

HŐVEZETÉS VÉGTELEN RÚDBAN, I.

CZIPSZER JÁNOS

Bevezetés

Ismeretes, hogy a

$$(1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$$

egydimenziós hővezetési differenciálegyenlet megoldását a

$$G: \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

tartományban a

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow +0 \\ \xi = x}} u(\xi, \tau) = f(x)$$

kezdeti feltétel mellett az

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy$$

úgynevezett Poisson-integrál szolgáltatja, ha az $f(x)$ függvény bizonyos megszorításoknak tesz eleget.

Felmerül mármost a kérdés, hogy általában az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy$$

Poisson-integrál vagy az általánosabb

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

Poisson—Stieltjes-integrál az $f(x)$ -re, illetve az $\alpha(x)$ -re vonatkozó milyen feltevések mellett megoldása az (1) differenciálegyenletnek esetleg a G tartománynál szűkebb, valamilyen $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$ sávban, és fordítva :

milyen feltevések mellett lehet az (1) differenciálegyenlet megoldását Poisson-integrállal vagy Poisson—Stieltjes-integrállal előállítani. Ezzel a problémával kapcsolatban a következő, Widder-től származó tételt említjük meg, amely e dolgozat kiindulópontjául szolgált.

1. tétel ([3], Theorem 6., 92. oldal). Ha $u(x, t)$ valamilyen $S: -\infty < x < \infty, 0 < t < c (c > 0)$ sávban értelmezett, nem-negatív, folytonos, az $u_{xx} = u$ differenciálegyenletet kielégítő függvény, akkor található olyan $\alpha(x)$ minden x -re értelmezett monoton növekedő függvény, amelyre fennáll az

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

egyenlőség S minden (x, t) pontjában.

Fordítva, ha $\alpha(x)$ minden x -re értelmezett monoton növekedő függvény, és

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

minden, a $0 < t < c$ feltételt kielégítő t -re véges, akkor $u(x, t)$ folytonos, nem-negatív és eleget tesz az $u_{xx} = u$ differenciálegyenletnek minden $0 < t < c$ -re.

Megjegyzendő, hogy Widder eredeti tétele az 1. tételtől némileg eltérő, amennyiben Widder a tétel első felében felteszi, a második felében pedig állítja, hogy $u(x, t)$ első és második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak. Az 1. tétel azonban teljesen ekvivalens Widder tételével, mint az Hartman és Widder alábbi tételéből azonnal következik (lásd: [1], 359. oldal):

Ha $u(x, t)$ az (1) differenciálegyenlet folytonos megoldása valamilyen nyílt halmazon, akkor $u(x, t)$ összes parciális deriváltjai léteznek és folytonosak.

Mi ebben a dolgozatban arra a kérdésre akarunk válaszolni, hogy az (1) differenciálegyenlet milyen megoldásait lehet tetszőleges, nem szükségképpen monoton súlyfüggvénnyel rendelkező abszolút konvergens Poisson—Stieltjes-integrállal előállítani. A kérdésre a következő tétel ad választ:

2. tétel. Jelöljük S -sel a $-\infty < x < \infty, 0 < t < c$ sávot, ahol c rögzített pozitív szám.

a) Ha $u(x, t)$ S -ben értelmezett folytonos, az

$$u_{xx} = u$$

differenciálegyenletet kielégítő függvény, amelyre

$$(2) \quad \sup_{0 < t < h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} |u(x, t)| dx < \infty$$

minden $0 < h < c$ -re, akkor $u(x, t)$ minden S -beli (x, t) -re abszolút konvergens

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

Poisson—Stieltjes-integrálként állítható elő, ahol $\alpha(y)$ minden véges intervallumon korlátos variációjú függvény.

b) Ha $\alpha(y)$ minden véges intervallumon korlátos variációjú függvény, és az

$$(3) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

minden S -beli (x, t) -re abszolút konvergencia, akkor $u(x, t)$ S -ben folytonos, eleget tesz az (1) differenciálegyenletnek és a (2) egyenlőtlenségnek minden c -nél kisebb $h > 0$ számra.

c) Ha $\alpha(y)$ -ra teljesülnek a b) alatti kikötések és

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y),$$

akkor

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_a^b u(x, t) dx = \frac{1}{2} \{ \alpha(b+0) + \alpha(b-0) \} - \frac{1}{2} \{ \alpha(b+0) + \alpha(b-0) \},$$

minden valós a -ra és b -re.

Megjegyzendő, hogy általában az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\alpha(x)$$

integrált, akkor nevezzük abszolút konvergenciának, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |d\alpha(x)| < \infty.$$

A 2. tétel bizonyítását az 1. §-ban közöljük; a bizonyítás gondolatmenete lényegében ugyanaz, mint amilyenvel *Widder* az 1. tételt bizonyítja.

A 2. tételből és a [3] dolgozat egyik segédtevételeiből az 1. tétel könnyen következik; ezt mutatjuk meg a 2. §-ban. Végül a 3. §-ban az (1) differenciálegyenlet (3) alakú megoldásaira egy érdekes becslést konstruálunk.

1. §.

Rátérünk a 2. tétel bizonyítására. Először a 2. tétel b) állítását igazoljuk. Legyen tehát $\alpha(x)$ minden véges intervallumon korlátos variációjú függvény, és a (3) integrál legyen minden $0 < t < c$ -re abszolút konvergens.

Ez az integrál, továbbá az integrandus t és x szerinti akárhányszori deriválása után kapott integrálok mind abszolút és egyenletesen konvergálnak minden $-R \leq x \leq R$, $0 < t \leq h < c$ téglalapon. Ennek az egyszerű ténynek az igazolását az olvasóra bízuk, egyébként *Widder* idézett dolgozatában ([3], Theorem 1., 88. oldal) részletesen megtalálható. A (3) integrál és a deriváltak után kapott integrálok egyenletes konvergenciájából következik, hogy $u(x, t)$ folytonos, x és t szerint akárhányszor differenciálható,

és a deriváltak az integráljel mögötti deriválással nyerhetők. Minthogy $\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$ eleget tesz az (1) differenciálegyenletnek, azért ugyanez igaz $u(x, t)$ -re is. Hátra van még annak a megmutatása, hogy $u(x, t)$ eleget tesz a (2) egyenlőtlenségnek.

Ez könnyen igazolható :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} |u(x, t)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} \left| \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y) \right| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |d\alpha(y)| \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)} - \frac{(x-y)^2}{4t}} dx \right\} |d\alpha(y)| = \\ &= \sqrt{\frac{h-t}{h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4h}} |d\alpha(y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4h}} |d\alpha(y)|, \end{aligned}$$

ha $0 < t < h < c$. Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4h}} |d\alpha(y)|$$

integrál véges, mert a (3) integrál az $x = 0, t = h$ helyen abszolút konvergens, s így az

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} |u(x, t)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4h}} |d\alpha(y)|$$

egyenlőtlenséggel (2) be van bizonyítva. Ezzel a 2. tétel második állítását bebizonyítottuk.

A 2. c) állítás igazolása a következőképpen történik. Teljesüljenek $\alpha(y)$ -ra a 2. b) alatti feltevések, és legyen

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y).$$

Legyen $a < b$ és $\Omega > \max(|a|, |b|)$. $u(x, t)$ -t bontsuk három részre :

$$u_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y),$$

$$u_2(x, t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y),$$

$$u_3(x, t) = \int_{\Omega}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y).$$

Ha $t \rightarrow 0$, $u_1(x, t)$ és $u_3(x, t)$ egyenletesen tartanak 0-hoz az $a \leq x \leq b$ intervallumon. $u_2(x, t)$ parciális integrálás után így írható:

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\Omega-x)^2}{4t}} \alpha(\Omega) - \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\Omega+x)^2}{4t}} \alpha(-\Omega) - \\ - \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{x-y}{4\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy.$$

Itt a kiintegrált rész egyenletesen tart 0-hoz $a \leq x \leq b$ -ben, midőn $t \rightarrow 0$. Következésképp

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b u(x, t) dx = - \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b \left\{ \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{x-y}{4\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy \right\} dx = \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(b-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy - \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(a-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy \right\}.$$

A Poisson-integrál jól ismert tulajdonsága szerint

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(b-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy - \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(a-y)^2}{4t}} \alpha(y) dy \right\} = \\ = \frac{\alpha(b-0) + \alpha(b+0)}{2} + \frac{\alpha(a-0) + \alpha(a+0)}{2}.$$

Ezzel 2. c)-t bebizonyítottuk.

A 2. tétel első állításának igazolásához a következő unicitási tételre van szükségünk.

Segéd-tétel. Legyen $u(x, t)$ $a - \infty < x < \infty$, $0 \leq t < c$ sávon értelmezett folytonos függvény, amely $t > 0$ -ra eleget tesz az $u_{xx} = u_t$ differenciálegyenletnek. Még feltesszük, hogy minden $0 < h < c$ -re

$$\sup_{0 < t < h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} |u(x, t)| dx < \infty.$$

Ha a tett feltevések mellett $u(x, 0) \equiv 0$, akkor

$$u(x, t) \equiv 0.$$

A bizonyításnál a következő Tyihonov-tól származó unicitási tételt fogjuk felhasználni (lásd: [2], 206. oldal):

Legyen $u(x, t)$ a $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t \leq l$ sávon értelmezett folytonos függvény, amelyik $t > 0$ -ra eleget tesz az $u_{xx} = u_t$ differenciálegyenletnek, és alkalmas K -val és C -vel kielégíti az

$$|u(x, t)| \leq Ce^{Kx^2} \quad (0 \leq t \leq l)$$

egyenlőtlenséget. Ha a tett feltevések mellett $u(x, 0) \equiv 0$, akkor $u(x, t) \equiv 0$.

A segédétel bizonyítása a következőképpen történik. Bevezetjük a

$$v(x, t) = \int_0^x \{u(\xi + a, t) + u(-\xi + a, t)\} d\xi$$

függvényt, ahol a tetszőleges, rögzített valós szám. $v(x, t)$ minden $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t < c$ -re értelmezett folytonos függvény. Jegyezzük meg, hogy $v(x, 0) \equiv 0$.

Megmutatjuk, hogy $v(x, t)$ $t > 0$ -ra eleget tesz a $v_{xx} = v_t$ differenciálegyenletnek. Ehhez először is emlékeztetünk arra, hogy u_x és u_t ($= u_{xx}$) folytonosak $t > 0$ -ra (lásd az 1. tételt követő megjegyzést a 396. oldalon).

Számítsuk ki $v(x, t)$ parciális deriváltjait:

$$v_{xx} = u_x(x + a, t) - u_x(-x + a, t)$$

$$\begin{aligned} v_t &= \int_0^x \{u_t(\xi + a, t) + u_t(-\xi + a, t)\} d\xi = \\ &= \int_0^x \{u_{xx}(\xi + a, t) + u_{xx}(-\xi + a, t)\} d\xi = \\ &= \int_0^x \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\xi + a, t) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(-\xi + a, t) \right\} d\xi = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi + a, t) + \frac{\partial}{\partial \xi} u(-\xi + a, t) \right]_{\xi=0}^{\xi=x} = \\ &= \left[u_x(\xi + a, t) - u_x(-\xi + a, t) \right]_{\xi=0}^{\xi=x} = \\ &= u_x(x + a, t) - u_x(-x + a, t). \end{aligned}$$

Így valóban $v_{xx} = v_t$.

Most megmutatjuk, hogy minden $0 < l < c$ -re $v(x, t)$ eleget tesz egy (4) alakú becslésnek. Válasszunk egy h számot, melyre $l < h < c$. Tekintsük a

$$v_1(x, t) = \int_0^x u(\xi + a, t) d\xi$$

függvényt. Ezt a következőképpen becsülhetjük $t < l$ -re :

$$\begin{aligned}
 |v_1(x, t)| &\leq \left| \int_0^x |u(\xi + a, t)| d\xi \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_0^{-a} |u(\xi + a, t)| d\xi \right| + \left| \int_{-a}^x |u(\xi + a, t)| d\xi \right| = \\
 &= \left| \int_0^a |u(\xi, t)| d\xi \right| + \left| \int_0^{x+a} |u(\xi, t)| d\xi \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_0^a |u(\xi, t)| d\xi \right| + e^{\frac{(x+a)^2}{4(h-t)}} \left| \int_0^{x+a} e^{-\frac{\xi^2}{4(h-t)}} |u(\xi, t)| d\xi \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_0^a |u(\xi, t)| d\xi \right| + e^{\frac{(x+a)^2}{4(h-t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(h-t)}} |u(\xi, t)| d\xi .
 \end{aligned}$$

Jelöljük M -mel $u(x, t)$ maximumát a $-|a| \leq x \leq |a|$, $0 \leq t \leq l$ halmazon.
Legyen továbbá

$$\mu = \sup_{0 < t \leq l} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(h-t)}} |u(\xi, t)| d\xi .$$

Feltevés szerint μ véges. Végül jegyezzük meg, hogy $|x| \geq 2a$ -ra

$$(x + a)^2 \leq \frac{3}{2} |x| .$$

Ennek alapján adódik a következő becslés :

$$|v_1(x, t)| \leq |a| M + \mu e^{\frac{3}{4(h-l)} x^2} \leq (|a| M + \mu) e^{\frac{3}{4(h-l)} x^2} ,$$

ha $0 \leq t \leq l$ és $|x| \geq 2a$.

• Legyen

$$v_2(x, t) = \int_0^x u(-\xi + a, t) d\xi .$$

Nyilván

$$v_2(x, t) = -v_1(-x, t) ,$$

s így

$$|v_2(x, t)| \leq (|a| M + \mu) e^{\frac{3}{4(h-l)} x^2} \quad (0 \leq t \leq l, |x| \geq 2a) .$$

Következésképp

$$\begin{aligned}
 |v(x, t)| &= |v_1(x, t) + v_2(x, t)| \leq \\
 &\leq 2(|a| M + \mu) e^{\frac{3}{4(h-l)} x^2} \quad (0 \leq t \leq l, |x| \geq 2a) .
 \end{aligned}$$

Innen

$$|v(x, t)| \leq 2(a + M + \mu) + \max_{\substack{0 \leq t' \leq t \\ |x| \leq 2a}} |v(x, t')| e^{\frac{3}{4(h-l)} x^2},$$

ha $0 \leq t \leq l$, $-\infty < x < \infty$. Ezzel kimutattuk, hogy $v(x, t)$ a Tyihonov-tételben szereplő összes kirovásoknak eleget tesz. Következésképp

$$v(x, t) \equiv 0.$$

Ennélfogva $v_x(x, t)$ is azonosan eltűnik, speciálisan

$$v_x(0, t) = u(a, t) + u(a, t) = 0,$$

azaz

$$u(a, t) = 0.$$

Minthogy a tetszőlegesen választott valós szám volt, azért adódik, hogy

$$u(x, t) \equiv 0$$

q. e. d.

Ezek után rátérünk a 2. tétel első állításának igazolására.

$u(x, t)$ tegyen eleget a 2. tétel a) részében kirótt feltevéseknek. Rögzítünk valamilyen c -nél kisebb pozitív δ számot. A (2) egyenlőtlenség miatt minden $0 < t < c - \delta$ -ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} |u(x, \delta)| dx < \infty.$$

Válasszunk most a $(t, c - \delta)$ intervallum belsejében egy t' számot. Minthogy elég nagy $|y|$ -ra

$$(x - y)^2 \geq \frac{t}{t'} y^2,$$

ezért az

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4t'}} |u(y, \delta)| dy$$

integrállal együtt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |u(y, \delta)| dy$$

is véges. Így az $\int_0^x u(y, \delta) dy$ függvény teljesíti a 2. tétel b) részében az $\alpha(x)$ függvényre tett kikötéseket, ha c helyett $(c - \delta)$ -t írunk, és így a már bizonyított 2. b) tétel szerint

$$u_\delta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u(y, \delta) dy$$

a $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c - \delta$ sávban az (1) differenciálegyenlet folytonos megoldása, melyre teljesül a (2) egyenlőtlenség minden $0 < h < c - \delta$ -ra. Minthogy $u(y, \delta)$ az y folytonos függvénye, azért a Poisson-integrál jól ismert tulajdonsága szerint $u_\delta(\xi, \tau) \rightarrow u(x, \delta)$, midőn $(\xi, \tau) \rightarrow (x, \delta)$. Ennélfogva $u_\delta(x, t)$ -t folytonosan kiterjeszthetjük a $t = 0$ egyenesre, ha megállapodunk abban, hogy

$$u_\delta(x, 0) = u(x, \delta).$$

Tekintsük most az $u(x, t + \delta)$ függvényt. Ez a függvény a $0 \leq t < c - \delta$ sávban folytonos és eleget tesz (1)-nek, továbbá minden $0 < h < c - \delta$ -val kielégíti (2)-t is, hiszen

$$\sup_{0 < h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h-t)}} |u(x, t + \delta)| dx \leq \sup_{0 < h+\delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4(h+\delta-t)}} |u(x, t)| dx,$$

s itt a jobboldal az $u(x, t)$ -re vonatkozó feltevés értelmében véges. Mint-hogy $u(x, t + \delta)$ $t = 0$ -ra megegyezik $u_\delta(x, t)$ -vel, azért mondhatjuk, hogy $u(x, t + \delta) - u_\delta(x, t)$ $0 \leq t < c - \delta$ -ra folytonos, $t > 0$ -ra eleget tesz (1)-nek, minden $0 \leq t < c - \delta$ -ra kielégíti (2)-t¹⁾ és $t = 0$ -ra eltűnik. A segéd-tétel szerint ezekből a tulajdonságokból következik, hogy

$$u(x, t + \delta) - u_\delta(x, t) \equiv 0,$$

azaz

$$u(x, t + \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u(y, \delta) dy,$$

ha $0 < \delta < c$ és $0 < t < c - \delta$.

Válasszunk most egy pozitív, c -nél kisebb t_1 számot. Legyen $\delta \leq (c - t_1)/2$. $u(x, t + \delta)$ a következő alakban írható:

$$u(x, t + \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{4t_1}} e^{-\frac{y^2}{4t_1}} u(y, \delta) dy,$$

ha $t < t_1$. Legyen

$$\beta_\delta(x) = \int_0^x e^{-\frac{y^2}{4t_1}} u(y, \delta) dy.$$

Így

$$u(x, t + \delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{4t_1}} d\beta_\delta(y) \quad (t < t_1).$$

¹⁾ Nyilvánvaló, hogy két függvénnyel együtt azok különbsége is eleget tesz 2)-nek.

Minthogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |d\beta_{\delta}(x)| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t_1}} |u(x, \delta)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\left(\frac{c+t_1}{2} - \delta\right)}} |u(x, \delta)| dx,$$

s a jobboldal (2) szerint egy rögzített K korlát alatt marad, midőn δ befutja a $\left(0, \frac{c-t_1}{2}\right)$ intervallumot, azért *Helly* tétele szerint meg lehet adni egy 0-hoz konvergáló $\delta_1, \delta_2, \dots$ sorozatot és egy, a $(-\infty, \infty)$ intervallumon korlátos variációjú $\beta(x)$ függvényt úgy, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\beta_{\delta_n}(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\beta(x)$$

legyen, ahol $f(x)$ tetszőleges folytonos és korlátos függvény. Speciálisan tehát

$$\begin{aligned} u(x, t + \delta_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{4t_1}} d\beta_{\delta_n}(x) \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{4t_1}} d\beta(y) \quad \left(t < t_1, \delta < \frac{c-t_1}{2}\right), \end{aligned}$$

s így

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{4t_1}} d\beta(y) \quad (t < t_1).$$

Legyen

$$\gamma(x) = \int_0^x e^{\frac{y^2}{4t_1}} d\beta(y).$$

Akkor

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\gamma(y) \quad (t < t_1).$$

Ez az integrál abszolút konvergens, mert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |d\gamma(y)| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{y^2}{4t_1}} |d\beta(y)| < \infty.$$

Legyen

$$\alpha(x) = \frac{\gamma(x+0) + \gamma(x-0)}{2}.$$

Akkor

$$\alpha(x) = \frac{\alpha(x+0) + \alpha(x-0)}{2}.$$

Könnyen belátható, hogy

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y) \quad (0 < t < t_1),$$

ahol a jobboldalon álló integrál abszolút konvergens. Ez az egyenlőség és a jobboldal abszolút konvergenciája azonban nemcsak $0 < t < t_1$ -re, hanem minden $0 < t < c$ -re is fennáll. Válasszunk ugyanis egy tetszőleges $0 < t_0 < c$ számot, majd válasszunk egy t_1^* számot a (t_0, c) intervallum belsejében. A fentiek szerint lehet találni olyan $\alpha^*(x)$ minden véges intervallumon korlátos variációjú, az

$$\alpha^*(x) = \frac{\alpha^*(x+0) + \alpha^*(x-0)}{2}$$

feltételnek eleget tevő függvényt, melyre

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t_0}} d\alpha^*(x) \quad (0 < t < t_1^*),$$

ahol a jobboldalon álló integrál abszolút konvergens. A már bizonyított 2. c) tételből rögtön következik, hogy $\alpha(x) - \alpha^*(x)$ konstans, s így valóban

$$u(x, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t_0}} d\alpha(x),$$

ahol a jobboldalon álló integrál abszolút konvergens. Minthogy t_0 tetszőleges, c -nél kisebb pozitív szám, ezzel 2. a)-t teljesen bebizonyítottuk.

2. §.

Widder idézett dolgozatának egyik segédtetele szerint ([5], Theorem 4., 91. oldal) az (1) egyenlet S -beli minden folytonos és pozitív $u(x, t)$ megoldására érvényes az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u(y, \delta) dy \leq u(x, t + \delta)$$

egyenlőség, ha $0 < \delta < c$ és $0 < t < c - \delta$. Innen rögtön következik, hogy $u(x, t)$ minden $h < c$ -re eleget teszi (2)-nek s így 2. a) szerint abszolút konvergens Poisson–Stieltjes-integrállal állítható elő. A 2. c) tételből következik, hogy a Poisson–Stieltjes integrál súlyfüggvénye monoton nem-csökkenő. Ezzel az 1. tételre egy új bizonyítást nyertünk.

3. §.

Az (1) differenciálegyenlet (3) alakú megoldásaira egy becslést fogunk konstruálni.

$\alpha(x)$ tegyen eleget a 2. b) tétel feltevéseinek, és legyen

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y).$$

$(x - y)^2$ -re egy alkalmas alsó becslést fogunk adni. Kiindulunk az

$$(4) \quad (a + b)^2 \leq (1 + \theta^2) a^2 + \left(1 + \frac{1}{\theta^2}\right) b^2$$

egyenlőtlenségből, amely bármilyen valós a -ra, b -re és 0-tól különböző θ -ra érvényes. Legyen speciálisan $a = x$, $b = y - x$. (4) szerint

$$y^2 \leq (1 + \theta^2) x^2 + \left(1 + \frac{1}{\theta^2}\right) (y - x)^2.$$

Innen

$$(x - y)^2 \geq \frac{\theta^2}{1 + \theta^2} y^2 - \theta^2 x^2.$$

Innen $u(x, t)$ -re a következő becslést nyerjük:

$$|u(x, t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\theta^2}{1 + \theta^2} \frac{y^2}{4t}} |d\alpha(y)| e^{-\frac{\theta^2}{4t} x^2}.$$

Válasszunk egy pozitív, c -nél kisebb h számot, legyen $0 < t < h$ és $\theta = \sqrt{\frac{t}{h-t}}$.

Akkor

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4h}} |d\alpha(y)| e^{\frac{x^2}{4(h-t)}}.$$

Mint hogy a jobboldalon szereplő integrál az $\alpha(x)$ -re tett feltevések miatt véges, azért adódik, hogy

$u(x, t)$ eleget tesz az

$$|u(x, t)| \leq K \frac{e^{\frac{x^2}{4(h-t)}}}{\sqrt{t}}.$$

egyenlőtlenségnek minden $h < c$ -re. Itt K h -tól függő állandó.

Felvetődik a kérdés, hogy ha az (1) differenciálegyenlet egy folytonos megoldása az S sávban eleget tesz a fenti becslésnek, akkor abból következik-e, hogy ő abszolút konvergens Poisson–Stieltjes integrállal állítható elő. Ezt a kérdést nem sikerült eldöntenem.

- [1] P. HARTMAN—A. WINTNER: «On the solutions of the equation of heat conduction». *American Journal of Mathematics* 72 (1950) 359—395.
 [2] А. ТУИHOV: «Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur.» *Recueil Mathématique (Szbornyk)* 42 (1935) 199—216.
 [3] D. WIDDER: «Positive temperatures on an infinite rod.» *Transactions of the American Mathematical Society* 55 (1944) 85—95.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В БЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ, I.

Я. Ципсер

Резюме

Статья занимается вопросом о том, при каких условиях решения линейного уравнения теплопроводности (1), определенные в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$ ($c > 0$) могут быть представлены абсолютно сходящимся интегралом Стильтьеса—Пуассона вида (3). Ответ дается следующей теоремой:

Теорема В.: Обозначим через S полосу $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$, где c фиксированное положительное число.

а) Если функция $u(x, t)$, определенная в S непрерывна в S и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), а также условию (2) при любом $0 < h < c$ то $u(x, t)$ представляется сходящимся абсолютно для всех (x, t) из S интегралом Пуассона—Стильтьеса

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

где функция $\alpha(y)$ имеет ограниченное изменение во всяком конечном интервале.

б) Если функция $\alpha(y)$ имеет ограниченное изменение во всяком конечном интервале и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

сходится для всех (x, t) из S абсолютно, то этот интеграл, как функция от x и t непрерывна в S удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и неравенству (2) при любом $h > 0$, меньшем c .

в) Если для $\alpha(y)$ выполняется условия пункта б) и

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

то имеет место

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b u(x, t) dt = \frac{1}{2} [\alpha(b+0) + \alpha(b-0)] - \frac{1}{2} [\alpha(a+0) - \alpha(a-0)]$$

для любых вещественных a и b .

Следует заметить, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\alpha(x)$$

мы называем абсолютно сходящимся, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |d\alpha(x)| < +\infty.$$

SUR LA PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UNE BARRE INFINIE, I

J. CZIPSZER

Résumé

Dans cette Note nous nous sommes posé la question suivante :

Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la solution de l'équation de la chaleur (1) définie sur la bande $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$ admette une représentation de la forme (3) où l'intégrale de Poisson-Stieltjes est supposée absolument convergente? C'est le théorème suivant qui répond à cette question :

Théorème 2. Désignons par S la bande $-\infty < x < \infty$, $0 < t < c$ du plan x, t où c est un nombre positif fixe.

a) Si $u(x, t)$ est une solution continue de (1) définie sur S et si de plus $u(x, t)$ satisfait à (2) pour chaque $0 < h < c$, alors $u(x, t)$ admet une représentation de la forme (3) où $\alpha(y)$ est à variation bornée sur chaque intervalle fini et l'intégrale de Stieltjes est absolument convergente.

b) Si $\alpha(y)$ est une fonction à variation bornée sur chaque intervalle fini et si l'intégrale de Stieltjes (3) converge absolument pour chaque x, t en S alors la fonction $u(x, t)$ est une solution continue de (1) et satisfait à (2) pour chaque $0 < h < c$.

c) Si $\alpha(y)$ satisfait aux conditions énoncées sous b) et si nous posons

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} d\alpha(y)$$

alors on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b u(x, t) dx = \frac{1}{2} \{ \alpha(b+0) + \alpha(b-0) \} - \frac{1}{2} \{ \alpha(a+0) + \alpha(a-0) \}$$

pour chaque nombre réel a et b .

Remarquons que, d'une façon générale, l'intégrale de Stieltjes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\alpha(x)$$

est dite absolument convergente lorsque

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |d\alpha(x)|$$

est finie.