

KIEGÉSZÍTÉS
AZ
»ÚJABB EREDMÉNYEK VALÓSZÍNŰSÉGELOSZLÁSFÜGGVÉNYEK
KEVERÉKÉNEK ÖSSZETEVŐ RE BONTÁSÁVAL KAPCSOLATBAN«
CÍMŰ DOLGOZATHOZ

MEDGYESSY PÁL

Bevezetés

A címben említett [1], valamint a [2] dolgozatunkban részletesen foglalkoztunk az

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_k}$$

alakú ($A_k > 0$, $0 < m_1 < \dots < m_N$, $\sigma_k > 0$ konstansok) keverék-sűrűségfüggvény paramétereinek meghatározásával $f(x)$ grafikonja ismeretében (úgynevezett »Gauss-analízis«). Kimutattuk, hogy a problémát megoldottnak tekinthetjük, ha alkalmasan választott $\lambda^2 < \min \sigma_k^2$ paraméterrel elő tudjuk állítani az

$$(2) \quad f^*(x, \lambda^2) \equiv f^*(x) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}}$$

függvény grafikonját. Ez a gyakorlatban csak bizonyos közelítéssel történhetik; az egyes eljárásokat a [2] dolgozaton kívül az [1] dolgozat 1., 2. és 3. §-ában ismertettük. Utóbbiban mindenütt közöltük az eljárásnál elkövetett hiba korlátját, az ezeket szolgáltató terjedelmes levezetéseket azonban mellőztük.

Mivel ezek a levezetések nem egyszerűek, viszont a végeredményekre sokszor hivatkozunk, szükségesnek tartjuk ismertetni a szóbanforgó levezetéseket. Ez az egyetlen célja ennek a kiegészítésnek.

1. §. A Fourier-sorfejtésen alapuló eljárás hibája

Az $f^*(x)$ meghatározására szolgáló, az [1] dolgozat 1. §-ában ismertetett eljárás lényege az volt, hogy $f(x)$ és $f^*(x)$ elég nagy $(-l, l)$ alapintervallumon értelmezett és — típusuk folytán — őket előállító Fourier-cosinus-sorainak Q_n , illetve R_n együtthatói közt közelítőleg fennáll az

$$R_n \approx e^{\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2}} Q_n \equiv S_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

összefüggés, és így a

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

trigonometrikus sor közelítőleg előállítja az $f^*(x)$ függvényt. A gyakorlatban eszerint úgy járunk el, hogy harmonikus analízátorral $f(x)$ grafikonjából meghatározzuk $f(x)$ adott $(-l, l)$ alapintervallumra vonatkozó $\cos$ -sorának Q_n együtthatóit, majd az ezekből képezett S_n együtthatókkal előállítjuk $\Psi(x)$ valamilyen M indexszel záruló szeletét, $\Psi_M(x)$ -et. Nyilván ez is közelítés az $f^*(x)$ függvényre. Megbízható azonban csak akkor lesz, ha minden x helyre tudjuk, mennyit tér el $\Psi_M(x)$ a valóságos megoldástól, $f^*(x)$ -től (minden pontban lényeges $f^*(x)$ görbéjét pontosan ismerni!). Becslést keresünk tehát az $|f^*(x) - \Psi_M(x)| = D$ eltérésre (ahol az $f^*(x)$ függvényt már Fourier-cosinus-sorával felírva képzeljük). Ez így történik: Vezessük be az

$$\frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_k} \equiv \varphi_k(x), \quad \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} \equiv \varphi_k(x, \lambda^2) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

$$(\lambda^2 < \min \sigma_k^2)$$

és

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_k(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx &= Q_n^{(k)} \\ \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_k(x, \lambda^2) \cos \frac{n\pi}{l} x dx &= R_n^{(k)} \\ e^{\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2}} Q_n^{(k)} &= S_n^{(k)} \\ |R_n^{(k)} - S_n^{(k)}| &= \delta_n^{(k)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= 1, 2, \dots, N \\ n &= 0, 1, \dots, M \end{aligned}$$

jelöléseket, s legyen a $(0, l)$ intervallum oly nagy — illetve az origó az $f(x)$ görbéjéhez viszonyítva úgy megválasztva —, hogy $\frac{d}{dx} \varphi_k(x, \lambda^2)$ már monoton csökkenjen a $(-\infty, 0)$, illetve a (l, ∞) intervallumokban (ha a $(0, l)$ intervallum $f(x)$ grafikonjának gyakorlatilag ≈ 0 részét feleli, ez mindig teljesül!). Ezekkel a jelölésekkel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^N A_k \varphi_k(x) & f^*(x) &= \sum_{k=1}^N A_k \varphi_k(x, \lambda^2) \\ Q_n &= \sum_{k=1}^N Q_n^{(k)} & R_n &= \sum_{k=1}^N R_n^{(k)} \end{aligned}$$

és

$$(3) \quad Q_n \leq \sum_{k=1}^N A_k \left| \frac{1}{2} \delta_0^{(k)} + \sum_{n=1}^N \delta_n^{(k)} + \sum_{n=M+1}^{\infty} |R_n^{(k)}| \right|.$$

Az egyes tagokat egyenként becsüljük meg. Ehhez felhasználjuk a [2] dolgozat 4. §-ában közölt tételnek a következő speciális alakját:

$$(4) \quad \varphi_k(x, \lambda^2) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\lambda^2}{2} \right)^p \left[\frac{d^{2p}}{dx^{2p}} \varphi_k(x) \right].$$

Ezek után vizsgáljuk a

$$(5) \quad \delta_n^{(k)} = \frac{2}{l} \left| \int_0^l \varphi_k(x, \lambda^2) \cos \frac{n\pi}{l} x dx - e^{\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2}} \int_0^l \varphi_k(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \right|$$

kifejezést. Írjuk be az első integrálba a (4) függvényt, a másodikba mind $\exp(\lambda^2 n^2 \pi^2 / 2l^2)$ hatványsorát, mind pedig az

$$\int_0^l \varphi_k(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

integrál helyett a p -szer megismételt parciális integrálással kapott

$$(6) \quad \sum_{r=1}^p \frac{(-1)^{r+1}}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2r}} \left[\cos \frac{n\pi}{l} x \frac{d^{2r-1}}{dx^{2r-1}} \varphi_k(x) \right]_{x=0}^{x=l} +$$

$$+ \frac{(-1)^p}{\left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2p}} \int_0^l \left\{ \frac{d^{2p}}{dx^{2p}} \varphi_k(x) \right\} \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

kifejezést. Egyszerűsítések után fejezzük ki $\varphi_k(x)$ deriváltjait az $e^{-x^2/2}$ függvényvel generált H_m Hermite-polinomokkal, az egyszerűsítések közben fellépő

$$\sum_{n=r}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2} \right)^p \frac{1}{p!}$$

mennyiséget $[\exp(\lambda^2 n^2 \pi^2 / 2l^2)$ Maclaurin-sorának maradéktagját] pedig az

$$\frac{1}{(r-1)!} \int_0^{\lambda^2 n^2 \pi^2 / 2l^2} e^x \left(\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2} - x \right)^{r-1} dx$$

integrál-alakkal. Most felcseréljük az integrálásokat és összegezéseket (ennek jogosultsága könnyen igazolható), a közben fellépő

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r H_{2r-1}(\xi)}{(r-1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^r$$

sor pedig egy, az $e^{-x^2/2}$ függvényből leszarmaztatott Hermite-polinomokra vonatkozó összefüggés (lásd: [3], 371. oldal) alapján a

$$(7) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r H_{2r-1}(\xi)}{(r-1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^r = -\frac{\xi t}{2} \frac{e^{-\frac{\xi^2 t}{2(1-t)}}}{(1-t)^{3/2}}$$

kifejezéssel helyettesítjük. Az ezek után fellépő integrálra alkalmazzuk a középértéktételt; mindezek után a

$$(8) \quad \delta_n^{(k)} = \frac{\lambda^2}{l} e^{\frac{\vartheta_n \lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2}} \left\{ \frac{(l-m_k) e^{-\frac{(l-m_k)^2}{2[\sigma_k^2 - \lambda^2(1-\vartheta_n)]}}}{\sqrt{2\pi} [\sigma_k^2 - \lambda^2(1-\vartheta_n)]^{3/2}} + \frac{m_k e^{-\frac{m_k^2}{2[\sigma_k^2 - \lambda^2(1-\vartheta_n)]}}}{\sqrt{2\pi} [\sigma_k^2 - \lambda^2(1-\vartheta_n)]^{3/2}} \right\}$$

($0 < \vartheta_n < 1$)

végeredményt kapjuk.

Háttra van még az

$$(9) \quad |R_n^{(k)}| = \frac{2}{l} \left| \int_0^l \varphi_k(x, \lambda^2) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \right|$$

értékek becslése. Írjuk az integrált $\int_0^l = \int_0^{-\infty} - \int_{-\infty}^0 - \int_0^l$ alakba. Az első integrál értéke $\exp [-(\sigma_k^2 - \lambda^2)n^2\pi^2/2l^2]$; a másik kettőben pedig parciális integrálás után bontsuk fel az integrációs intervallumokat l/n hosszú szakaszokra. Mivel feltevés szerint $\frac{d}{dx} \varphi_k(x, \lambda^2)$ már monoton csökken a $(-\infty, 0)$, illetve (l, ∞) intervallumokon, az egyes l/n hosszúságú szakaszokon vett integrálok Leibniz-sort alkotnak, s így pl.

$$\begin{aligned} \left| \int_l^{\infty} \varphi_k(x, \lambda^2) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \right| &< \left| \int_l^{l+\frac{l}{n}} \frac{d}{dx} \varphi_k(x, \lambda^2) \right\} \sin \frac{n\pi}{l} x dx \right| < \\ &< \frac{2l}{n\pi} \frac{l-m_k}{\sigma_k^2 - \lambda^2} \frac{e^{-\frac{(l-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}}, \end{aligned}$$

és így tovább. Végül is

$$(10) \quad |R_n^{(k)}| < \frac{2}{l} e^{-\frac{(\sigma_k^2 - \lambda^2) n^2 \pi^2}{2l^2}} + \\ + \frac{4l}{n^2 \pi^2} \left| \frac{(l - m_k) e^{-\frac{(l - m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{(\sigma_k^2 - \lambda^2) \sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} + \frac{m_k e^{-\frac{m_k^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{(\sigma_k^2 - \lambda^2) \sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}} \right|.$$

Írjuk be (3)-ba (8)-at és (10)-et; az egyes tagokat felülbecsülve, az összegeket integrálokkal majorálva, végül is a következő, csupa ismert mennyiséget tartalmazó becslést kapjuk:

$$(11) \quad D \leq \left[\frac{\lambda^2}{2l} + \frac{\lambda^2}{l} \int_1^{M+1} e^{-\frac{\lambda^2 n^2 \pi^2}{2l^2}} dn + \frac{4l}{\pi^2 M} \right] \cdot \left[\frac{\max(l - m_k)}{\min \sigma_k^2} f(l) + \frac{\max m_k}{\min \sigma_k^2} f(0) \right] + \\ + \left| \frac{8}{\pi} \frac{\sum_{k=1}^N A_k}{\sqrt{\min \sigma_k^2 - \lambda^2}} \right| \left| 1 - \Phi \left(\frac{\pi M \sqrt{\min \sigma_k^2 - \lambda^2}}{l} \right) \right|,$$

ahol

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du.$$

Mivel oly nagy és oly módon elhelyezett $(0, l)$ intervallumot szoktunk venni, hogy $f(0)$ és $f(l)$ gyakorlatilag 0-ok legyenek, D korlátjából csak a második tag marad meg. Ezzel igazoltuk az [1] dolgozat (8) formuláját.

Hiba még a $\lambda^2 = 0$ helyen is lesz; ez annak a következménye, hogy a $\Psi_M(x)$ függvényt használtuk $\Psi(x)$ helyett, s csak az utóbbi azonos a $\lambda^2 = 0$ helyen az $f^*(x)$ függvénnyel. $M \rightarrow \infty$ esetén különben mindenképp 0-hoz tart a hibakorlát.

2. §. A függvénytör soros előállításán alapuló eljárás hibája

Az [1] dolgozat 2. §-ában említettük, hogy az $f^*(x)$ függvényt előállítja az

$$(12) \quad f^*(x) \equiv f^*(x, \lambda^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{n! 2^n} f^{(2n)}(x)$$

függvénytör; közelítő előállítását kapjuk, ha valamilyen $n = R$ -edik tagnál megállunk. Ilyen alakban (12) a gyakorlatban is alkalmazható, feltéve, hogy a deriváltakat ismerjük. Ezeket azonban csak numerikusan tudjuk meghatározni, s ez lerontja a közelítés jószágát. Az itt fellépő hibák a numerikus analízisből jól ismertek, s ezért itt sem foglalkozunk velük és könnyen becsülhető együttes hatásukkal, hanem inkább annak a hibának a becslésére közöljük a levezetést, amelyet az R -edik tagnál való megállás eredményez.

Ez a hiba nyilván

$$(13) \quad \delta = \sum_{n=R+1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{n! 2^n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f(x).$$

Mivel korábbi jelölésünkkel $f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \varphi_k(x)$, elegendő ha a

$$(14) \quad \delta^{(k)} = \sum_{n=R+1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n}}{n! 2^n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \varphi_k(x)$$

hibákkal foglalkozunk. Célszerűnek bizonyul a $\delta^{(k)}$ hibát tagonként becsülni; itt egyébként α -tól függő becslés kapható.

Használjuk fel a

$$(15) \quad \left| \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \varphi_k(x) \right| < 1,09 \frac{\sqrt{(2n)!}}{\sigma_k^{2n}} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{4\sigma_k^2}} \sqrt{2\pi} \sigma_k,$$

egyenlőtlenséget. Ez könnyen levezethető *Charlier* ([4] Ch. III.) formuláiból, amelyek szerint

$$(16) \quad |H_n(x)| < 1,09 \sqrt{n!} e^{\frac{x^2}{4}}.$$

Helyettesítjük ezt (14)-be; a faktoriálisok átalakítása után:

$$|\delta^{(k)}| < 0,833 \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{4\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_k} \sum_{n=R+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2}{\sigma_k^2} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Emeljük ki a maximális $1/\sqrt{n}$ tényezőt. A fennmaradó összeg egy λ^2/δ_k^2 hányadosú konvergens geometriai sor maradéktagja. Ennek értékét kiszámítva s δ -ra térve vissza, azt kapjuk, hogy

$$(17) \quad |\delta| < \frac{0,833}{\sqrt{R+1}} \left(\frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2} \right)^{R+1} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2} \right)^{-1} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{(x-m_k)^2}{4\sigma_k^2}} \sqrt{2\pi} \sigma_k.$$

Hogy az (1) alatti $f(x)$ függvényt is behozhassuk, alakítsuk át a (17)-ben szereplő összeget a Schwarz-féle egyenlőtlenségből lezármaztatott

$$\sum_{k=1}^N a_k b_k \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^N a_k \right) \left(\sum_{k=1}^N a_k b_k^2 \right)} \quad (a_k > 0; 0 < b_1 < \dots < b_N)$$

egyenlőtlenség segítségével, a b_k együtthatóknak az exponenciális függvényeket feleltetve meg. Ezzel már behoztuk $f(x)$ komponenseit; a $\sum_{k=1}^N A_k/\sigma_k <$

$< (\min \sigma_k)^{-1} \sum_{k=1}^N A_k$ reláció segítségével végül is a

$$(18) \quad |\delta| < \frac{0,833}{\sqrt[4]{2\pi(R+1) \min \sigma_k^2}} \sqrt{\sum_{k=1}^N A_k \left(\frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2} \right)^{R-1}} \frac{\sqrt{f(x)}}{1 - \frac{\lambda^2}{\min \sigma_k^2}}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ezzel [1] (10) formuláját is bebizonyítottuk, sőt a konstans jobb az ottaninál [azt tudniillik [5] Part 2, (28)-ból vezettük le, (16) azonban jobb becslést ad].

3. §. A Hermite-sorfejtésen alapuló eljárás hibája

Az [1] dolgozat 3. §-ában és a [2] dolgozat 4. §-ában vázlatosan még egy harmadik eljárást is közöltünk $f^*(x)$ közelítő előállítására. Ezt most részletesen, a hibaeccslésre is kitérve fogjuk ismertetni.

Mindenekelőtt megállapítható, hogy $0 < \sigma_k^2 < 1$ esetén $f(x)$, illetve $f^*(x)$ Csebisev—Hermite-sorfejtései, tehát

$$(19) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \varphi^{(n)}(x),$$

illetve

$$(20) \quad f^*(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^*}{n!} \varphi^{(n)}(x),$$

ahol

$$(21) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}; & \varphi^{(n)}(x) &= (-1)^n H_n(x) \varphi(x), \\ c_n &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) f(x) dx; & c_n^* &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) f^*(x) dx, \end{aligned}$$

előállítják a szóbanforgó függvényeket.

Ez *N. N. Lebegyev* egy kritériumának alkalmazásával látható be ([6], 100. oldal). A kritérium (kis átalakítással) így szól:

»Legyen $g(x)$ tetszőleges, a $(-\infty, \infty)$ intervallumon értelmezett függvény, amely szakaszonként sima minden véges $(-a, a)$ intervallumon. Ha az

$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{x^2/2} [g(x)]^2 dx$ integrál véges, a $g(x)$ -hez rendelt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \varphi^n(x) \quad \left(c_n = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) g(x) dx \right)$$

Csebisev—Hermite-sor konvergál $g(x)$ -hez, ennek minden folytonossági pontjában.

Könnyen igazolható, hogy ez a kritérium $0 < \sigma_k^2 < 1$ esetén teljesül $f(x)$ -re, illetve $f^*(x)$ -re; így tehát a sorok elő is állítják a szóbanforgó függvényeket.

A c_n és c_n^* értékek közti összefüggést és később felhasználandó explicit alakjukat a Hermite-polinomok generátorfüggvénye segítségével lehet legkönnyebben meghatározni, amelyet bármely komplex t -re

$$e^{-\frac{t^2}{2} + tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

ad meg. Szorozzuk meg mindkét oldalt $f^*(x)$ -szel, és integráljuk a $(-\infty, \infty)$ határok közt. A jobboldalt tagonként integrálhatjuk, ekkor azonban a c_n^* együtthatók fognak fellépni. A baloldal kiszámítható; végül is a következőt kapjuk:

$$(22) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + tx} f^*(x) dx = \sum_{k=1}^N A_k e^{-\frac{t^2}{2} (1 - \sigma_k^2 + \lambda^2) + t m_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n^*}{n!} t^n.$$

A $\lambda^2 = 0$ helyen $f(x)$ esetére kapjuk meg az összefüggést:

$$\sum_{k=1}^N A_k e^{-\frac{t^2}{2} (1 - \sigma_k^2) + t m_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n}{n!} t^n.$$

Mivel azonban (22)-ben $\exp(-t^2 \lambda^2 / 2)$ -t kiemelhetjük, nyerjük:

$$e^{-\frac{\lambda^2 t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n^*}{n!} t^n.$$

A baloldal első tényezőjét hatványsorával pótoljuk. Jogosult az együtthatók összehasonlítását alkalmazni; ebből következik a

$$c_n^* = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^r n! \lambda^{2r}}{r! (n-2r)! 2^r} c_{n-2r}.$$

összefüggés, amelyet az [1] dolgozat 3. §-ában, illetve [2] 4. §-ában már említettünk.

c_n^* (s így c_n is) explicite így határozható meg: (22) középső tagja nem más, mint ismét a Hermite-polinomok generátorfüggvénye, t és x helyett a $t\sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}$, illetve $m_k / \sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}$ helyeken véve (a gyök $0 < \sigma_k^2 < 1$ folytán mindig valós):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N A_k e^{-\frac{t^2}{2} (1 - \sigma_k^2 + \lambda^2) + t m_k} = \\ &= \sum_{k=1}^N A_k e^{-\frac{t^2 \sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}^2}{2} + \frac{t \sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2} m_k}{\sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}}} = \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(\frac{m_k}{\sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}}\right)}{n!} \{t \sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}\}^n. \end{aligned}$$

Ezt a hatványsort ismét egybevethetjük (22) jobboldalával ; az együttható-összehasonlítás eredménye :

$$c_n^* = (-1)^n \sum_{k=1}^N A_k (1 - \sigma_k^2 + \lambda^2)^{n/2} H_n \left(\frac{m_k}{\sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}} \right) \quad (0 < \sigma_k^2 < 1).$$

Ebből c_n kifejezését $\lambda^2 = 0$ helyettesítéssel kapjuk.⁷

A gyakorlatban megfelelő léptékválasztással $0 < \sigma_k^2 < 1$ mindig elérhető. A mondottak ekkor azt jelentik : ha a c_n együtthatókat integrálkifejezéseik alapján $f(x)$ grafikonja segítségével meghatároztuk, a belőlük képzett c_n^* együtthatók segítségével $f^*(x)$ sorának egyes szeleteit, vagyis $f^*(x)$ közelítő kifejezését is előállíthatjuk.

Ennél az előállításnál hibát von maga után az, hogy a c_n együtthatókat grafikon alapján teljesen pontosan sohasem határozhatjuk meg. Az egyes c_n értékek hibái a meghatározásuknál követett (gépi, numerikus) eljárás szerint változnak, becslésük az egyes módszerek kézikönyveiben megtalálhatók. A c_n értékek hibái folytán a sorszelet képzésekor fellépő összes hiba könnyen becsülhető, s ezért csak azzal a Δ_S hibával foglalkozunk, amely abból ered, hogy $f^*(x)$ Csebisev—Hermite-sorából csak az első S tagot vesszük számításba.

A (23) egyenlet felhasználásával nyilván

$$\begin{aligned} \Delta_S &= \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{c_n^*}{n!} \varphi^{(n)}(x) = \\ &= \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) H_n \left(\frac{m_k}{\sqrt{1 - \sigma_k^2 + \lambda^2}} \right) (1 - \sigma_k^2 + \lambda^2)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

A (17) egyenletet felhasználva

$$|\Delta_S| \leq \frac{1,18 e^{-x^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^N A_k e^{\frac{m_k^2}{4(1 - \sigma_k^2 + \lambda^2)}} \sum_{n=S+1}^{\infty} (1 - \sigma_k^2 + \lambda^2)^{n/2}.$$

A fenti geometriai sort összegezve és az eredményben az A_k értékek kivételével a többi tényezőt maximumukkal becsülve, végül is a

$$(25) \quad |\Delta_S| \leq \frac{1,18}{\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{k=1}^N A_k \right) \frac{e^{\frac{\max m_k^2}{4(1 - \max \sigma_k^2 + \lambda^2)}} (1 - \min \sigma_k^2 + \lambda^2)^{\frac{S+1}{2}}}{1 - \sqrt{1 - \min \sigma_k^2 + \lambda^2}}$$

becslést kapjuk (vesd össze : [1], (14) képlet ; a konstans jobb, mint ott. Az eltérés okát a 2. § végén már közöltük).

Ezzel befejeztük a Gauss-analízis egyes közelítő módszereinél fellépő hibák becsléseinek levezetését.

- [1] MEDGYESSY P.: „Üjabb eredmények valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének összetevőire bontásával kapcsolatban.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 151—165.
- [2] MEDGYESSY P.: „Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 165—177.
- [3] G. SZEGŐ: *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXIII, New-York, 1939.
- [4] C. V. L. CHARLIER: *Application de la théorie des probabilités à l'astronomie*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [5] E. HILLE: „A class of reciprocal functions.” *Annals of Mathematics (2-nd Series)* 27 (1926) 427—464.
- [6] Н. Н. ЛЕБЕДЕВ *Специальные функции и их приложения*. Гостехиздат, Москва, 1953.

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ «О НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ РАЗЛОЖЕНИЯ НА КОМПОНЕНТЫ СМЕСИ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

П. Меддеш

Резюме

Дополнение содержит доказательства формул ошибок некоторых приближенных методов, примененных при исполнении Гауссова анализа (см. [1]; формулы могут быть найдены в §§. 1., 2. и 3. работы [1]).

Первый метод был обоснован на соотношении

$$R_n \approx Q_n \exp [\lambda^2 n^2 \pi^2 / 2l^2] = S_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

имеющем место между коэффициентами Q_n и R_n ряда косинуса Фурье функции (1) и (2); определенного на довольно большом фундаментальном промежутке $(-l, l)$ (функция (1) должна быть разложена на компоненты; неизвестные параметры A_k, m_k, σ_k могут быть определены при помощи графика функции (2); $\lambda < \sigma_1$ произвольный параметр). На основе этого соотношения (2) может быть приближено частной суммой $\Psi(x) =$

$$= S_0/2 + \sum_{n=1}^M S_n \cos(n\pi x/l), \text{ Верхний оценок ошибки } D \text{ этой аппроксимации дается}$$

в (3). Оценивая члены (5) фигурирующие в (3), мы заменяем показательную функцию своим степенным рядом; потом, применяя (6) и (7) и выгаяя производные функции Гаусса через полиномы Эрмита, получаем (8) в качестве окончательного результата. — Оценивая (9) выражаем интеграл интегралами, взятыми между пределами $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, 0)$ и (l, ∞) . Первый интеграл вычисляется непосредственно; последние две интегралы разделяются (после частного интегрирования) на интегралы, взятые на промежутках длиной l/n . Но эти представляют ряд Лейбница; употребляя этого факта мы можем оценить их через (10). Внося (8) и (10) в (3) и мажорируя суммы через интегралы получаем (11) для D .

Второй метод состоит в представлении $f^*(x)$ в виде ряда (12); она могла быть приближена через частной суммы степени $n = R$ упомянутого ряда. Тогда, кроме ошибки, возникающей при численном определении производных, мы делим и ошибку (13), оценка которой может быть заведена на оценку (14). Последний шаг исполняется с помощью (15) и (16); наконец мы получаем (17). Тоже сама функция $f(x)$ может быть внесена в (17); таким образом получается (18).

При третьем приближенном методе мы нашли соотношение (21) для коэффициентов разложений типа Чебышева—Эрмита (19) и (20) функций $f(x)$ и $f^*(x)$. Здесь $f^*(x)$ приближается снова через некоторой частной суммы ее разложения (коэффициенты будут определены через (21) которое имеет в основе коэффициенты c_n от $f(x)$). Применяя производящую функцию полиномов Эрмита, мы можем дать новый вывод формулы (21).

С тем же методом получается и явная форма (23) коэффициентов c_n^* . Если в разложении функции $f^*(x)$ остановимся у индекса $n = S$ то мы введем ошибку (24); оценивая эту ошибку с помощью (17) и (23), окончательно получается (25).

A SUPPLEMENT TO THE PAPER «SOME RECENT RESULTS CONCERNING THE DECOMPOSITION OF COMPOUND PROBABILITY DISTRIBUTIONS»

P. MEDGYESSY

Summary

This supplement contains the proofs of the error formulae of certain approximate methods which have been applied in carrying out Gauss analysis (see [1]; the formulae can be found in §§ 1, 2, 3 of [1]).

The first method is based on the relation $R_n \approx \exp \{ \lambda^2 n^2 \pi^2 / 2l^2 \} Q_n \equiv S_n$ ($n = 0, 1, \dots$) between the coefficients Q_n and R_n of the Fourier cosine series expansion on a sufficiently large basic interval $(-l, l)$ of the functions (1) and (2), respectively. (The function (1) is to be decomposed; one can determine the unknown parameters A_k, m_k, σ_k from the graph of (2); $\lambda < \sigma_1$ is an arbitrary parameter.) By means of this relation, (2) can be approximated by the partial sum

$$\psi_M(x) = \frac{1}{2} S_0 + \sum_{n=1}^M S_n \cos \frac{n\pi}{l} x.$$

The upper bound of the error D of this approximation is given by (3). Estimating the terms (5) which figure in (3) we substitute a power series for the exponential function; thereafter applying (6) and (7) and expressing the derivatives of the Gauss function by Hermite polynomials we get (8) obtained after some simplifications as final result. — In (3) there figures also (9). Estimating this expression we proceed by expressing the integral by those taken between the limits $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, 0)$ and (l, ∞) , respectively. The first integral can be computed explicitly; the two last will be dissected, after partial integration, into integrals taken on intervals of length l/n . These integrals form a Leibniz-series; profiting by this circumstance we can estimate them by (10). Substituting (8) and (10) in (3) and majorizing the sums by integrals we obtain (11) for D .

The second method starts from the series (12) for $f^*(x)$. Approximating $f^*(x)$ by the partial sum of order $n = R$ of (12), besides the error arising from the numerical determination of the derivatives we commit the error (13) the estimation whereof may be reduced to that of (14). The latter procedure will be carried out by aid of (15) and (16), respectively; finally we obtain (17).

The third method is based on the relation (21) for the coefficients of the Chebyshev-Hermite expansions (19) and (20) of $f(x)$ and $f^*(x)$, respectively. Here we again approximate $f^*(x)$ by the partial sums of its expansion [the coefficients will be determined, starting from the coefficients c_n of $f(x)$, by (21)]. Using the generating function of the Hermite polynomials a new proof of (21) is given.

By the same method we also obtain the explicit form (23) of c_n^* . If we stop at the index $n = S$ in the expansion of $f^*(x)$, the error (24) is committed; estimating this by aid of (17) and (23) we finally obtain (25).