung nicht ändert, also

$$u = u(z)$$

ist. Zur Lösung dieser Aufgabe braucht ein System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen gelöst zu werden. Die Lösung wird durch die Formel (18) gegeben.