

HŐVEZETÉSI ÉS DIFFÚZIÓS FELADATOK ÖSSZETETT PEREMFELTÉTELEKKEL, I.

FREUD GÉZA

Bevezetés

A matematikai irodalomban részletesen tárgyalják a hővezetés differenciálegyenletének megoldását bizonyos egyszerű peremfeltételek mellett. Ezek a peremfeltételek három jellemző típusba sorolhatók: 1. A test határán előírjuk a hőmérsékletet; 2. A test határán előírjuk az időegység alatt átáramló hőmennyiséget; 3. A test érintkezik egy másik közeggel, melynek hőmérsékletét előírjuk, és a határon a lineáris hőközlési törvény érvényes. A felsorolt esetek rendre olyan peremfeltételhez vezetnek, hogy (u -val jelölve a test hőmérsékletét) a peremen

$$u, \frac{\partial u}{\partial n}, u + \alpha \frac{\partial u}{\partial n}$$

előírt értékeket vesznek fel. (Lásd például *A. Sommerfeld* [3], 63–68. oldalak.) Az itt felsorolt esetek azonban nem alkalmasak valamennyi, a gyakorlatban is megvalósuló hővezetési feladat megoldására. Gyakran találkozunk olyan hővezetési feladattal, ahol az érintkező test hőmérséklete nem ismert, hanem egy további közönséges differenciálegyenlet segítségével határozható meg. A dolgozat végén bebizonyítjuk, hogy az így kapott kezdeti és peremfeltételek mellett a feladat megoldása egyértelmű és korrekt kitűzésű. A jelen dolgozat célja, hogy egy ilyen esetekben használható számítási módszert ismertessen. Módszerünk egy szemléletes fizikai megfontoláson alapszik. Tekintsünk egy vékony rudat, melyben hosszirányban vizsgáljuk a hővezetést, és egyik végén »valahogyan« egy másik testtel áll kapcsolatban. Ha az időt t -vel, a rúd hosszirányú koordinátáját pedig x -szel jelöljük, úgy — mint ismeretes — a V hőmérséklet a

$$(1) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

parciális differenciálegyenletnek tesz eleget. A rúd vége legyen az $x = 0$ koordinátájú pont. A peremfeltétel ebben a pontban a tárgyalt esetekben mindig egy közönséges differenciálegyenlet-rendszer, amely ismeretlenként tartalmazza a csatlakozó test hőmérsékletét, mint az idő függvényét, továbbá $V(0, t)$ -t és $V_x(0, t)$ -t. Mármint, akármilyen alakú is ez a közönséges diffe-

renciálegyenlet-rendszer, a rúdvégnek a rúdra gyakorolt hatása csak egyféle lehet: minden időpillanatban egy bizonyos (pozitív vagy negatív) hőmennyiség megy át a csatlakozó testből a rúd. Ez a folyamat, feltételezve, hogy a $t = 0$ időpillanatban az egész rúd hőmérséklete állandó, és ezt az állandó értéket választjuk a hőmérsékleti skála zéruspontjának, az alábbi analitikus kifejezéssel írható le:

$$(2) \quad V(x, t) = \int_0^t F(x, t - \tau) W(\tau) d\tau,$$

ahol

$$(3) \quad F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}}$$

és $W(\tau) d\tau$ arányos a $(\tau, \tau + d\tau)$ időintervallumban a rúd. átáramló hőmennyiséggel. A (2) és (3) útján felírt $V(x, t)$ függvény kielégíti a hővezetés differenciálegyenletét homogén kezdeti feltételekkel. (2)-ből $V(0, t)$ és $V_x(0, t)$ is (amelyek a peremfeltételként kapott közönséges differenciálegyenlet-rendszerben szerepelnek) az egyváltozós, egyelőre ismeretlen $W(t)$ függvény-nel fejezhetők ki. A peremfeltétel ennek következtében egy integro-differenciálegyenlet-rendszert szolgáltat az ismeretlen $W(t)$ függvényre, továbbá az érintkező test ismeretlen hőmérsékletére. Ezzel feladatunk (mint látni fogjuk) egyszerűbb lett, mert egy ismeretlen kétváltozós függvény — tudniillik $V(x, t)$ — helyett most már csak egy ismeretlen egyváltozós függvény — tudniillik $W(t)$ — lép fel. A kapott integro-differenciálegyenlet-rendszer konvolúció-típusú: integráljel alatt kizárólag a $W(t)$ függvény és egy ismert függvény konvolúciója lép fel. Egyenletrendszerünknek ez a speciális alakja lehetővé teszi, hogy azt számos fontos esetben Laplace-transzformáció segítségével megoldjuk. Ilyen módon számos fontos esetben explicit a akban, táblázatosított függvények segítségével elő tudjuk állítani $W(t)$ -t és a rúddal érintkező test hőmérsékletét is. A gyakorlatilag fontos esetekben rendszerint éppen az utóbbira van szükségünk, és ezeket fogjuk kiszámítani; magának $V(x, t)$ -nek a meghatározására egy további (rendszerint már csak numerikusan elvégezhető) integrálásra lesz szükség. Több esetben a végképletben a Gauss-féle hibaintegrál lép fel, amelyre (komplex argumentum esetén is) hozzáférhető táblázatok állnak rendelkezésre. (Lásd például: *K. A. Karpov* [1].)

A továbbiakban több olyan feladatot ismertetünk, melynél a megoldás-függvény a vázolt módon képletszerűen előállítható. A feladatok egy része külső megbízások során merült fel; másik része logikusan csatlakozik az előbbiekhöz, és azokkal együtt bizonyos egységet képez.

A közölt mintára természetesen ennél általánosabb feladatok is megoldhatók.

Összefoglaljuk azon feltételeinket, amelyek valamennyi megoldott feladatnál közegek: A hővezető közeg homogén, izotróp, fahője nem függ a hőmérséklettől; két test határán lineáris hőátadási törvény érvényes.

Miután célunk elsősorban ezen számítási módszer ismertetése (és a dolgozat így is hosszabbra nyúlt, mint szerzője szerette volna), egyes olyan kérdéseket, hogy például a c) feladatban fellépő $g(p)$ függvénynek van-e

inverz Laplace-transzformáltja, és azt a Riemann—Mellin-féle megfordítási képlet előállítja-e, nem részletezünk. Az olvasó a tankönyvirodalom alapján ezen kiegészítéseket nehézség nélkül elvégezheti.

1. §. Hővezetési feladatok egyik irányban végtelen rúdra

a) Első példaként tekintsük az alábbi feladatot : Egy, egyik irányban végtelen hosszú vékony homogén rúd egyik végéhez egy kis kiterjedésű, de számottevő hőkapacitású test csatlakozik. A $t = 0$ kezdőpillanatban a rúd hőmérséklete a helytől független állandó ; a test hőmérséklete a $t = 0$ időpontban nem egyezik meg a rúd hőmérsékletével. Meghatározandó a rúd és a test hőmérséklete a helykoordináta és a t idő, illetve csak a t idő függvényében, ha a rendszer a környezettel nincsen termikus kapcsolatban.

Jelöljük $U(t)$ -vel a test hőmérsékletét, $V(x, t)$ -vel a rúd x koordinátájú pontjának hőmérsékletét. A rúd vége legyen az $x = 0$ pont, maga a rúd az $x > 0$ félegyenes. A hőmérsékleti skála zéruspontját vegyük egyenlőnek a rúd kezdeti hőmérsékletével.

A lineáris hőátadási törvény következtében a peremfeltétel a rúd végén :

$$(4) \quad V_x(0, t) = -C[U(t) - V(0, t)].$$

A test által az időegység alatt a rúdnak átadott hőmennyiség arányos $[-U'(t)]$ -vel, arányos továbbá az $U(t) - V(0, t)$ hőmérsékletkülönbséggel ; tehát

$$(5) \quad U'(t) = -B[U(t) - V(0, t)].$$

A kezdeti feltételek :

$$(6) \quad V(x, 0) = 0$$

és

$$(7) \quad U(0) = U_0.$$

Tekintettel (6)-ra, a megoldásfüggvényt a (2) alakban kereshetjük. Jelöljük (most és a továbbiakban is) $U(t)$ és $V(x, t)$ t -szerinti Laplace-transzformáltjait $u(p)$ -vel és $v(x, p)$ -vel ; $V(x, t)$ -t állítsuk elő a (2) alakban, és $W(t)$ Laplace-transzformáltja legyen $w(p)$. A (3) képlettel definiált $F(x, t)$ függvény Laplace-transzformáltja :

$$f(x, p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\alpha x \sqrt{p}},$$

tehát, tekintettel (2)-re, a konvolúciótétel értelmében

$$(8) \quad v(x, p) = f(x, p) w(p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\alpha x \sqrt{p}} w(p),$$

és $V_x(x, t)$ Laplace-transzformáltja :

$$v_x(x, p) = -\alpha \sqrt{\pi} e^{-\alpha x \sqrt{p}} w(p).$$

A (4) és (5) egyenletek Laplace-transzformáltjai lineáris egyenletrendszert szolgáltatnak $u(p)$ -re és $w(p)$ -re:

$$Cu(p) - \left(a\sqrt{\pi} + C \sqrt{\frac{\pi}{p}} \right) w(p) = 0$$

$$(p + B)\sqrt{p}u(p) - B\sqrt{\pi}w(p) = U_0\sqrt{p}.$$

Innen

$$u(p) = U_0 \frac{a\sqrt{p} + C}{\sqrt{p}(ap + C\sqrt{p} + Ba)}$$

A fenti függvények visszatranszformálásához az alábbi tételt használhatjuk fel:
Ha $F(t)$ Laplace-transzformáltja egyenlő $f(p)$ -vel, akkor a

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} F(s) ds$$

függvény Laplace-transzformáltja:

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} f(\sqrt{p})$$

(lásd például *K. W. Wagner* [4], a 60–61. oldalakon).

Ennek felhasználásával elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$(9) \quad U(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} U_0 \frac{1}{p_1 - p_2} \left\{ \left(p_1 + \frac{C}{a} \right) e^{p_1^2 t} \text{Erf}(-p_1 \sqrt{t}) - \right. \\ \left. - \left(p_2 + \frac{C}{a} \right) e^{p_2^2 t} \text{Erf}(-p_2 \sqrt{t}) \right\},$$

ahol p_1 és p_2 az $ap^2 + Cp + Ba = 0$ egyenlet gyökei, melyekről feltesszük, hogy egymástól különbözőek. A (9) képletben szereplő Erf-függvény a Gauss-féle hibaintegrál:

$$\text{Erf}(x) = \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Továbbá

$$(10) \quad W(t) = \frac{2U_0 C}{a\pi(p_1 - p_2)} \left\{ p_1 e^{p_1^2 t} \text{Erf}(-p_1 \sqrt{t}) - p_2 e^{p_2^2 t} \text{Erf}(-p_2 \sqrt{t}) \right\}.$$

Ez utóbbi képletből a rúd $V(x, t)$ hőmérséklete a hely és idő függvényében a (2) és (3) felhasználásával számítható.

b) Második példaként tárgyaljuk az alábbi: Tekintsük az előbbi elrendezést, de a rúd végével érintkező test hőmérséklete a $t = 0$ időpillanatban egyenlő a rúd kezdeti hőmérsékletével, viszont ez a test nem hőszigetelt, hanem másodpercenként Q kalóriát vesz át a környezetétől. Feladatunk ugyanúgy tárgyalható, mint az előbbi, azzal a különbséggel, hogy (5) helyett az

$$(5^*) \quad AU'(t) + B[U(t) - V(0, t)] = Q(t)$$

peremfeltétellel¹⁾ érvényes, és (7) helyébe a

$$(7^*) \quad U(0) = 0$$

kezdeti feltétel lép. Azt kapjuk, hogy

$$u(p) = \frac{g(p)}{\sqrt{p}} \frac{C + a\sqrt{p}}{Aap + AC\sqrt{p} + Ba},$$

ahol $g(p)$ a $Q(t)$ Laplace-transzformáltja. Amennyiben $g(p)$ racionális törtfüggvény, tehát ha például

$$Q(t) = \sum a_k e^{-\gamma_k t},$$

akkor a Laplace-transzformáció megfordításával $U(t)$ explicite megadható; speciálisan, ha Q időtől független állandó, akkor a visszatranszformálás eredménye:

$$(11) \quad U(t) = \frac{Q}{Aa} \left\{ \alpha_1 + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + \frac{2\alpha_3}{\sqrt{\pi}} e^{p_1^2 t} \operatorname{Erf}(-p_1 \sqrt{t}) + \frac{2\alpha_4}{\sqrt{\pi}} e^{p_2^2 t} \operatorname{Erf}(-p_2 \sqrt{t}) \right\},$$

ahol p_1 és p_2 az

$$Aap^2 + ACp + Ba = 0$$

egyenlet gyökei, melyekről feltesszük, hogy nem esnek egybe, és

$$\alpha_1 = \frac{Aa}{B} - \frac{C^2}{a} \frac{A^2}{B^2}, \quad \alpha_2 = \frac{AC}{B},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{a}{p_1} + \frac{C}{p_1^2} \right), \quad \alpha_4 = \frac{1}{p_2 - p_1} \left(\frac{a}{p_2} + \frac{C}{p_2^2} \right).$$

A rúd hőmérsékletét a hely és idő függvényében ismét (2) és (3)-ból számíthatjuk, ahol most

$$(12) \quad W(t) = QC \frac{A}{aB} + \frac{QC}{a(p_1 - p_2)} \left\{ -\frac{2}{p_1 \sqrt{\pi}} e^{p_1^2 t} \operatorname{Erf}(-p_1 \sqrt{\pi}) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{p_2 \sqrt{\pi}} e^{p_2^2 t} \operatorname{Erf}(-p_2 \sqrt{t}) \right\}.$$

c) $Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t}$ esetén, ha a kezdeti és peremfeltételek megegyeznek a b) alattival, akkor a következő eredményeket kapjuk:

$$U(t) = \frac{Q_0}{Aa} \left\{ \frac{\alpha_1}{\sqrt{\gamma}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\gamma} \sqrt{t}} e^{x^2} dx + \alpha_2 \right\} e^{-\gamma t} +$$

$$+ \frac{2Q_0}{\sqrt{\pi} Aa} \left\{ \alpha_3 e^{p_1^2 t} \operatorname{Erf}(-p_1 \sqrt{t}) + \alpha_4 e^{p_2^2 t} \operatorname{Erf}(-p_2 \sqrt{t}) \right\},$$

¹⁾ Természetesen B értéke is más most, mint az (5) képletben.

$$W(t) = \frac{CQ_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\beta_1}{\sqrt{\gamma}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\gamma}\sqrt{t}} e^{x^2} dx + \beta_2 \right\} e^{-\gamma t} + \\ + \frac{2CQ_0}{\pi} [\beta_3 e^{p_1^2 t} \operatorname{Erf}(-p_1 \sqrt{t}) + \beta_4 e^{p_2^2 t} \operatorname{Erf}(-p_2 \sqrt{t})],$$

ahol

$$\alpha_1 = \frac{BC}{N}, \quad \alpha_2 = \frac{-\frac{C^2}{a} - a\left(\gamma - \frac{B}{A}\right)}{N}, \\ \alpha_3 = \frac{(\gamma + p_2)^2 (C + ap_1)}{(p_1 - p_2)N}, \quad \alpha_4 = \frac{(\gamma + p_1)^2 (C + ap_2)}{(p_2 - p_1)N}, \\ \beta_1 = \frac{\gamma \frac{C}{A}}{N}, \quad \beta_2 = \frac{\frac{B}{A} - \gamma}{N}, \\ \beta_3 = \frac{p_1(\gamma + p_2^2)}{(p_1 - p_2)N}, \quad \beta_4 = \frac{p_2(\gamma + p_1^2)}{(p_2 - p_1)N}.$$

Itt

$$N = \left(\gamma - \frac{B}{A}\right)^2 + \gamma \frac{C^2}{a^2},$$

és p_1 , illetve p_2 az

$$Aap^2 + ACp + Ba = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.

2. §. Hővezetési feladatok véges rúdra

Az előző fejezetben ismertetett eljárás bizonyos módosítással véges rúdra vonatkozó problémák megoldására is alkalmazható. A rúd hossza legyen l , két végének koordinátái legyenek $x = 0$ és $x = l$. A rúd $x = l$ végén az alábbi peremfeltételek egyike teljesüljön:

A) A rúd vége hőszigetelt: $U_x(l, t) = 0$.

B) A rúd végét állandó hőmérsékleten tartjuk, amely egyenlő a rúd kezdeti hőmérsékletével: $U(l, t) = 0$.

A rúd $x = 0$ peremén ismét egy másik testhez csatlakozik. Eljárásunk módosítása abban áll, hogy (2) és (3) helyett a rúd hőmérsékletét

$$(13) \quad V(x, t) = \int_0^t F^*(x, t - \tau) W(\tau) d\tau$$

alakban keressük, ahol

$$(14) \quad F^*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}} \pm e^{-\frac{a^2 (2l-x)^2}{4t}} \right].$$

A fenti képletben az A) peremfeltétel teljesülése esetén a $+$ előjelet, a B) peremfeltétel esetén viszont a $-$ előjelet kell vennünk. A $V(x, t)$ -re így kapott kifejezés a $W(t)$ függvény tetszőleges választása mellett kielégíti a hővezetés differenciálegyenletét a $(0, l)$ intervallumban, eleget tesz a $V(x, 0) = 0$ kezdeti feltételnek, és ezen felül kielégíti a rúd $x = l$ végén előírt peremfeltételt is. A rúd $x = 0$ végén előírt peremfeltétel (ugyanúgy, mint az előző fejezetben) egy konvolúció-típusú integrálegyenletet szolgáltat az egyelőre ismeretlen $W(t)$ függvény meghatározására, amely integrálegyenlet ismét Laplace-transzformációval megoldható.

C) Az l hosszúságú rúd $x = 0$ végéhez (ugyanúgy, mint az a) feladatnál) kis kiterjedésű, de számottevő hőkapacitású test csatlakozik, melynek hőmérséklete a $t = 0$ időpontban: $U(0) = U_0$, a rúd hőmérséklete a $t = 0$ pillanatban: $V(x, 0) = 0$, és a rúd $x = l$ vége hőszigetelt.

Az $x = 0$ rúdvégre, ugyanúgy, mint az a) példában, a (4) és (5) peremfeltételeket kapjuk. Az

$$F^*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}} + e^{-\frac{a^2 (2l-x)^2}{4t}} \right]$$

függvény t -szerinti Laplace-transzformáltja $0 < x < l$ esetén:

$$f^*(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} (e^{-ax\sqrt{p}} + e^{-a(2l-x)\sqrt{p}}),$$

tehát a konvolúció-tétel felhasználásával

$$v(x, p) = \sqrt{\frac{\pi}{p}} (e^{-ax\sqrt{p}} + e^{-a(2l-x)\sqrt{p}}) w(p)$$

és

$$v'_x(x, p) = a\sqrt{\pi} (-e^{-ax\sqrt{p}} + e^{-a(2l-x)\sqrt{p}}) w(p).$$

A (4) és (5) peremfeltételek Laplace-transzformálásából az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$(p + B) u(p) - B \sqrt{\frac{\pi}{p}} (1 + e^{-2al\sqrt{p}}) w(p) = U_0$$

$$C \sqrt{\frac{p}{\pi}} u(p) - [C(1 + e^{-2al\sqrt{p}}) + a\sqrt{p} (1 - e^{-2al\sqrt{p}})] w(p) = 0.$$

Egyenletrendszerünket megoldva:

$$(15) \quad u(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} g(\sqrt{p}),$$

ahol

$$(16) \quad g(p) = \frac{aU_0 p(-1 + e^{-2alp}) - CU_0(1 + e^{-2alp})}{ap^2(-1 + e^{-2alp}) - Cp(1 + e^{-2alp}) + Ba(-1 + e^{-2alp})}.$$

Mindenekelőtt a $g(p)$ inverz Laplace-transzformáltját, $G(t)$ -t akarjuk kiszámítani. A Riemann–Mellin-féle megfordítási képlet szerint

$$G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} g(p) dp,$$

ahol a c valós számot úgy kell választanunk, hogy a $g(p)$ függvény a $\operatorname{Re} p > c$ félsíkban reguláris legyen. Ezen integrált a reziduúmtétel segítségével határozzuk meg. A $p = i\varphi$ új változót bevezetve, (16) jobboldalán a nevező eltűnik, ha

$$(17) \quad \operatorname{tg} a\varphi = \frac{C\varphi}{a(\varphi^2 - B)}.$$

Be lehet bizonyítani, hogy a (17) egyenlet valamennyi gyöke valós és $g(p)$ számlálója és nevezője nem tűnik el ugyanazon a helyen. $G(t)$ -nek a reziduúmtétel segítségével való meghatározását ennél az egy példánál részletezzük. Legyen n egész szám, legyen

$$P = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a},$$

és tekintsük az

$$(18) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{(T)} e^{-t} g(p) dp$$

integrált, ahol $t > 0$, és az integrálást arra a pozitív irányítású T téglalapra végezzük, amelynek csúcsai $\eta - iP$, $\eta + iP$, $(i-1)P$, $-(i+1)P$. Bebizonyítjuk, hogy az integrálnak a két vízszintes szakaszra és az $[(i-1)P, -(i+1)P]$ függőleges szakaszra eső része $P \rightarrow \infty$ esetén zérushoz tart. A (16) képletben $p = \pm iP + y$ -t véve (y valós) kapjuk, hogy

$$g(\pm iP + ay) = \frac{aU_0 p + CU_0 \operatorname{th} y}{ap^2 + Ba + Cp \operatorname{th} y}$$

Miután $|\operatorname{th} y| \leq 1$, ebből következik, hogy a két vízszintes egyenes mentén y -ban egyenletesen

$$g(iP + ay) = O\left(\frac{1}{P}\right),$$

tehát, tekintettel arra, hogy $t > 0$, kapjuk:

$$(19) \quad \left| \int_{(i-1)P}^{iP+\eta} e^{pt} g(p) dp \right| < \int_{iP-\eta}^{iP+\eta} e^{\eta t} O\left(\frac{1}{P}\right) |dp| + O\left(\frac{1}{P}\right) \int_{-P}^{\eta} e^{yt} dy =$$

$$= O\left(\frac{1}{P}\right) \left[2\eta e^{\eta t} + \frac{1}{t} e^{-\eta t} \right] \rightarrow 0,$$

és ugyanígy becsülhetjük az integrált a $[-(i+1)P, -iP + \eta]$ szakaszon. A függőleges szakaszon való becsléshez felhasználjuk, hogy K -t elég nagyra választva, $g(p)$ a $\operatorname{Re} p < -K$ félsíkon korlátos. Legyen most $P > K$; akkor

$$(20) \quad \left| \int_{-(i+1)P}^{(i-1)P} e^{pt} g(p) dp \right| \leq 2P O(1) e^{-Pt} \rightarrow 0.$$

(18)-ban az integrandusnak szingularitása van a $p = 0$ helyen, továbbá a $\pm i\varphi_k$ ($k = 1, 2, \dots, r$) helyeken, ahol $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ a (17) egyenlet P -nél kisebb pozitív gyökei. Az ábrából leolvasható, hogy az összes gyök egyszeres multiplicitású. Az integrandus reziduuma a $p = 0$ helyen

$$r_0 = \frac{CU_0}{C + Ba^2 l},$$

és a $p = \pm i\varphi_k$ helyen [figyelembe véve a (17) egyenletet]

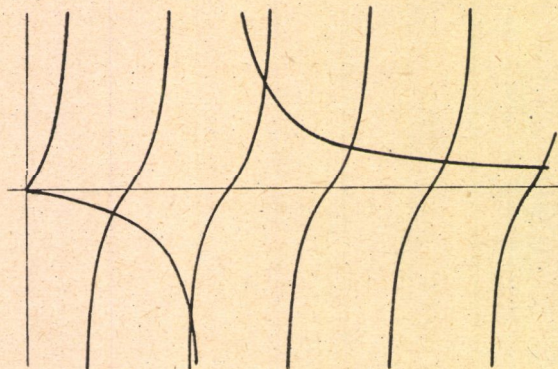
$$r_{\pm i\varphi_k} = \frac{BCU_0 e^{\pm i\varphi_k t}}{a^2 l \varphi_k^4 + (C + C^2 l - 2Ba^2 l) \varphi_k^2 + BC + \frac{B^2}{A^2} a^2 l}.$$

A reziduúmtételből tehát azt kapjuk, hogy

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - iP}^{\eta + iP} e^{pt} g(p) dp - \frac{CU_0}{C + Ba^2 l} - 2BCU_0 \sum_{k=1}^r \frac{\cos \varphi_k t}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \right\} = 0,$$

ahol

$$(21) \quad \alpha_1 = a^2 l, \quad \alpha_2 = C + C^2 l - 2Ba^2 l, \quad \alpha_3 = BC + \frac{B^2}{A^2} a^2 l.$$



1. ábra

Végeredményképpen tehát

$$(22) \quad G(t) = \frac{CU_0}{C + Ba^2 l} + 2BCU_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \varphi_k t}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3}.$$

Az előbbi ábrából leolvasható, hogy elég nagy k -ra

$$(23) \quad \left(k - \frac{3}{2}\right)\pi < a l \varphi_k < \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi,$$

tehát a (22) jobboldalán álló sor konvergens. A (15) és (22) képletek alapján a Laplace-transzformáció elméletéből ismert képlet szerint

$$(24) \quad U(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} G(s) ds = \frac{CU_0}{C + Ba^2 l} + 2BCU_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\varphi_k^2 t}}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$w(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} h(\sqrt{p}),$$

ahol

$$h(p) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} CU_0 p e^{2alp}}{ap^2(e^{2alp} - 1) + Cp(e^{2alp} + 1) + Ba(e^{2alp} - 1)};$$

ebből reziduúmtétellel elvégezve a Laplace-transzformáció megfordítását

$$(25) \quad H(t) = \frac{CU_0}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \left[\frac{C}{a} \varphi_k^2 \cos \varphi_k t + (\varphi_k^2 - B \varphi_k) \sin \varphi_k t \right],$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jelentése (21)-ből olvasható le. A (19) és (20) becslést $g(p)$ helyett a $h(p)$ függvénnyel elvégezve, kapjuk, hogy a (25) jobboldalán álló sor $t > 0$ esetén konvergens.

Bebizonyítjuk, hogy a (25) jobboldalán álló sor részletösszegei minden véges intervallumon összességükben korlátosak. A cosinusos tagok összegére ez a képletből leolvasható, mert az együtthatók abszolút konvergens sort alkotnak. A sinusos tagok részletösszegeit pontosabban kell becsülnünk. Először is, (17) és (23)-ból

$$\varphi_k = (k-1) \frac{\pi}{al} + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

tehát

$$\frac{\varphi_k^2 - B \varphi_k}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} = \frac{al}{\alpha_1 \pi (k-1)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

és így

$$\sin \varphi_k t = \sin (k-1) \frac{\pi t}{al} + O\left(\frac{t}{k}\right),$$

tehát

$$\frac{\varphi_k^3 - B\varphi_k}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \sin \varphi_k t = \frac{al}{\alpha_1 \pi} \frac{\sin(k-1) \frac{\pi t}{al}}{k-1} + O\left(\frac{t}{k^2}\right).$$

Miután a $\Sigma \frac{1}{k^2}$ sor abszolút konvergencia és a $\sum \frac{\sin(k-1)x}{k-1}$ sor részletösszegei korlátosak, következik most már, hogy

$$\sum_k \frac{\varphi_k^3 - B\varphi_k}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \sin \varphi_k t = O(1 + |t|).$$

Ebből látható, hogy a

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} H(s) ds$$

összefüggésben az integrálás tagonként végezhető el. Az egyes tagokban az alábbi alakú integrálok is szerepelnek:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} \sin \varphi_k s ds = 2\sqrt{t} \int_0^\infty e^{-\xi^2} \sin(2\varphi_k \sqrt{t} \xi) d\xi.$$

Az $\alpha = 2\varphi_k \sqrt{t}$ jelölést bevezetve

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\xi^2} \sin \alpha \xi d\xi &= \frac{1}{2i} \left[\int_0^\infty e^{-\xi^2 + i\alpha \xi} d\xi - \int_0^\infty e^{-\xi^2 - i\alpha \xi} d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{2i} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \left[\int_{-\frac{i\alpha}{2}}^\infty e^{-y^2} dy - \int_{+\frac{i\alpha}{2}}^\infty e^{-y^2} dy \right] = \frac{1}{2i} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \int_{-\frac{i\alpha}{2}}^{\frac{i\alpha}{2}} e^{-y^2} dy = \\ &= e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{-y^2} dy. \end{aligned}$$

Bevezetve az

$$(26) \quad E(x) = \int_0^x e^{-y^2} dy$$

előlést, végül kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} \sin \varphi_k s ds = 2\sqrt{t} e^{-\frac{\varphi_k^2 t}{4}} E(\varphi_k \sqrt{t}).$$

Ezt felhasználva, kapjuk, hogy

$$(27) \quad W(t) = \frac{CU_0}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\varphi_k^2 t}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \left[\frac{C}{a} \varphi_k^2 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\varphi_k^3 - B\varphi_k) E(\varphi_k \sqrt{t}) \right].$$

d) Az előbbivel teljesen analóg módon tárgyalható az a feladat, amely c)-től csak annyiban különbözik, hogy a rúd $x = l$ vége nem hőszigetelt, hanem hőmérsékletét állandóan a kezdeti értéken tartjuk. Ekkor $F^*(x, t)$ kifejezésben a (14) képletben az alsó előjelet kell vennünk. A számítás eredménye ekkor

$$U(t) = 2BCU_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\bar{\varphi}_k^2 t}}{\alpha_1 \bar{\varphi}_k^4 + \alpha_2 \bar{\varphi}_k^2 + \alpha_3},$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ismét a (21) képletekkel adott állandók, ezzel szemben a φ_k ($k = 1, 2, \dots$) értékek nem a (17), hanem a

$$(17^*) \quad \operatorname{tg} \bar{\varphi} = -\frac{a}{C} \frac{\bar{\varphi} - B}{\bar{\varphi}}$$

egyenlet gyökei. $W(t)$ -re ugyanazt a kifejezést kapjuk, mint (27), de φ_k helyébe $\bar{\varphi}_k$ -t kell írunk.

e) Tekintsük azt az esetet, amikor a rúddal érintkező testtel másodpercenként $Q(t)$ hőmennyiséget közlünk, és a rúd másik vége hőszigetelt. Ebben az esetben a hővezetés differenciálegyenletét az alábbi peremfeltételek mellett kell megoldanunk:

$$V(x, 0) = 0, \quad AU'(t) + B[U(t) - V(0, t)] = Q(t), \\ V'_x(0, t) = -C[U(t) - V(0, t)], \quad V'_x(l, t) = 0.$$

Feltételezhetjük, hogy $U(0) = 0$, az általánosabb $U(0) = U_0 \neq 0$ eset egyszerűen úgy tárgyalható, hogy az itt kapott megoldásra a c) feladat eredményét szuperponáljuk. A rúd hőmérsékletét a (13) alakba írjuk, ahol (14)-ben a + előjelet kell vennünk. Ezzel teljesítettük a $V(x, 0) = 0$ kezdeti feltételt és a $V'_x(l, t) = 0$ peremfeltételt. A rúd másik végén fennálló peremfeltételeket Laplace-transzformáljuk, és az így kapott lineáris egyenletrendszert $u(p)$ -re és $w(p)$ -re megoldjuk. Az eredmény:

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} g(\sqrt{p}), \quad w(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} h(\sqrt{p}),$$

ahol

$$g(p) = \frac{C(1 + e^{-2alp}) + ap(1 - e^{-2alp})}{Aap(1 - e^{-2alp}) + ACp(1 + e^{-2alp}) + Ba(1 - e^{-2alp})q(p^2)}$$

és

$$h(p) = \frac{\frac{C}{\sqrt{\pi}} p q(p^2)}{Aa(1 - e^{-2alp}) + AC(1 + e^{-2alp}) + Ba(1 - e^{-2alp})}.$$

Itt $q(p)$ jelenti a $Q(t)$ Laplace-transzformáltját.

A $g(p)$ és $h(p)$ inverz Laplace-transzformáltja a reziduumtételel számítható, ha $Q(t) = e^{-\gamma t}$, $q(p) = \frac{1}{p + \gamma}$, és ebből $U(t)$ és $W(t)$ a már ismertett módon nyerhető. Ennek segítségével az általános eset is megoldottnak tekinthető, hiszen tetszőleges folytonos $Q(t)$ függvényt bármely előírt pontossággal közelíthetünk

$$\sum_k a_k e^{-\gamma_k t}$$

alakú összegekkel és a feladat (mint a dolgozat utolsó fejezetében látni fogjuk) korrektté kitzűzésű.

Ha $\gamma = 0$, akkor a számítás eredménye:

$$U(t) = k_1 + 2k_2 t + \sum_{\varphi_k > 0} p_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W(t) = k_3 + \frac{2k_4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} + \sum_{\varphi_k > 0} \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$V(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{a^2 x^2}{4(t-\tau)}} + e^{-\frac{a^2 (2l-x)^2}{4(t-\tau)}} \right] W(\tau) d\tau,$$

ahol a φ_k értékek a következő egyenlet gyökei:

$$\operatorname{tg} a l \varphi = \frac{AC\varphi}{aA\varphi^2 - Ba},$$

továbbá

$$k_1 = \frac{Ba^4 l^2 (Cl + 3)}{3(AC + Ba^2 l)^2}, \quad k_2 = \frac{C}{2(AC + Ba^2 l)}, \quad k_3 = \frac{\frac{C}{\sqrt{\pi}} al}{2(AC + Ba^2 l)},$$

$$k_4 = \frac{\frac{C}{\sqrt{\pi}}}{2(AC + Ba^2 l)}$$

$$p_k = \frac{2a_1}{a_2 \varphi_k^6 + a_3 \varphi_k^4 + a_4 \varphi_k^2}, \quad r_k = \frac{b_1 \varphi_k}{b_3 \varphi_k^5 + b_4 \varphi_k^3 + b_5 \varphi_k},$$

$$s_k = \frac{b_2 \left(\varphi_k^2 - \frac{B}{A} \right)}{b_3 \varphi_k^5 + b_4 \varphi_k^3 + b_5 \varphi_k}.$$

$$a_1 = \frac{BC}{A}, \quad a_2 = -a^2 Al, \quad a_3 = -AC + 2Ba^2 l - AC l^2, \quad a_4 = -BC - \frac{B^2 a^2 l}{A},$$

$$b_1 = C, \quad b_2 = a, \quad b_3 = a_2, \quad b_4 = a_3, \quad b_5 = a_4.$$

Ha viszont $\gamma > 0$, akkor

$$U(t) = K + \sum_{\varphi_k > 0} q_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\varphi_k > 0} r_k E(\varphi_k \sqrt{t}) e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$V(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{a^2 x^2}{4(t-\tau)}} + e^{-\frac{a^2(2l-x)^2}{4(t-\tau)}} \right] \sum_{\varphi_k > 0} r_k E(\varphi_k \sqrt{\tau}) e^{-\varphi_k^2 \tau} d\tau,$$

ahol a φ_k értékek a következő egyenlet gyökei:

$$\operatorname{tg} a l \varphi = \frac{C A (\varphi^3 - \gamma \varphi)}{a [A \varphi^4 - (B + \gamma A) \varphi^2 + B \gamma]}.$$

A többi jelölés:

$$q_k = 2 \frac{C - a \varphi_k \operatorname{tg} a l \varphi_k}{a_1 \varphi_k^4 + a_2 \varphi_k^2 + a_3 + \operatorname{tg} a l \varphi_k (a_4 \varphi_k^3 + a_5 \varphi_k)},$$

$$r_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{-\varphi_k}{\cos a l \varphi_k (a_1 \varphi_k^4 + a_2 \varphi_k^2 + a_3) + \sin a l \varphi_k (a_4 \varphi_k^3 + a_5 \varphi_k)},$$

$$K = \frac{C}{(AC + Ba^2 l) \gamma},$$

$$a_1 = a^2 A l, \quad a_2 = -3AC - a^2 l (B + \gamma A),$$

$$a_3 = (AC + Ba^2 l) \gamma, \quad a_4 = A a (4 + Cl),$$

$$a_5 = -a A \gamma \left(\frac{2B}{A \gamma} + 2 + Cl \right).$$

f) A rúddal érintkező testtel ismét másodpercenként $Q(t)$ hőmennyiséget közlünk, és a rúd $x = l$ végét (amely az előző példában hőszigetelt volt) állandóan a kezdeti hőmérsékleten tartjuk. A peremfeltételek tehát:

$$V(x, 0) = 0, \quad A U'(t) + B[U(t) - V(0, t)] = Q(t),$$

$$V'_x(0, t) = -C[U(t) - V(0, t)], \quad V(l, t) = 0.$$

Ismét feltételezhetjük, hogy $U(0) = 0$, és az általánosabb $U(0) = U_0 \neq 0$ esetet úgy kaphatjuk, hogy az így nyert eredményre a d) feladat eredményét szuperponáljuk. A megoldás csak annyiban tér el az előzőtől, hogy (14)-ben a — előjelet kell vennünk. Az eredmények $\gamma = 0$ esetén:

$$U(t) = k_1 + \sum_{\varphi_k > 0} p_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W(t) = k_2 + \sum_{\varphi_k > 0} \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$V(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{a^2 x^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{a^2 (2-x)^2}{4(t-\tau)}} \right] \times \\ \times \left\{ k_2 + \sum_{\varphi_k > 0} \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{\tau}) \right] e^{-\varphi_k^2 \tau} \right\} d\tau,$$

ahol a φ_k értékek a következő egyenlet gyökeit jelentik:

$$\operatorname{tg} a\varphi = \frac{a}{C} \frac{\frac{B}{A} - \varphi^2}{\varphi}.$$

Továbbá

$$k_1 = \frac{Cl + 1}{B}, \quad k_2 = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2Ba},$$

p_k , r_k és s_k ugyanazokat a mennyiségeket jelentik, mint az e -ben $\gamma = 0$ esetén:

$$p_k = \frac{2a_1}{a_2\varphi_k^6 + a_3\varphi_k^4 + a_4\varphi_k^2},$$

$$r_k = \frac{b_1\varphi_k}{b_3\varphi_k^5 + b_4\varphi_k^3 + b_5\varphi_k},$$

$$s_k = \frac{b_2\left(\varphi_k^2 - \frac{B}{A}\right)}{b_3\varphi_k^5 + b_4\varphi_k^3 + b_5\varphi_k},$$

$$a_1 = \frac{BC}{A}, \quad a_2 = -a^2Al, \quad a_3 = -AC + 2a^2Bl - AC^2l, \quad a_4 = -BC - \frac{a^2B^2l}{A},$$

$$b_1 = C, \quad b_2 = a, \quad b_3 = a_2, \quad b_4 = a_3, \quad b_5 = a_4.$$

$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$ esetén a következő eredményeket kapjuk:

$$U(t) = \sum_{\varphi_k > 0} p_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W(t) = \sum_{\varphi_k > 0} \left[q_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} r_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

ahol

$$p_k = 2Q_0 \frac{C \sin a\varphi_k + a\varphi_k \cos a\varphi_k}{\sin a\varphi_k (a_1\varphi_k^4 - a_2\varphi_k^2 + a_3) + \cos a\varphi_k (-a_4\varphi_k^3 + a_5\varphi_k)},$$

$$q_k = \frac{\frac{Q_0 C}{\sqrt{\pi}} \varphi_k \cos al\varphi_k}{\sin al\varphi_k(a_1\varphi_k^4 - a_2\varphi_k^2 + a_3) + \cos al\varphi_k(-a_4\varphi_k^3 + a_5\varphi_k)},$$

$$r_k = \frac{\frac{Q_0 C}{\sqrt{\pi}} \varphi_k \sin al\varphi_k}{\sin al\varphi_k(a_1\varphi_k^4 - a_2\varphi_k^2 + a_3) + \cos al\varphi_k(-a_4\varphi_k^3 + a_5\varphi_k)}.$$

Itt

$$a_1 = a^2 Al, \quad a_2 = 3AC + a^2 l(B + \gamma A), \quad a_3 = \gamma(ABC + a^2 lB),$$

$$a_4 = aA(4 + Cl), \quad a_5 = 2a(B + \gamma A) + CAal\gamma.$$

φ_k karakterisztikus egyenlete :

$$\operatorname{tg} al\varphi = \frac{a}{C} \cdot \frac{\varphi^4 - \left(\frac{B}{A} + \gamma\right)\varphi^2 + \frac{B}{A}\gamma}{(-\varphi^2 + \gamma)\varphi}.$$

g) Mint véges rúdra vonatkozó, az eddigieknél általánosabb feladatot tárgyaljuk az alábbi: A rúd $x = 0$ végéhez csatlakozó test kezdeti hőmérséklete, U_0 , eltér a rúd kezdeti hőmérsékletétől, és azonkívül ezzel a testtel másodpercenként $\dot{Q}(t)$ hőmennyiséget közlünk. A rúd $x = l$ vége hőátadással csatlakozik egy másik testhez, amelynek $Z(t)$ hőmérséklete az idő függvényében adott. Meghatározandó a rúd és a test hőmérséklete a hely és idő, illetve csak az idő függvényében, ha a rúd kezdeti hőmérséklete állandó (melyet a hőmérsékleti skála megfelelő választásával zérusnak vehetünk). A feladat matematikai fogalmazása : megoldandó a

$$(28) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

parciális differenciálegyenlet a

$$(29) \quad V(x, 0) = 0, \quad U(0) = U_0$$

kezdeti feltétellel és az

$$(30) \quad AU'(t) + B[U(t) - V(0, t)] = \dot{Q}(t),$$

$$(31) \quad V'_x(0, t) = -C[U(t) - V(0, t)],$$

$$(32) \quad V'_x(l, t) = -D[V(l, t) - Z(t)]$$

peremfeltételekkel.

A feladat bonyolultabb, mint az előző négy, mert most nem tudunk olyan (13)-hoz hasonló egyszerű alakot találni $V(x, t)$ -re, hogy az egyidőben evidenciába helyezze a parciális differenciálegyenlet, a kezdeti feltétel és az $x = l$ rúdvégen fennálló peremfeltétel teljesülését. Ezért visszatérünk a bevezetésben ismertetett fizikai megfontolásra. A másik rúdvég hatása is csak abban nyilvánulhat meg, hogy azon át minden pillanatban bizonyos

(egyelőre ismeretlen) hőmennyiség áramlik a rúd. Ezt figyelembe véve, a rúd hőmérsékletét

$$(33) \quad V(x, t) = \int_0^t F(x, t - \tau_1) W_1(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t F(l - x, t - \tau_2) W_2(\tau_2) d\tau_2$$

alakban keressük, ahol $F(x, t)$ a (3) képlettel definiált függvény. $W_1(t)$, illetve $W_2(t)$ a rúd $x = 0$, illetve $x = l$ végén az időegység alatt a rúd belépő hőmennyiséggel arányosak. Feltételünk következtében a (28) parciális differenciálegyenlet és a (29) kezdeti feltétel a W_1 és W_2 függvények tetszőleges választása mellett is teljesül. A (30), (31) és (32) peremfeltételek konvolúció-típusú integrodifferenciálegyenletrendszerrel szolgáltatnak az ismeretlen $U(t)$, $W_1(t)$, $W_2(t)$ függvényekre, melyet Laplace-transzformálva, és ezen függvények Laplace-transzformáltjait rendre $u(p)$ -vel, $w_1(p)$ -vel, $w_2(p)$ -vel jelölve, ezen utóbbi függvények meghatározására lineáris egyenletrendszerrel kapunk:

$$\begin{aligned} (Ap + B) u(p) - \sqrt{\frac{\pi}{p}} B[w_1(p) + e^{-a\sqrt{Vp}} w_2(p)] &= q(p) + AU_0, \\ \frac{C}{\sqrt{\pi}} u(p) - \left(a + C \sqrt{\frac{1}{p}}\right) [w_1(p) - e^{-a'\sqrt{Vp}} w_2(p)] &= 0, \\ -e^{-a\sqrt{Vp}} \left(a - D \sqrt{\frac{1}{p}}\right) w_1(p) + \left(a + D \sqrt{\frac{1}{p}}\right) w_2(p) &= D \frac{1}{\sqrt{\pi}} z(p). \end{aligned}$$

Innen $u(p)$ -t, $w_1(p)$ -t és $w_2(p)$ -t kifejezhetjük, és — az előzőek mintájára — az

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} g(\sqrt{p}), \quad w_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} h_1(\sqrt{p}), \quad w_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} h_2(\sqrt{p})$$

jelöléseket bevezetve, $U(t)$, $W_1(t)$ és $W_2(t)$ meghatározása a már ismertetett módon, a reziduúmtétel felhasználásával történhet.

Azon célból, hogy az inverz Laplace-transzformációt explicite elvégezhessük, a $Q(t)$ és $Z(t)$ függvényeket exponenciális tagok összegével közelítjük, a következő alakban:

$$Q(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-\gamma_k t}, \quad Z(t) = \sum_{k=1}^m b_k e^{-\delta_k t}.$$

A feladat megoldását csak öt speciális esetben kell elvégeznünk, mert a fenti alakú $Q(t)$, illetve $Z(t)$ függvények esetén a feladat megoldása ezen öt speciális eset lineáris szuperpozíciójaként állítható elő. Ez az öt speciális eset a következő:

$$\begin{aligned} g_1) \quad U(0) &= 1, & Q(t) &\equiv 0, & Z(t) &\equiv 0; \\ g_2) \quad U(0) &= 0, & Q(t) &\equiv 1, & Z(t) &\equiv 0; \\ g_3) \quad U(0) &= 0, & Q(t) &\equiv 0, & Z(t) &\equiv 1; \\ g_4) \quad U(0) &= 0, & Q(t) &\equiv e^{-\gamma t}, & Z(t) &\equiv 0; \\ g_5) \quad U(0) &= 0, & Q(t) &\equiv 0, & Z(t) &\equiv e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Az alábbiakban közöljük ezen speciális esetek megoldásait. Az öt esetben használt közös jelölések a következők: a φ_k értékek a közös

$$\operatorname{tg} a\varphi = \frac{aA(D+C)\varphi^2 - aBD}{Aa^2\varphi^3 - (ACD + a^2B)\varphi}$$

karakterisztikus egyenlet gyökeit jelentik, és bevezetjük a

$$C_k = \cos a\varphi_k, \quad S_k = \sin a\varphi_k$$

rövid jelöléseket. Az első három esetben az $U(t)$, $W_1(t)$ és $W_2(t)$ függvényeket előállító sorban az összegezés az összes pozitív φ_k karakterisztikus gyökökre van kiterjesztve, a g_4 esetben ezeken kívül még a $\varphi = +\sqrt{\gamma}$ értékre, a g_5 esetben pedig még a $\varphi = +\sqrt{\delta}$ értékekre is.

A megoldások a következők:

g_1) Az $U(0) = 1$, $Q(t) \equiv 0$, $Z(t) \equiv 0$ eset:

$$U(t) = \sum \left[b_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} c_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_1(t) = \sum \left[p_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} q_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_2(t) = \sum \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$b_k = \frac{(DC - a^2\varphi_k^2) S_k + a\varphi_k(D+C)(1+C_k)}{N_k},$$

$$c_k = \frac{(DC - a^2\varphi_k^2)(C_k - 1) - a\varphi_k(D+C)S_k}{N_k},$$

$$p_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{D\varphi_k C_k - a\varphi_k^2 S_k}{N_k}, \quad q_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{-a\varphi_k^2 C_k - D\varphi_k S_k}{N_k},$$

$$r_k = \frac{D\varphi_k}{N_k}, \quad s_k = \frac{a\varphi_k^2}{N_k}, \quad N_k = (a_1\varphi_k^3 + a_2\varphi_k)C_k + (a_3\varphi_k^2 + a_4)S_k,$$

$$a_1 = -a^3 A l, \quad a_2 = 2aA(C+D) + al(a^2B + ACD),$$

$$a_3 = -a^2A(lD + lC + 3), \quad a_4 = a^2B(1 + Dl) + ACD.$$

g_2) Az $U(0) = 0$, $Q(t) \equiv 1$, $Z(t) \equiv 0$ eset:

$$U(t) = K + \sum b_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_1(t) = K_1 + \sum \left[p_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} q_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_2(t) = K_2 + \sum \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$K = \frac{D + C + DCl}{BD}, \quad K_1 = \frac{C}{2aB\sqrt{\pi}}, \quad K_2 = -\frac{C}{2aB\sqrt{\pi}},$$

$$b_k = 2 \frac{a(D + C) \varphi_k C_k + (DC - a^2 \varphi_k^2) S_k}{N_k},$$

$$p_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{DC_k - a\varphi_k S_k}{M_k}, \quad q_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{-a\varphi_k C_k - DS_k}{M_k},$$

$$r_k = -\frac{CD}{M_k}, \quad s_k = -\frac{aC}{M_k},$$

$$N_k = (a_1 \varphi_k^5 + a_2 \varphi_k^3 + a_3 \varphi_k) C_k + (a_4 \varphi_k^4 + a_5 \varphi_k^2) S_k,$$

$$M_k = (d_1 \varphi_k^4 + d_2 \varphi_k^2 + d_3) C_k + (d_4 \varphi_k^3 + d_5 \varphi_k) S_k,$$

$$a_1 = a^3 Al, \quad a_2 = -al(a^2 B + ACD) - 4aA(C + D), \quad a_3 = 2aBD,$$

$$a_4 = a^2[5A + Al(C + D)], \quad a_5 = -(3a^2 B + 3ACD + a^2 Bdl),$$

$$d_1 = a^3 Al, \quad d_2 = -(a_2 Bl + ACDl) - 3A(C + D), \quad d_3 = aBD,$$

$$d_4 = a^2[4A + Al(C + D)], \quad d_5 = -(2a^2 B + 2ACD + a^2 Bdl).$$

$$g_3) \quad Az \quad U(0) = 0, \quad Q(t) \equiv 0, \quad Z(t) \equiv 1 \text{ eset:}$$

$$U(t) = 1 + \sum b_k e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_1(t) = \sum \left[p_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} q_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_2(t) = \sum \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$b_k = \frac{2aBD\varphi_k}{N_k}, \quad p_k = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \frac{AC\varphi_k^2}{M_k}, \quad q_k = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \frac{aA\varphi_k^3 - aB\varphi_k}{M_k},$$

$$r_k = D \frac{-AC\varphi_k^2 C_k + (aA\varphi_k^3 - aB\varphi_k) S_k}{M_k},$$

$$s_k = D \frac{(-aA\varphi_k^3 + aB\varphi_k) C_k + AC\varphi_k^2 S_k}{M_k},$$

$$N_k = (a_1 \varphi_k^5 + a_2 \varphi_k^3 + a_3 \varphi_k) C_k + (a_4 \varphi_k^4 + a_5 \varphi_k^2) S_k,$$

$$M_k = (d_1 \varphi_k^4 + d_2 \varphi_k^2 + d_3) C_k + (d_4 \varphi_k^3 + d_5 \varphi_k) S_k,$$

$$a_1 = a^3 Al, \quad a_2 = -(a^3 Bl + aACDl) - 4aA(C + D), \quad a_3 = 2aBD,$$

$$a_4 = a^2[5A + Al(C + D)], \quad a_5 = -(3a^2 B + 3ACD + a^2 Bdl),$$

$$d_1 = a^3 Al, \quad d_2 = -(a^2 Bl + ACDl) - 3A(C + D), \quad d_3 = aBD,$$

$$d_4 = a^2[4A + Al(C + D)], \quad d_5 = -(2a^2 B + 2ACD + a^2 Bdl).$$

$g_4)$ Az $U(0) = 0$, $Q(t) \equiv e^{-\gamma t}$, $Z(t) \equiv 0$ eset:

$$U(t) = \sum \left[b_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} c_k E(\varphi \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_1(t) = \sum \left[r_k + \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_2(t) = \sum \left[r_k - \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$b_k = \frac{a_2 \varphi_k + a_5 \varphi_k C_k + (a_4 \varphi_k^2 - a_6) S_k}{N_k},$$

$$c_k = \frac{-a_1 \varphi_k^2 + a_3 + (a_6 - a_4 \varphi_k^2) C_k + S_k - a_5 \varphi_k}{N_k},$$

$$r_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{a \varphi_k}{N_k}, \quad s_k = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{D}{N_k},$$

$$N_k = (d_1 \varphi_k^5 + d_2 \varphi_k^3 + d_3 \varphi_k) C_k + (d_4 \varphi_k^4 + d_5 \varphi_k^2 + d_6) S_k,$$

$$a_1 = a, \quad a_2 = a(D + C), \quad a_3 = DC, \quad a_4 = -a_1^2, \quad a_5 = a(C + D),$$

$$a_6 = -DC,$$

$$d_1 = a^3 Al, \quad d_2 = -4aA(C + D) - al(Ba^2 + ACD + \gamma a^2 A),$$

$$d_3 = 2[BaD + \gamma aA(D + C)] + \gamma al(Ba^2 + ACD),$$

$$d_4 = a^2 A[5 + l(D + C)],$$

$$d_5 = -3(Ba^2 + AGD + \gamma a^2 A) - a^2 l[BD + \gamma A(D + C)],$$

$$d_6 = \gamma(Ba^2 + ACD) + \gamma a^2 lBD.$$

$g_5)$ Az $U(0) = 0$, $Q(t) \equiv 0$, $Z(t) \equiv e^{-\delta t}$ eset:

$$U(t) = \sum b_k e^{-\varphi_k^2 t}$$

$$W_1(t) = \sum \left[p_k \frac{2}{\sqrt{\pi}} q_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$W_2(t) = \sum \left[r_k \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_k E(\varphi_k \sqrt{t}) \right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$b_k = \frac{2D}{C} \frac{(Aa\varphi_k^4 - Ba\varphi_k^2) C_k + A\varphi_k^3 S_k}{N_k},$$

$$p_k = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \frac{AC\varphi_k^4}{N_k},$$

$$q_k = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \frac{(Aa\varphi_k^2 - Ba) \varphi_k^3}{N_k},$$

$$r_k = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \frac{\varphi_k^2 C_k - \varphi_k^2 (Aa\varphi_k^2 - Ba) S_k}{N_k}, \quad s_k = \frac{-AC\varphi_k^4 S_k - \varphi_k^3 (Aa\varphi_k^2 - Ba) C_k}{N_k},$$

$$\begin{aligned}
N_k &= (-a_1 \varphi_k^6 + a_2 \varphi_k^4 - a_3 \varphi_k^2 + a_4) C_k - (a_5 \varphi_k^5 - a_6 \varphi_k^3 + a_7 \varphi_k) S_k, \\
a_1 &= a^3 A l, \quad a_2 = 5a A (C + D) + a l (A a^2 \delta + A C D + B a^2), \\
a_3 &= 3(A C a \delta + A D a \delta + B D a) + a l \delta (A C D + B a^2), \quad a_4 = B D a \delta, \\
a_5 &= 6a^2 A + a^2 A l (C + D), \\
a_6 &= 4(a^2 A \delta + A C D + B a^2) + a l (A C a \delta + A D a \delta + B D a).
\end{aligned}$$

3. §. Egy hengerszimmetrikus feladat

h) Egy külső megbízás során merült fel az alábbi feladat: Egy körkeresztmetszetű, végtelen hosszúnak tekinthető vezetőben áram folyik, melyet a $t = 0$ időpillanatban kapcsolunk be. Az elektromos tranzienst jelenség időállandója olyan kicsiny a hővezetési folyamat időállandójához képest, hogy úgy tekinthetjük, mintha az áram a $t = 0$ időpillanatban elérte volna stacionárius értékét. A vezetőt végtelenig terjedő homogén hővezető közeg veszi körül, amely hőátadással csatlakozik a vezetőhöz. Meghatározandó a vezető, illetve a közeg hőmérséklete az idő, illetve a hely és idő függvényében, ha a $t = 0$ időpillanatban a vezető és a környező közeg ugyanazon állandó hőmérsékleten van (amelyet a továbbiakban a hőmérsékleti skála nullapontjának veszünk fel). A vezető hővezetési tényezője sokkal nagyobb, mint a közeg hővezetési együtthatója úgy, hogy a vezető a keresztmetszetén belül a hőmérsékletet minden időpillanatban a helytől függetlennek tekinthetjük. A vezető hőmérséklete legyen $U(t)$; a közeg azon pontjának hőmérséklete, amely a vezető tengelyétől r távolságra helyezkedik el, legyen $V(r, t)$.

A keresett $V(r, t)$ függvény kielégíti a hővezetés differenciálegyenletét, tehát figyelembe véve a feladat hengerszimmetriáját, a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t}$$

parciális differenciálegyenletet kell megoldanunk, a

$$V(r, 0) = U(0) = 0$$

kezdeti feltételekkel és az

$$A U'(t) + B[U(t) - V(r_0, t)] = Q$$

$$V_r(r_0, t) = -C[U(t) - V(r_0, t)]$$

peremfeltételekkel. Itt r_0 jelenti a vezető sugarát és Q jelenti a vezető hosszegységében az időegység alatt hővé alakult elektromos teljesítményt. A megoldásfüggvényt a

$$V(r, t) = \int_0^t \Phi(r, t - \tau) d\tau$$

konvolúció alakjában keressük, ahol

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{2t} e^{-\frac{a^2 r^2}{4t}}.$$

Feltevésünk következtében a $V(r, t)$ függvény a $W(t)$ tetszőleges választása esetén is kielégíti a hővezetés differenciálegyenletét és az előírt homogén kezdeti feltételt. A peremfeltételek az ismeretlen $U(t)$ és $W(t)$ függvényekre ismét egy konvolúció-típusú integrálegyenletrendszert szolgáltatnak. Lényeges körülmény, hogy a szereplő két magfüggvény Laplace-transzformáltja ismert:

$$\varphi(a, p) = K_0(ar_0\sqrt{p})$$

és

$$\varphi_r(a, p) = a\sqrt{p} K_1(ar_0\sqrt{p}).$$

A peremfeltételeket Laplace-transzformálva, $u(p)$ -re és $w(p)$ -re lineáris egyenletrendszert nyerünk, amelyből

$$u(p) = \frac{Q}{p} \frac{CK_0(ar_0\sqrt{p}) + a\sqrt{p} K_1(ar_0\sqrt{p})}{(Ap + B)[CK_0(ar_0\sqrt{p}) + a\sqrt{p} K_1(ar_0\sqrt{p})] - BCK_0(ar_0\sqrt{p})}$$

és

$$w(p) = \frac{Q}{p} \frac{C}{(Ap + B)[CK_0(ar_0\sqrt{p}) + a\sqrt{p} K_1(ar_0\sqrt{p})] - BCK_0(ar_0\sqrt{p})}.$$

Itt K_0 és K_1 a módosított nulladrendű, illetve elsőrendű Bessel-függvények. A konkrét feladatnál úgy jártunk el, hogy ebből $U(t)$ -t és $W(t)$ -t a Riemann–Mellin-féle képlettel kifejeztük, és az integrálást a $\mathcal{R}_e p = 0$ egyenes mentén numerikusan elvégeztük; ezen egyenes mentén $\sqrt{i}x$ argumentumú Bessel-függvények lépnek fel az integrandusban, és ezek értéke nálunk is hozzáférhető táblázatokból nyerhető.

Természetesen az előbbiekhöz hasonló módon tárgyalható az az eset is, amikor az időegység alatt hővé átalakuló teljesítmény

$$Q(t) = \sum a_k e^{-\gamma_k t}$$

alakú, illetve, amikor a vezető kezdeti hőmérséklete különbözik a közeg állandó kezdeti hőmérsékletétől.

4. §. A tárgyalt hővezetési feladatokkal analóg diffúziós feladatok

Mint ismeretes, a diffúzió differenciálegyenlete ugyanaz, mint a hővezetés differenciálegyenlete. Ezért várható, hogy az előzőekben megoldott feladatokat diffúziós problémákként is értelmezhetjük. Ez valóban így is van, és ez azon múlik, hogy a tárgyalt összetett peremfeltételnek a diffúzió elméletében is jól megfogható fizikai értelme van. Az alábbiakban felsoroljuk, milyen diffúziós interpretációt adhatunk az egyes megoldott problémáknak (a betűzés az 1., 2., 3. fejezetben megoldott analóg hővezetési feladatra utal).

a) Egy tartályban c koncentrációjú oldatot helyezünk el; a tartály egy membránon át közlekedik egy végtelen hosszú csővel, amelyben a $t = 0$ időpillanatban tiszta oldószer található. A tartályban található oldatot állandóan keverjük úgy, hogy az oldat a tartályban minden időpontban koncentrációra nézve homogén. Meghatározandó a tartályban és a cső mentén a koncentráció az idő, illetve a hely és az idő függvényében.

b) Az elrendezés ugyanaz, mint az előbb; a $t = 0$ időpillanatban a tartályban is tiszta oldószer van, de a tartályba inntól kezdve adott adagolás szerint folyamatosan oldódó anyagot töltünk.

c) Ez abban különbözik az a) feladattól, hogy a cső véges l hosszúságú, és a cső másik végén le van zárva.

d) Ez abban különbözik az a) feladattól, hogy a cső véges l hosszúságú, és a másik vége egy igen nagy térfogatú tartályba torkollik, melybe tiszta oldószert öntünk.

e) Ez abban különbözik a b) feladattól, hogy a cső véges l hosszúságú, és a cső másik végén le van zárva.

f) Ez abban különbözik a b) feladattól, hogy a cső véges l hosszúságú, és másik vége egy igen nagy térfogatú tartályba torkollik, melybe tiszta oldószert öntünk.

g) Az l hosszúságú cső mindkét végét membránnal zárjuk; az egyik csatlakozó tartályban a kezdőpillanatban adott koncentrációjú oldat van, és állandó keverés mellett adott módon folyamatosan oldódó anyagot töltünk hozzá; a cső másik végéhez csatlakozó tartályban az oldat koncentrációját előírt módon változtatjuk az idő függvényében. Meghatározandó a koncentráció az első tartályban és a csőben az idő, illetve a hely és idő függvényében, feltéve, ha a csőben a kezdőpillanatban tiszta oldószer foglal helyet.

h) Egy igen nagy kiterjedésű vízszintes fenekű tartályba oldószert töltünk. A tartály közepén egy kis átmérőjű, hengeralakú homogén membrán helyezünk el, tengelyével függőlegesen úgy, hogy a benne levő oldat csak membrándiffúzió útján közlekedhet a tartályban levő többi oldószerezrel, illetve oldattal. A $t = 0$ időpillanattól kezdve a membránnal elzárt térfogatban időben egyenletesen oldódó anyagot töltünk, és azt elkeverjük. Kiszámítandó az oldat koncentrációja a membránon belül, illetve a membránon kívül, az idő, illetve a hely és az idő függvényében.

Pál Sándor [2] egyik munkájában a c) feladatot tárgyalja a jelen dolgozatnál speciálisabb peremfeltételek mellett. Megoldási módszere abban áll, hogy a keresett függvény Sturm–Liouville-sorának együtthatóit számítja. Eredménye alakra is azonos azzal, amit itt ismertettünk.

5. §. Tyihonov tételének kiterjesztése

Ha a $V(x, t)$ függvény a $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq l$ tartományban folytonos és eleget tesz a hővezetés differenciálegyenletének, akkor Tyihonov tétele szerint ezen a zárt téglalapon $V(x, t)$ maximumát és minimumát a tartomány »háromoldalú határának« legalább egy-egy pontjában felveszi. A tartomány háromoldalú határán az alábbi három egyenesszakasz egyesítését értjük:

$$1^\circ \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$2^\circ \quad x = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$3^\circ \quad x = l, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Szükségünk lesz ennek azon egyszerű módosítására, hogy ha az $x = l$ peremen $V_x(l, t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, akkor $V(x, t)$ maximumát és minimumát már az $x = 0$ peremen, vagy a $t = 0$ kezdőpillanatban felveszi. Ez egyszerűen abból következik, hogy a $V(x, t)$ függvényt az $x = l$ peremen túl szimmetrikusan

folytatva: $V(l + \xi, t) = V(l - \xi, t)$, az most már a $0 \leq x \leq 2l$, $0 \leq t \leq T$ zárt tartományban is eleget tesz a hővezetés differenciálegyenletének, és a tartomány jobboldali peremén ugyanakkora értékeket vesz fel, mint a tartomány baloldali peremén.

Tétel: A c), d), e) és f) feladatokban legyen $U_0 > 0$, illetve $Q(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$ és $Q(0) > 0$. Akkor minden $x \in [0, l]$ -re és $0 \leq t \leq T$ -re $V(x, t) \geq 0$.

Bizonyítás: Figyelembe véve a kezdeti- és peremfeltételeket, Tyihonov tételéből, illetve az imént bizonyított általánosításából következik, hogyha egy $t^* < T$ -re $V(x, t^*) < 0$, akkor egy $0 \leq t_1 \leq t^*$ értékre $V(0, t_1) < 0$.

Tekintsük először azt az esetet, amikor $Q(t) > 0$, $0 \leq t \leq T$. Tekintettel arra, hogy $U(0) > 0$ és $V(0, 0) = 0$, tehát elég kis t -re $V_x(0, t) < 0$, ebből következik, hogy elég kis t -re $V(0, t) > 0$. (A hővezetés differenciálegyenletének adott $V_x(0, t)$ esetén érvényes megoldási képletét kell felhasználnunk.) A $V(0, t)$ függvény legalább egyszer jelet vált a $[0, T]$ intervallumban; a legkisebb jelváltási helye legyen t_2 ; tehát $V(0, t_2) = 0$, $V(0, t) \geq 0$, ha $0 \leq t \leq t_2$. Akkor Tyihonov tétele (illetve a fentebb bizonyított élesítése) szerint $V(x, t) \geq 0$, ha $0 \leq t \leq t_2$ és $0 \leq x \leq l$, tehát $V_x(0, t_2) \geq 0$. Így $0 \leq V_x(0, t_2) = -C[U(t_2) - V(0, t_2)] = -CU(t_2)$ miatt $U(t_2) \leq 0$; ennek felhasználásával

$$0 \leq Q(t_2) = AU'(t_2) + B[U(t_2) - V(0, t_2)] \leq AU'(t_2),$$

tehát $U'(t) \geq 0$. Abból, hogy $U(t) \leq 0$ és $U'(t_2) \geq 0$, következik, hogy az $U(t)$ függvénynek van egy $t_3 < t_2$ jelváltási helye. Ugyanis a feltétel szerint vagy $U_0 > 0$, vagy $Q(0) > 0$ következtében $U(0) = 0$ esetén $U'(0) > 0$. Tehát $U(t_3) = 0$, $U'(t_3) \leq 0$. Akkor viszont

$$0 < Q(t_3) = AU'(t_3) + B[U(t_3) - V(0, t_3)] \leq -BV(0, t_3).$$

Tekintettel arra, hogy $t_3 < t_2$, ez ellentmondásban van azzal, hogy t_2 -t a $V(0, t)$ függvény legkisebb jelváltási helyének választottuk. Ilyen módon bebizonyítottuk, hogy $V(0, t)$ nem válthat jelet, tehát nem-negatív, és ebből Tyihonov tétele szerint következik, hogy $V(x, t)$ is nem-negatív. Az az eset, amikor $Q(t) > 0$ helyett az ennél gyengébb $Q(t) \geq 0$ feltétel teljesül, visszavezethető az előbbire azáltal, hogy $U(t)$ és $V(x, t)$ helyett az $\bar{U}(t) = U(t) + \varepsilon U_0(t)$ és $\bar{V}(x, t) = V(x, t) + \varepsilon V_0(x, t)$ függvényt tekintjük, ahol a $V(l, t) = 0$ peremfeltétel esetén például

$$U_0(t) \equiv \frac{1}{C} + l > 0, \quad V_0(x, t) \equiv l - x \geq 0, \quad Q_0(t) \equiv \frac{B}{C} > 0,$$

és a $V_x(l, t) = 0$ peremfeltétel esetén például

$$U_0(t) \equiv e^{\frac{t}{a^2}} \left(\operatorname{ch} l + \frac{1}{C} \operatorname{sh} l \right) > 0, \quad V_0(x, t) \equiv e^{\frac{t}{a^2}} \operatorname{ch}(l - x) > 0,$$

és

$$Q_0(t) \equiv e^{\frac{t}{a^2}} \left[\frac{A}{a^2} \operatorname{ch} l + \left(\frac{A}{Ca^2} + \frac{B}{C} \right) \operatorname{sh} l \right] > 0.$$

A fenti tétel fontos következménye, hogy az e) és f) hővezetési feladatok a $Q(t)$ függvényre nézve korrekt kitűzésűek. Ugyanis, ha $|Q_1(t) - Q_2(t)| < \varepsilon$,

úgy a $Q_2(t)$ függvényhez tartozó $U_2(t)$, $V_2(x, t)$ megoldásrendszere fennállnak az

$$U_1(t) - U(t) \leq U_2(t) \leq U_1(t) + U(t)$$

$$V_1(x, t) - V(x, t) \leq V_2(x, t) \leq V_1(x, t) + V(x, t)$$

egyenlőtlenségek, ahol $[U_1(t), V_1(x, t)]$ a $Q_1(t)$ -hez tartozó megoldásrendszer, $[U(t), V(x, t)]$ pedig a $Q(t) \equiv 1$ -hez tartozó megoldásrendszer, amelyet az előző példák során explicit alakban kiszámítottunk.

A nagy türelmet igénylő részletszámításokat *Adler György* és *Csukás Andrásné* munkatársaim, továbbá *Révai Katalin* műegyetemi tanársegéd²⁾ végezték. *Czipszer János* kartársam az egész kéziratot gondosan átnézte, és számos értékes megjegyzést tett. A dolgozat második fejezetében tárgyalt feladatokra *Pál Sándor* kartársam irányította rá a figyelmemet. Értékes segítségükért mindannyiuknak ezúton is köszönetet mondok.

IRODALOM

- [1] К. А. КАРПОБ: *Таблицы функции $w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$ в комплексной области.* Изд. Академии Наук СССР, Москва, 1954.
 [2] PÁL S.: „Cukoripari diffúziós problémákról.” *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1950. (p. 693—726).
 [3] A. SOMMERFELD: *Partielle Differentialgleichungen der Physik.* (Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI.) 3. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1954.
 [4] K. W. WAGNER: *Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation.* Verlag Barth, Leipzig, 1950.

ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

И ДИФФУЗИИ СО СЛОЖНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, I.

Г. Фрейд

Резюме

Мы будем исследовать линейное уравнение теплопроводности (1) с однородным начальным условием (6), если на конце стержня выполняются краевые условия (4) и (5). Через $U(t)$ обозначим другую искомую функцию, которая должна удовлетворить начальному условию $U(0) = U_0$.

Физически это означает, что один конец стержня связан термически с точечным телом конечной теплоемкости. $U(t)$ —это температура точечного тела, а $V(x, t)$ —стержня. Мы рассматриваем следующие случаи (распадающие в свою очередь на дальнейшие подслучай):

- A) в одном направлении бесконечный стержень;
- B) другой конец стержня теплово изолирован, т. е. $V_x(l, t) = 0$;
- C) на другом конце стержня поддерживается постоянная температура;
- D) другой конец стержня термически связан с тепловым резервуаром известной температуры $Z(t)$. Поэтому при $x = l$ должно иметь место краевое условие (32).

Метод решения состоит в том, что мы ищем неизвестную функцию $V(x, t)$ в виде такого свертывания двух функций, которое заведомо удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и однородным начальным условиям, а в случаях A), B) и C) также и краевым условиям на другом конце стержня. Таким образом мы приходим к интегральным уравнениям типа свертывания, разрешаемым с помощью преобразования Лапласа. Этот метод применяется также при решении одной задачи теплопроводности с цилиндрической симметрией.

В последней части мы даем распространение теоремы *Тихонова* о теплопроводности на рассмотренные задачи. С помощью этой теоремы доказывается, что решения однозначны и краевые условия поставлены корректно.

²⁾ Közlekedési Műszaki Egyetem, Szolnok, Matematikai Tanszék.

ÜBER WÄRMELEITUNGS- UND DIFFUSIONSPROBLEME MIT ZUSAMMENGESETZTEN RANDBEDINGUNGEN, I.

G. FREUD

Zusammenfassung

Es werden Lösungen der linearen Wärmeleitungsgleichung (1) mit der homogenen Anfangsbedingung (6) untersucht, wo am Ende des wärmeleitenden Stabes die Randbedingungen (4) und (5*) erfüllt sind. $U(t)$ ist eine weitere unbekannte Funktion, deren Anfangswert, $U(0) = U_0$, angegeben werden muss. Physikalisch bedeuten diese Randbedingungen, dass der wärmeleitende Stab an einem Ende mit einem punktförmigen Körper von endlicher Wärmekapazität in Wärmeaustausch steht. $U(t)$ bedeutet die Temperatur des punktförmigen Körpers und $V(x, t)$ die Temperatur des Stabes.

Folgende Fälle werden (auf weitere Unterfälle geteilt) behandelt:

- A) einseitig unendlich langer Stab;
- B) das andere Ende des Stabes ist thermisch isoliert, d. h. $V_x(l, t) = 0$;
- C) das andere Ende des Stabes wird dauernd auf der Anfangstemperatur des Stabes gehalten, d. h. $V(l, t) = 0$;
- D) das andere Ende des Stabes steht in Wärmekontakt mit einem Wärmebehälter vorgeschriebener Temperatur, also besteht dort die Randbedingung (32).

[$Z(t)$ = Temperatur des Wärmebehälters].

Die Lösungsmethode besteht darin, dass $V(x, t)$ in Faltungsform angesetzt wird, welche das Erfülltsein der partieller Differentialgleichung und der homogenen Anfangsbedingung, und im Falle A), B), und C) sogar das Erfüllsein der Randbedingung am anderen Stabende, in Evidenz setzt. Somit entstehen Integralgleichungen vom Faltungstypus, welche mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst werden. Dieselbe Methode wird zur Lösung eines Wärmeleitungsproblems mit zylindrischer Symmetrie angewandt.

Im letzten Teil wird eine Ausdehnung des Satzes von *Tihonow* bezüglich der Wärmeleitung auf die behandelten Probleme angegeben. Hieraus wird gefolgert, dass die Lösung eindeutig ist, und die Randbedingungen sachgemäss gestellt sind.