

KÖZELÍTŐ ELJÁRÁS CAUCHY-SÚRÚSÉGFÜGGVÉNYEK KEVERÉKÉNEK ÖSSZETEVŐKRE BONTÁSÁRA

MEDGYESSY PÁL

Bevezetés

[1] dolgozatunkban, amelyben bizonyos valószínűségi sűrűségfüggvények konstans súlyokkal vett keverékének összetevőire bontásával foglalkoztunk, megemlítettük a Cauchy-sűrűségfüggvények esetét is (lásd: [1], 6. §.) a rájuk alkalmazandó eljárást azonban nem részleteztük.

Ezt a hiányt akarjuk részben pótolni ezzel a dolgozatunkkal. Közzölünk fogunk Cauchy-sűrűségfüggvények

$$g(x) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{\pi \sigma_k} \frac{1}{1 + \frac{(x - m_k)^2}{\sigma_k^2}} \equiv \sum_{k=1}^N \frac{A_k \sigma_k}{\pi [\sigma_k^2 + (x - m_k)^2]}$$

alakú ($A_k, m_k, \sigma_k > 0$ konstansok) keverékének komponensekre bontására, illetve az ismeretlen paraméterek (elsősorban az m_k -k) meghatározására egy közelítő eljárást, amely hasonlít ahhoz, amelyet a [2] dolgozat 5. §-ában Gauss-függvények keverékére alkalmaztunk. Ennek az eljárásnak az az előnye, hogy — másokkal ellentétben — minden segédeszköz nélkül elvégezhető, és aránylag kevés munkával kvalitatíve használható eredményt szolgáltat.

1. §. Az eljárás

Kiindulunk tehát a következőkből: ismerjük Cauchy-sűrűségfüggvények

$$(1) \quad g(x) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k \sigma_k}{\pi [\sigma_k^2 + (x - m_k)^2]}$$

alakú keverékét, ahol az ismeretlen $A_k, \sigma_k > 0, m_k$ paraméterekről az eljárás lényegének megváltoztatása nélkül feltehetjük, hogy $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_N$, és az m_k -k mind különbözők. Meg kell határoznunk az A_k, σ_k, m_k paramétereket.

Feladatunkat a [1]-ben tárgyalt „szóráscsökkentés” módszerével oldhatjuk meg. Előállítunk általunk választott $0 < \lambda < \sigma_1$ paraméterrel, — egyedül $g(x)$ grafikonját használva fel — egy

$$(2) \quad g^*(x, \lambda) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k (\sigma_k - \lambda)}{\pi [(\sigma_k - \lambda)^2 + (x - m_k)^2]}$$

függvényt. Ez szintén Cauchy-sűrűségfüggvények keveréke, amelyek maximuma ugyanott van, mint a $g(x)$ függvény megfelelő indexű komponenseinek maximuma, alakjuk azonban keskenyebb és magasabb. Ha $\lambda \rightarrow \sigma_1$, az 1-indexű komponens *Dirac- δ -vá* (»tűvé«) fajul el. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy több monoton növekvő λ -értékkel előállítva a $g^*(x, \lambda)$ függvényt, az 1-indexű komponens annál jobban »tűszerűen« kiemelkedik, minél közelebb jár az éppen alkalmazott λ a σ_1 értékhez. Erősen kiemelkedő »tű« tehát az $x = m_1$ értéknél fog mutatkozni, az ugyanekkor használt λ közelítőleg σ_1 értékét szolgáltatja, bár könnyebb σ_1 -et az ekkor általában már elég különváltan jelentkező első komponens görbéjéből határozni meg. Így tehát két paramétert már ismerünk; az eljárás megismétlését s ezzel újabb paraméterek, továbbá az A_k súlyok meghatározását, egyforma σ_k -k vagy m_k -k esetét stb. itt nem érintjük már, hiszen erről [1]-ben és [2]-ben bőven volt szó.

A $g^*(x, \lambda)$ függvény Fourier-transzformáción alapuló előállítását elvben letárgyaltuk [1]-ben; most más utat mutatunk a keresett paraméterek meghatározására.

Próbáljuk meg egyelőre itt is alkalmazni a [2] dolgozat 5. §-ában leírt módszert. Fejtsük λ szerint hatványsorba a $g^*(x, \lambda)$ függvényt. Ebben szerepel

$\left[\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g^*(x, \lambda) \right]_{\lambda=0}$. Ha $n = 2r$, ez kifejezhető $g(x)$ deriváltjaival, mert $g^*(x, \lambda)$ eleget tesz a

$$\frac{\partial^2 g^*}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 g^*}{\partial x^2} = 0$$

differenciálegyenletnek, ebből pedig az következik, hogy

$$\frac{\partial^{2r} g^*}{\partial \lambda^{2r}} = (-1)^r \frac{\partial^{2r} g^*}{\partial x^{2r}},$$

és így $g^*(x, \lambda)$ alakja folytán

$$(3) \quad \left[\frac{\partial^{2r} g^*}{\partial \lambda^{2r}} \right]_{\lambda=0} = (-1)^r \left[\frac{\partial^{2r} g^*}{\partial x^{2r}} \right]_{\lambda=0} = (-1)^r \frac{d^{2r} g}{dx^{2r}},$$

minthogy $g^*(x, 0) = g(x)$. A páratlan rendű deriváltak azonban nem fejezhetők ki $g(x)$ deriváltjaival, s ezért nem alkalmazhatjuk közvetlenül a [2] dolgozat 5. §-ában közölt eljárást.

Ha azonban megelégszünk az m_k paramétereknek és a komponensek számának a meghatározásával, könnyen szerkeszthetünk olyan függvényt, amely szintén végtelenbe futó *Dirac- δ -t* mutat az $x = m_1$ helyen, ha $\lambda \rightarrow \sigma_1$, — *bár típusa már nem $g^*(x, \lambda)$ típusa* — emellett pedig $g(x)$ páros deriváltjai és λ segítségével állítható elő.¹⁾

Ez a függvény:

$$(4) \quad G^*(x, \lambda) = \frac{1}{2} [g^*(x, \lambda) + g^*(x, -\lambda)].$$

¹⁾ Ez az észrevétel általános módszernek tekinthető keverékek felbontásánál: Ha az adott keverék alapján elő tudunk állítani egy olyan függvényt, amelynek ugyan más a típusa, de pl. maximumhelyei ugyanott vannak, mint a felbontandó keveréknek, problémánkat megoldottuk, hiszen a maximum helyéből már következtethetünk a keresett paraméterekre.

Ha $\lambda \rightarrow \sigma_1$, $g^*(x, \lambda)$, mint láttuk, az $x = m_1$ helyen *Dirac*- δ -vá fajul el, $g^*(x, -\lambda)$ pedig σ_k helyett $\sigma_k + \lambda$ paraméterű, — tehát az eredetinelé laposabb — Cauchy-sűrűségfüggvénykeveréket képvisel, ami ugyan eltorzítja $g^*(x, \lambda)$ alakját, a *Dirac*- δ -n azonban mit sem változtat, mert benne nem keletkezik újabb *Dirac*- δ . Így tehát a »tű« fellépte alapján a $G^*(x, \lambda)$ függvényből is meghatározható m_1 —, épp úgy, mint ahogy $g^*(x, \lambda)$ -ból — a »tű« kihagyása után pedig az eljárás megismételhető, és lépésenként az összes m_k értékeket megadja (s ezzel a komponensek N számát is).

Az A_k , σ_k paraméterek meghatározását itt általánosságban már nem tudjuk elvégezni.

Megelégedve tehát az említett eredménnyel, a $G^*(x, \lambda)$ függvényt a következőképpen állítjuk elő: a benne szereplő $g^*(x, \lambda)$ és $g^*(x, -\lambda)$ függvényeket λ szerint hatványsorba fejtjük (ezek konvergenciáját később igazoljuk):

$$g^*(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left[\frac{\partial^n g^*}{\partial \lambda^n} \right]_{\lambda=0}, \quad (5)$$

$$g^*(x, -\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \left[\frac{\partial^n g^*}{\partial \lambda^n} \right]_{\lambda=0}.$$

Képezzük ezekkel a

$$G^*(x, \lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2r}}{(2r)!} \left[\frac{\partial^{2r} g^*}{\partial \lambda^{2r}} \right]_{\lambda=0}$$

függvényt; végül is (3) felhasználásával:

$$G^*(x, \lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\lambda^{2r}}{(2r)!} \frac{d^{2r} g}{dx^{2r}}. \quad (6)$$

A felbontás alapjául szolgáló $G^*(x, \lambda)$ függvényt tehát a kiindulási $g(x)$ függvény páros deriváltjaival képezett függványsor adja meg.

2. §. Az eljárás gyakorlati kivitele

A gyakorlatban persze csak közelítőleg állíthatjuk elő a $G^*(x, \lambda)$ függvényt, — úgy, hogy (6) valamilyen szelétét vesszük. Vegyük az $r = S$ indexszel záruló szeletet. Meg fogjuk becsülni, milyen hibával közelíti meg ez a szelet $G^*(x, \lambda)$ -t.

Ehhez figyelembe kell vennünk, hogy $g(x)$ páros deriváltjait numerikusan tudjuk csak meghatározni. Az erre szolgáló formulákat (a hatodik deriváltig bezárólag) pl. [3] 199. oldalán találhatunk; a nyolcadik és tizedik derivált közelítő meghatározására is alkalmas (azaz 7-nél több rácsponttal dolgozó) formulákat a kézikönyvekben azonban nem találtunk. Mivel $D^*(x, \lambda)$ pontosabb előállításánál erre is szükség lehet, kiszámítottuk a másodiktól tizedikig terjedő deriváltak 11 rácspontra támaszkodó numerikus formuláit. Ezeket a *Függelék*-ben közöljük.

Ha tehát (6)-ban csak az S indexig haladunk, kétféle hibát követünk el. Az egyik hiba, δ_1 abból adódik, hogy a 2., 4., ..., $2S$ -edik deriváltakat numerikusan határozzuk meg. Legyen a $2r$ -edik deriválthoz tartozó hiba Δ_{2r} ($r = 1, 2, \dots, S$). Ezek értékét (rájuk vonatkozó becslést) a numerikus deriválás formulái mindig közlik. A *Függelék*-ben közölt formuláinknál mi is megadtuk őket. A deriváltak közelítő meghatározásából származó összes hiba nyilván

$$(7) \quad \delta_1 = \sum_{r=0}^S (-1)^r \frac{\lambda^{2r}}{(2r)!} \Delta_{2r}.$$

Ennek értéke a Δ_{2r} értékektől függ, és a numerikus deriválás rácsponjtjainak sűrítésével csökkenthető; itt nem foglalkozunk vele tovább, mert a Δ_{2r} hibák alakjára a *Függelék*-ben úgys visszatérünk.

A másik hiba, δ_2 , a függvénytör maradátagjának elhanyagolásából ered; ezt legcélszerűbbnek mutatkozott a

$$\delta_2 = \sum_{r=S+1}^{\infty} (-r)^r \frac{\lambda^{2r}}{(2r)!} \frac{d^{2r}g}{dx^{2r}}$$

alakban vizsgálni, és tagonként becsülni. Ehhez szükségünk van $g(x)$ páros deriváltjainak kifejezésére. $g(x)$ alakja folytán tulajdonképp elég $\frac{d^{2r}}{dy^{2r}} \left[\frac{1}{\sigma_k^2 + y^2} \right]$ kifejezését meghatározni; ez azonban az

$$\frac{1}{\sigma_k^2 + y^2} = \frac{1}{2\sigma_k} \left[\frac{1}{\sigma_k + iy} + \frac{1}{\sigma_k - iy} \right]$$

reláció alapján könnyen megy, és végeredménye:

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d^{2r}}{dy^{2r}} \left[\frac{1}{\sigma_k^2 + y^2} \right] &= \frac{(2r)! (-1)^r}{2\sigma_k} \left[\frac{(\sigma_k + iy)^{2r+1} + (\sigma_k - iy)^{2r+1}}{(\sigma_k^2 + y^2)^{2r+1}} \right] = \\ &= \frac{(2r)! (-1)^r}{\sigma_k (\sigma_k^2 + y^2)^{\frac{2r+1}{2}}} \cos \left[(2r+1) \arctg \frac{y}{\sigma_k} \right]. \end{aligned}$$

Ennek alapján egyszerű átalakítások után

$$(9) \quad \frac{d^{2r}g}{dx^{2r}} = \sum_{k=1}^N A_k \frac{(2r)! (-1)^r \cos [(2r+1) \arctg ((x-m_k)/\sigma_k)]}{\pi [\sigma_k^2 + (x-m_k)^2]^{\frac{2r+1}{2}}}.$$

Következésképp:

$$\delta_2 = \sum_{r=S+1}^{\infty} \frac{\lambda^{2r}}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k \frac{\cos [(2r+1) \arctg ((x-m_k)/\sigma_k)]}{[\sigma_k^2 + (x-m_k)^2]^{\frac{2r+1}{2}}}$$

és

$$(10) \quad |\delta_2| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k \sum_{r=S+1}^{\infty} \frac{\lambda^{2r}}{[\sigma_k^2 + (x - m_k)^2]^{\frac{2r+1}{2}}}.$$

Mivel feltevés szerint $\lambda < \sigma_1$, a második összeg geometriai sort tartalmaz. Ezt összegezve :

$$|\delta_2| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{A_k \lambda^{2S+2}}{[\sigma_k^2 + (x - m_k)^2 - \lambda^2] [\sigma_k^2 + (x - m_k)^2]^{S+1/2}}.$$

Most $g(x)$ -et akarjuk behozni a jobboldalon. E célból szorozzuk és osszuk az összeg minden tagját a megfelelő indexű σ_k^{2S+1} értékkel; így a következőt kapjuk :

$$|\delta_2| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{A_k \lambda^{2S+2}}{\sigma_k^{2S+1} [\sigma_k^2 + (x - m_k)^2 - \lambda^2]} \left[\frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + (x - m_k)^2} \right]^{S+1/2}.$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés mindig ≤ 1 , és így értékét csak növeljük, ha $S + \frac{1}{2}$ helyett első hatványon vesszük. Ekkor azonban az átalakítások után

$$|\delta_2| \leq \sum_{k=1}^N \left(\frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{2S} \frac{\lambda^2}{[\sigma_k^2 + (x - m_k)^2 - \lambda^2]} \frac{A_k \sigma_k}{\pi [\sigma_k^2 + (x + m_k)^2]} < \\ < \left(\frac{\lambda}{\sigma_1} \right)^{2S} \frac{\lambda^2}{\sigma_1^2 - \lambda^2} \sum_{k=1}^N \frac{A_k \sigma_k}{\pi [\sigma_k^2 + (x - m_k)^2]},$$

vagyis végül

$$(11) \quad |\delta_2| < \left(\frac{\lambda}{\sigma_1} \right)^{2S} \frac{\lambda^2}{\sigma_1^2 - \lambda^2} g(x),$$

amivel az x helytől függő hibabecslésre jutottunk.

Megjegyezzük, hogy ha a σ_k értékek közt azonosak is vannak, a hibabecslésben σ_1 helyett a σ_k értékek minimuma fog szerepelni.

Látjuk, hogy minél közelebb van λ a σ_1 -hez, annál nagyobb S értékkel tudjuk csak leszorítani a hibakorlátot. A sorszelettel előállított függvény a $\lambda = \sigma_1$ esetben sem fog *Dirac*- δ -t mutatni, de a σ_1 -nél kisebb értékekkel elérhető közelítés általában már jól mutatja a különvált komponenseket. Mivel λ ekkor még nem azonosítható σ_1 -gyel, az eljárás megbízhatóan csak az m_k paraméterek értékeit s így a komponensek számát szolgáltathatja. A gyakorlatban legtöbbször ez is elég. Egy-két λ -értéknél többel sem kell általában kísérletezni; legtöbbször egyetlen kísérletnél is elég jól különváltan mutatkoznak már a komponensek.

Itt foglalkozunk még röviden az (5) alatti hatványsorok konvergenciájának bizonyításával. Elég kimutatni, hogy maradéktagjaik zérushoz tartanak; ekkor előállítják a $g^*(x, \lambda)$, illetve $g^*(x, -\lambda)$ függvényeket.

A valamilyen $n = s + 1$ -től számított maradéktagokat itt előnyösebb

$$R_{s+1} = \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} \left[\frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n} \right]_{\lambda=0}$$

alakban írni, ahol $\lambda_1 = \lambda$ vagy $-\lambda$, aszerint, hogy melyik függvényről van szó; $|\lambda_1| = \lambda$. A $g^*(x, \lambda)$ alakja folytán itt is elég a

$$\frac{d^n}{dy^n} \left[\frac{y}{y^2 + B_k^2} \right]$$

deriválttal foglalkozni ($B_k = x - m_k$). Felhasználva az

$$\frac{y}{y^2 + B_k^2} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{B_k - iy} - \frac{1}{B_k + iy} \right]$$

összefüggést, a $\frac{d^{2r}g}{dx^{2r}}$ kiszámításánál alkalmazott eljárással végül is

$$\frac{d^n}{dy^n} \left[\frac{y}{y^2 + B_k^2} \right] = \frac{n! \sin[(n+1) \arctg(y/B_k) + n\pi/2]}{[y^2 + B_k^2]^{\frac{n+1}{2}}},$$

aminek a felhasználásával

$$R_{s+1} = \sum_{n=s+1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda_1^n}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k \frac{\sin[(n+1) \arctg((\sigma_k/(x-m_k)) + n\pi/2)]}{[\sigma_k^2 + (x-m_k)^2]^{\frac{n+1}{2}}},$$

illetve

$$|R_{s+1}| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{[\sigma_k^2 + (x-m_k)^2]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Ez azonban lényegében a (10) alatti egyenlőtlenséggel azonos, így az ottani számításokat megismételve, végül is

$$|R_{s+1}| < \left(\frac{\lambda}{\sigma_1} \right)^s \frac{\lambda}{\sigma_1 - \lambda} g(x)$$

(általános esetben itt is min σ_k szerepel σ_1 helyett).

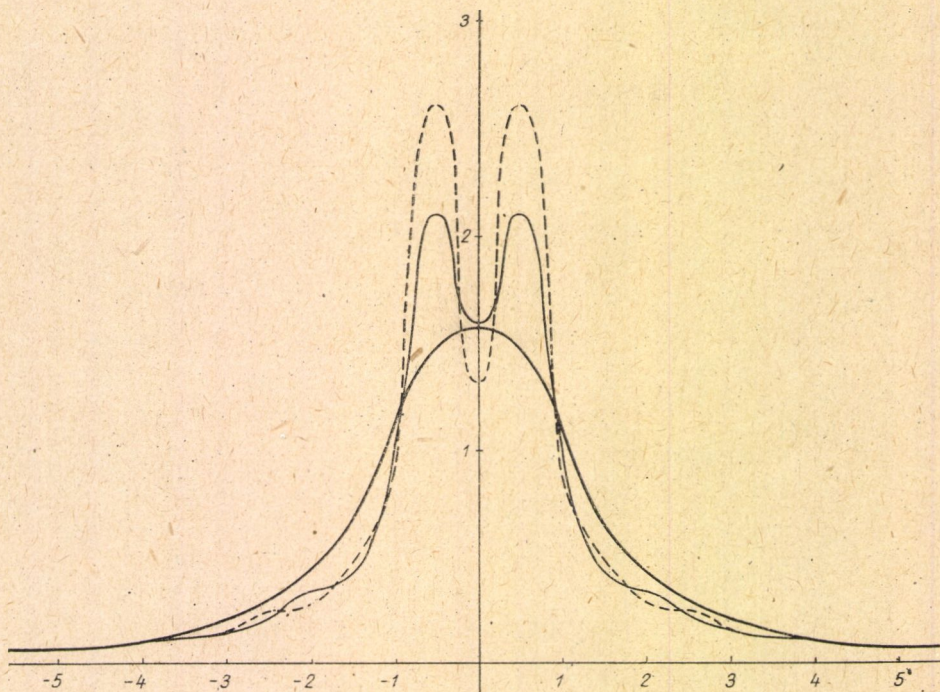
Mivel $g(x)$ korlátos és $\lambda < \sigma_1$ (illetve $\lambda < \min \sigma_k$), a jobboldal bármely x helyen zérushoz tart, ha $s \rightarrow \infty$. Ezzel a konvergenciát bebizonyítottuk.

A (6) függvénysor szeletével való közelítés általában még akkor is jó, ha a hibakorlátok már jóval felülmúlják $g(x)$ értékeit. Illusztrálásul bemutatjuk a fiktív

$$(12) \quad g(x) = \frac{1}{1 + (x - 0,5)^2} + \frac{1}{1 + (x + 0,5)^2}$$

keverék felbontását (lásd: 1. ábra).

Itt $A_1 = A_2 = \pi$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$. A $g(x)$ függvény grafikonját az ábrán a vastag vonal mutatja, a $G^*(x, \lambda)$ függvény $\lambda = 3/4$ -del megalkotott közelítő görbét pedig a vékony vonal (a függvényt az $r = 5$ indexnél zártuk le). A pontos eredmény itt kiszámítható; görbét pontozva tüntettük fel. A differenciálhányadosokat a Függelék formulái alapján tizenegy $0,5$ -távolságú rácspontból számítottuk ki. A hibakorlátok esetünkben már sokszorosan felülmúlják



1. ábra

$g(x)$ ordináta-értékeit, a közelítés azonban még mindig elég jó és határozottan mutatja a komponenseket.

A dolgozatunkban tárgyaltak magfizikai stb. felhasználásáról [1]-ben már szóltunk.

Függelék

A közelítő számítások kézikönyveiben nem szokták közölni a nyolcadik és tizedik deriváltak numerikus kiszámítását. Ezt akarjuk itt pótolni.

Közljük tízig bezárólag a páros deriváltak numerikus formuláit, amelyeket 11, egyenként h távolságú rácspontból számítottunk. A formulák a középső pontban adják meg a derivált értékét.²⁾

²⁾ A számításokat részben Haraszi Tamásné egyetemi hallgató végezte el tanulmányi gyakorlata alatt.

A számítás alapgondolata a következő: a deriválandó $f(x)$ függvényt Taylor-sorba fejtjük az $x \pm h, x \pm 2h, \dots, x \pm 5h$ helyeken, egészen a tizenegyedik tagig bezárólag, s a maradéktagot is felírjuk. Ezzel lineáris egyenlet-rendszert kaptunk az egyes (x helyen vett) deriváltakra, és így ezek az $f(x + ph)$ ($p = 0, \pm 1, \dots, \pm 5$) mennyiségeknek és a maradéktagoknak a lineáris kifejezései lesznek. A maradéktagokban szereplő deriváltakat felső korlátjaikkal fejezzük ki. Eredményeink a hagyományos formában:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= \frac{8\sigma_5 - 125\sigma_4 + 1000\sigma_3 - 6000\sigma_2 + 4000\sigma_1 - 73766\sigma_0}{25 \cdot 200 h^2} + \\ &\quad + 4,5630 \cdot 10^{-4} h^{10} \partial_2 M_{12}; \\ f^{(4)}(x) &= \frac{-82\sigma_5 + 1261\sigma_4 - 9738\sigma_3 + 52428\sigma_2 - 140196\sigma_1 + 192654\sigma_0}{15120 h^4} + \\ &\quad + 1,4920 \cdot 10^{-3} h^8 \partial_4 M_{12}; \\ f^{(6)}(x) &= \frac{13\sigma_5 - 190\sigma_4 + 1305\sigma_3 - 4680\sigma_2 + 9690\sigma_1 - 12276\sigma_0}{240 h^6} + \\ &\quad + 2,7982 \cdot 10^{-2} h^8 \partial_6 M_{12}; \\ f^{(8)}(x) &= \frac{-\sigma_5 + 13\sigma_4 - 69\sigma_3 + 204\sigma_2 - 378\sigma_1 + 462\sigma_0}{3 h^8} + \\ &\quad + 6,9560 \cdot 10^{-1} h^4 \partial_8 M_{12}; \\ f^{(10)}(x) &= \frac{\sigma_5 - 10\sigma_4 + 45\sigma_3 - 120\sigma_2 + 210\sigma_1 - 252\sigma_0}{h^{10}} + \\ &\quad + 1,8051 \cdot h^2 \partial_{10} M_{12}; \end{aligned}$$

$$\sigma_p = f(x + ph) - f(x - ph) \quad (p = 1, 2, \dots, 5);$$

$$\sigma_0 = f(x),$$

$$M_{12} = \max_{x \in I} |f^{(12)}(x)|, \text{ ahol } I \text{ az } [x - 5h, x + 5h] \text{ intervallum};$$

$$|\partial_i| \leq 1 \quad (i = 2, 4, \dots, 10)$$

M_{12} megállapításához Cauchy-sűrűségfüggvényeinek esetén jól felhasználhatók a (10) hibakorlát kiszámításánál levezetett egyenlőtlenségek; a végeredmény:

$$M_{12} < \frac{12! \max g(x)}{\min \sigma_1^{12}}$$

IRODALOM

[1] MEDGYESSY P.: „Újabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetnek Közleményei* 3 (1954) 155–169.

[2] MEDGYESSY P.: „Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének telbontása összetevőire.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 165–177.

[3] L. V. KANTOROVICS—V. I. KRÜLOV: *A felsőbb analízis közelítő módszerei*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ СМЕСИ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ ТИПА КОШИ

П. Меддеш

Резюме

В работе [1] автор занимался разложением на компоненты смеси (1) функций плотности типа Коши. В настоящей работе предложено приближенный метод решения той же проблемы. Этот метод пригоден в первой очереди для определения неизвестных параметров m_k — В основе метод совпадает «методом уменьшения дисперсии», описываемым в [1]: С произвольным параметром $\lambda < \sigma_1$ и (2) создается (4). Если $\lambda \rightarrow \sigma_1$ последняя функция вырождается в Диракову- δ функцию в точке $x = m_1$. Из этого факта величина m_1 может быть определена. После опущения Дираковой- δ функции мы можем повторять процедуру. Тогда m_2 станет определенным и т. д. — В практике процедура происходит следующим образом: С некоторыми монотонно возрастающими величинами λ составляем $G^*(x, \lambda)$ и обнаруживаем, на каком месте покажет ее график вершину, подобную Дираковой- δ функции. Если это явление констатируется, λ очевидно близка к σ_1 ; следовательно, из употребленной величины λ мы можем делать заключение на величину σ_1 . — Функция (2) тоже покажет появления Дираковой- δ ; мы употребляли (4) вместо (2) только из-за возможности представить его в форме (6) (с помощью (3) и (5), т. е. при помощи производных четного порядка анализируемой функции $g(x)$ и величины λ . Производные четного порядка функции $g(x)$ будут исчислены численно. Для исчисления 8-ой и 10-ой производной нам нужны формулы, которые опираются на по крайней мере 11 эквидистантных пунктах решетки; так как достижимые нами книги не содержат такие формулы, мы вычислили их. Они собраны в Приложении к настоящей статье. — В практике мы возьмем только частную сумму степени $r = S$ ряда $G^*(x, \lambda)$; ошибка δ_2 так полученного приближения оценивается (11). Оценка зависит от рассмотренного места x . Вычисление (11) естественно обосновано на соотношениях (8) и (9). При подобных условиях (7) оценивает ошибку, возникающую вследствие численного дифференцирования.

В качестве иллюстрации представляем разложение на компоненты смеси (12) (На рис. 1 —) — притом $\lambda = 3/4$, $S = 5$. Приближенное решение намечено с — — —. В нашем примере точное решение тоже могло быть вычислено (— — — —).

AN APPROXIMATE METHOD FOR THE DECOMPOSITION OF A COMPOUND OF CAUCHY FREQUENCY FUNCTIONS

Summary

P. MEDGYESSY

In [1] the decomposition of a compound (1) of Cauchy frequency functions has been investigated. In the present paper an approximate solution of the same problem is described. The basic idea agrees with the «variance reduction method» dealt with in [1]: With the arbitrary parameter $\lambda < \sigma_1$ and (2) we form (4). If $\lambda \rightarrow \sigma_1$ the latter function degenerates into a Dirac- δ at $x = m_1$. From this fact we can determine the value of m_1 . After having omitted the Dirac- δ the procedure may be repeated, and m_2 can be determined etc. — In practice the whole procedure happens as follows: by taking monotonically increasing λ -values we form $G^*(x, \lambda)$ and observe where its graph will show a Dirac- δ -like peak. If we observe this phenomenon, λ evidently is near to σ_1 . — The function (2) would also show the appearance of the Dirac- δ ; we use (4) instead of (2) only for the simple reason that, using (3) and (5), it can be presented in form (6), i. e. by aid of the derivatives of even order of the function $g(x)$ to be analysed and of λ only. The derivatives of even order of $g(x)$ will be computed numerically. For the computation of the 8-th and 10-th derivatives we need formulae working with at least 11 equidistant grid-points; since the available textbooks do not contain such formulae, they are collected in the Appendix of the present paper. — In practice we take only a partial sum of order $r = S$ of the series (6) of $G^*(x, \lambda)$; the error δ_2 of the approximation thus obtained is given by (11). The computation of (11) is essentially based on the relations (8) and (9). Under the same conditions the error arising from the numerical derivation is given by (7).

As an illustrative example (see: fig. 1.) we present the decompositions of the compound (12) (it is denoted on Fig. 1. by — — —), — Here $\lambda = 3/4$, $S = 5$. The approximate solution is shown on Fig. 1. by —. In our example the exact solution may also be computed (it is denoted in the Fig. by — — — —).