# FÖLDSZINTI FŰTÖTT HELYISÉG PADLÓJÁNAK HŐÁTBOCSÁTÁSÁRÓL

BOGNÁR JÁNOS

*Bevezetés*

Épületek tervezésénél rendszeres feladat a helyiségek fűtési hőszükségletének megállapítása. Ha a helyiséget minden oldalról levegő veszi körül (emeleti helyiség), akkor a hőveszteség a lineáris hőközlési törvény segítségével egyszerűen kiszámítható. Abban az esetben viszont, ha a helyiség a talaj szintjén emelkedik, a padlón át távozó hőmennyiség meghatározása részletesebb matematikai vizsgálatot kíván. Ezen a téren eddig megelégedtek félempirikus módszerekkel. Alábbi számításaink a feladat szabatos megoldását tartalmazzák téglalap alapú helyiségre, a mellett az egyszerűsítő feltétel mellett, hogy a levegő és a talaj egymásra vonatkozó hőközlési tényezője a helyiségen belül ugyanakkora, mint a helyiségen kívül. A gyakorlatban előforduló esetek egy részében ez a feltétel jó közelítéssel megvalósul. (Megjegyezzük, hogy a hőközlési tényező megállapításánál a hővezetésen kívül a hősugárzást is tekintetbe szokták venni.) Másik egyszerűsítő feltevésünk az, hogy a helyiség falai végtelenül vékonyak. E feltevés következtében a hőveszteség általunk kapott értéke nagyobb a valóságosnál, de hozzávetőleges becslések szerint az eltérés aránylag nem nagy, és amúgyis a tervezés biztonságát növeli. Az alábbiakban először a megfelelő kétdimenziós problémát tárgyaljuk, vagyis azt az esetet, amikor a helyiség végtelen hosszú, azután térünk át a térbeli problémára (véges hosszúságú helyiség).

## *1. §. A helyiség alapja végtelen sáv*

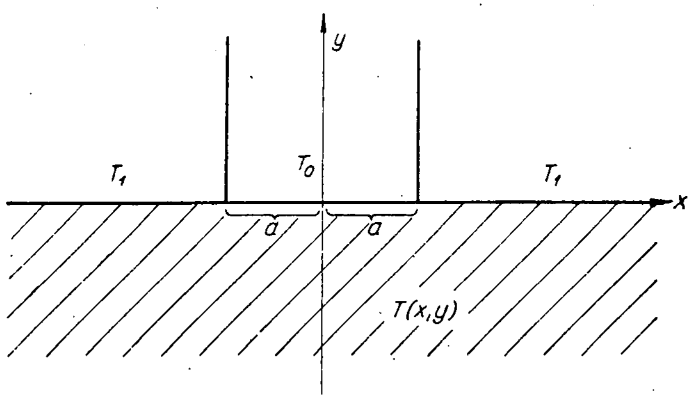
A talaj szintjén emelkedik egy hőszigetelő padlóval nem rendelkező helyiség, amelynek alapja $2a$ szélességű, végtelenbe nyúló sáv. A helyiséget úgy fűtik, hogy a talajmenti légrétegben $T_0$ állandó hőmérséklet alakul ki. A helyiségen kívül a talajmenti légréteg hőmérséklete, $T_1$, szintén állandó érték. Ezenkívül ismerjük a talaj $\varkappa$ hővezetési tényezőjét (feltesszük, hogy a talaj homogén izotróp) és a talaj és a levegő $K$ hőközlési tényezőjét. (A szigeteletlenség azt jelenti, hogy $K$ kívül és belül ugyanaz az érték.) Meghatározandó az alap egységnyi hosszúságú darabján keresztül a talajnak időegység alatt átadott $Q$ hőmennyiség.

A számításnál nyilván elég egy tetszés szerint választott keresztmetszetre szorítkozni. A koordinátarendszert az 1. ábrán látható módon vesszük fel. Ha a talaj $(x, y)$ pontjában kialakuló hőmérséklet $T(x, y)$, akkor a Newton-féle lehűlési törvény (lásd pl. [4], 24. oldal) értelmében a keresett hőmennyiség

$$Q = K \int_{-a}^{a} [T_0 - T(x, -0)]\, dx. \tag{1}$$

Tehát először meg kell határozni a $T(x, y)$ hőmérsékleteloszlást. Ez a függvény az $y < 0$ félsíkban eleget tesz a stacionárius hővezetés

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (y < 0) \tag{2}$$



1. ábra

differenciálegyenletének ([4], 31. oldal), az $y = 0$ peremen pedig a

$$\varkappa T'_y(x, -0) = \begin{cases} K[T_0 - T(x, -0)], & \text{ha} \quad -a < x < a \\ K[T_1 - T(x, -0)], & \text{ha} \quad |x| > a \end{cases} \tag{3}$$

feltételnek ([4], 24. oldal). Bevezetve a

$$\frac{\varkappa}{K} = k \tag{4}$$

jelölést, (3) a következő alakban is írható:

$$T(x, -0) + kT'_y(x, -0) = \begin{cases} T_0, & \text{ha} \quad -a < x < a \\ T_1, & \text{ha} \quad |x| > a. \end{cases} \tag{5}$$

Legyen először $k = 1$, $T_1 = 0$. Akkor, mint ismeretes, a (2) differenciálegyenletnek az (5) peremfeltételt kielégítő megoldása

$$T(x, y) = -\frac{T_0}{2\pi} \int_{-a}^{a} G'_\eta(\xi, -0\,; x, y)\, d\xi, \tag{6}$$

ahol $G(\xi, \eta\,;\, x, y)$ a probléma úgynevezett Green-függvénye, amelyet a következő tulajdonságokkal definiálunk :

$$A)\qquad G(\xi, \eta\,; x, y) = \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} + g(\xi, \eta\,; x, y)\,;$$

$$(7)\qquad B)\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = 0 \qquad (\eta < 0,\ y < 0)$$

$$C)\qquad G(\xi, -0\,;\, x, y) + G'_\eta(\xi, -0\,;\, x, y) = 0.$$

Könnyen igazolható, hogy a

$$G(\xi, \eta\,;\, x, y) = \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} + \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta + y)^2}} -$$

$$(8)\qquad - 2e^{-\eta} \int_{-\infty}^{\eta} e^t \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (t + y)^2}}\, dt$$

függvény megfelel a (7) követelményeknek.[1]

(6)-ból (7) *C)* felhasználásával

$$(9)\qquad T(x, y) = \frac{T_0}{2\pi} \int_{-a}^{a} G(\xi, -0\,;\, x, y)\, d\xi.$$

(8)-ban elvégezve az $\eta \to -0$ határátmenetet és parciálisan integrálva,

$$G(\xi, -0\,;\, x, y) = 2 \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}} - 2 \int_{-\infty}^{0} e^t \log \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (t + y)^2}}\, dt =$$

$$= -2 \int_{-\infty}^{0} e^t \frac{t + y}{(\xi - x)^2 + (t + y)^2}\, dt = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-t} \frac{t - y}{(\xi - x)^2 + (t - y)^2}\, dt.$$

Ezt beírjuk (9)-be :

$$10)\qquad T(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \int_{-a}^{a} \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-t} \frac{t - y}{(\xi - x)^2 + (t - y)^2}\, dt \right\} d\xi.$$

Itt az integrálások sorrendje felcserélhető, mert rögzített $y < 0$ mellett az

[1]) $T$ és $G$ egyértelműségére és $G$ megszerkesztésére vonatkozólag lásd *Freud G.* [1] cikkét.

integrandus, mint $t$ és $\xi$ függvénye, folytonos, és a $t$ szerinti integrál $\xi$-ben egyenletesen konvergens. Tehát

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
T(x,y) &= \frac{T_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\left\{\int_{-a}^{a}\frac{t-y}{(\xi-x)^2+(t-y)^2}\,d\xi\right\}dt = \\
&= \frac{T_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\left\{\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{\xi-x}{t-y}\right|_{\xi=-a}^{\xi=a}\right\}dt = \\
&= \frac{T_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\operatorname{arc\,tg}\frac{a-x}{t-y}\,dt + \frac{T_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\operatorname{arc\,tg}\frac{a+x}{t-y}\,dt = \\
&= \frac{T_0}{\pi}\sum_{i=0}^{1}\int_0^\infty e^{-t}\operatorname{arc\,tg}\frac{a+(-1)^i x}{t-y}\,dt.
\end{aligned}
$$

Belátható (pl. a $t-y=u$ helyettesítéssel), hogy a kapott integrálokban az $y \to -0$ határátmenetet jogos az integráljel alatt elvégezni, vagyis

$$
(12)\qquad T(x,-0) = \frac{T_0}{\pi}\sum_{i=0}^{1}\int_0^\infty e^{-t}\operatorname{arc\,tg}\frac{a+(-1)^i x}{t}\,dt.
$$

Ebből parciális integrálással $-a < x < a$ esetén

$$
(13)\qquad T(x,-0) = T_0 - \frac{T_0}{\pi}\sum_{i=0}^{1}\int_0^\infty e^{-t}\frac{a+(-1)^i x}{t^2+[a+(-1)^i x]^2}\,dt \qquad (-a<x<a).
$$

A (13) értéket beírva az (1) képletbe, azt kapjuk, hogy $k=1$, $T_1=0$ esetén

$$
(14)\qquad Q = \frac{1}{\pi}KT_0\sum_{i=0}^{1}\int_{-a}^{a}\left\{\int_0^\infty e^{-t}\frac{a+(-1)^i x}{t^2+[a+(-1)^i x]^2}\,dt\right\}dx.
$$

Minthogy (14) integrandusa az integrációs tartományon pozitív és mint $t$ és $x$ függvénye mérhető, az integrálások sorrendjét szabad felcserélni azon utólag bebizonyosodó feltevés mellett, hogy az így nyert kétszeres integrál létezik. Tehát

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{\pi} KT_0 \sum_{i=0}^{1} \int\limits_0^\infty e^{-t} \left\{ \int\limits_{-a}^{a} \frac{a + (-1)^i x}{t^2 + [a + (-1)^i x]^2}\, dx \right\} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} KT_0 \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \int\limits_0^\infty e^{-t} \left\{ [\log \{t^2 + [a + (-1)^i x]^2\}]_{x=-a}^{x=a} \right\} dt = \\
&= \frac{1}{\pi} KT_0 \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \int\limits_0^\infty e^{-t} \log \{t^2 + [a + (-1)^i a]^2\}\, dt = \\
&= \frac{1}{\pi} KT_0 \left\{ \int\limits_0^\infty e^{-t} \log (t^2 + 4a^2)\, dt - \int\limits_0^\infty e^{-t} \log t^2\, dt \right\}.
\end{aligned}
$$

A kapott integrálokat [2] 312.5 b) és 312.5 d) formulája (56. oldal) felhasználásával kiszámíthatjuk, illetve visszavezethetjük egyszerűbbekre, így (15)-ből

$$
(16)\quad Q = \frac{2}{\pi} KT_0 \left( C + \log 2a + \cos 2a \int\limits_{2a}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt + \sin 2a \int\limits_{2a}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right),
$$

ahol $C = 0{,}577\ldots$ az Euler-állandó.

Az eddigiekben a $k = 1$, $T_1 = 0$ esetre szorítkoztunk. Könnyen belátható, hogy általános esetben az eredményt úgy kapjuk meg, hogy (16) jobboldalát szorozzuk $k$-val és $a$ helyébe mindenütt $a/k$-t, $T_0$ helyébe pedig $(T_0 - T_1)$-et írunk. Vagyis (4) és (16) alapján a végtelen hosszú helyiségre vonatkozó feladat megoldása:

$$
(17)\quad Q = \frac{2}{\pi} \varkappa (T_0 - T_1) \left( C + \log \frac{2a}{k} + \cos \frac{2a}{k} \int\limits_{2a/k}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt + \sin \frac{2a}{k} \int\limits_{2a/k}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right).
$$

Gyakorlati célokra a zárójelben álló tagok közül általában elég az első kettőt figyelembe venni, ugyanis parciális integrálással $x > 0$ esetén

$$
\begin{aligned}
\cos x \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt + \sin x \int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt &= \int\limits_x^\infty \frac{\cos (t-x)}{t}\, dt = \int\limits_x^\infty \frac{\sin (t-x)}{t^2}\, dt = \\
&= \frac{1}{x^2} - 2 \int\limits_x^\infty \frac{\cos (t-x)}{t^3}\, dt = \frac{1}{x^2} - 6 \int\limits_x^\infty \frac{\sin (t-x)}{t^4}\, dt = \\
&= \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^4} + 24 \int\limits_x^\infty \frac{\cos (t-x)}{t^5}\, dt,
\end{aligned}
$$

tehát

$$
(18)\quad \frac{1}{x^2} - \frac{12}{x^4} < \cos x \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt + \sin x \int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt < \frac{1}{x^2}.
$$

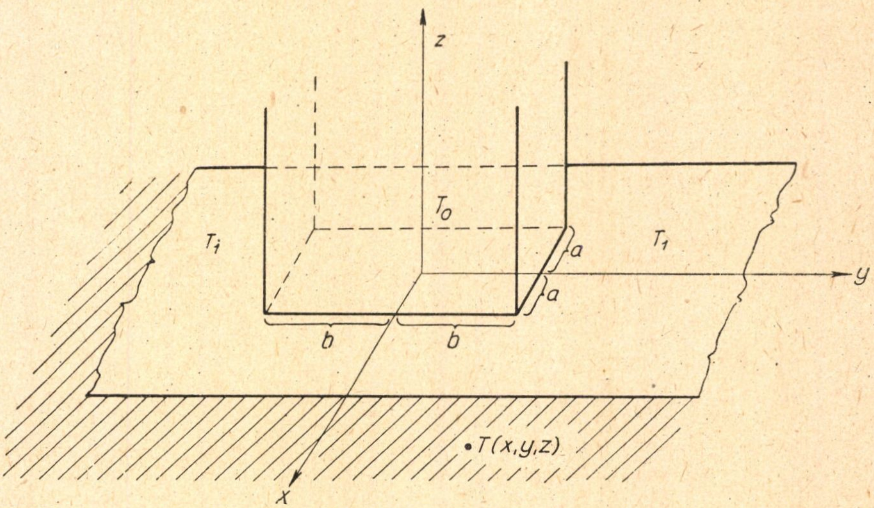
(18) alapján a

$$Q \approx \frac{2}{\pi} \varkappa (T_0 - T_1) \left( C + \log \frac{2a}{k} \right)$$

közelítés hibája $2a/k \geq 5$ esetén $2\%$-nál kevesebb.

## 2. §. *Téglalap-alapú helyiség*

A talaj szintjén emelkedik egy hőszigetelő padlóval nem rendelkező helyiség, amelynek alapja $2a$ szélességű és $2b$ hosszúságú téglalap. A helyiséget úgy fűtik, hogy a talajmenti légrétegben állandó $T_0$ hőmérséklet alakul ki. A helyiségen kívül a talajmenti légréteg hőmérséklete $T_1$, szintén állandó érték. A homogén izotróp közegnek feltételezett talaj $\varkappa$ hővezetési tényező-




2. ábra

jének, továbbá a talaj és a levegő $K$ hőközlési tényezőjének ismeretében meghatározandó az a $Q$ hőmennyiség, amelyet a helyiség levegője a talajnak időegység alatt átad.

Vegyük fel a koordinátarendszert a 2. ábrán látható módon és jelöljük a talaj $(x, y, z)$ pontjában kialakuló hőmérsékletet $T(x, y, z)$-vel, akkor — hasonlóan a kétdimenziós esethez — a keresett hőmennyiséget a

$$Q = K \iint_{(N)} [T_0 - T(x, y, -0)] \, dx \, dy \tag{19}$$

képlet szolgáltatja, ahol $N$ az $(x, y)$ sík $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ összefüggésekkel jellemzett téglalapja.

(19) használatához ismernünk kell a $T(x, y, z)$ hőmérsékleteloszlást. Ez a függvény a $z < 0$ féltérben kielégíti a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad (z < 0) \tag{20}$$

Laplace-egyenletet ([4], 29. oldal), a $z = 0$ határfelületen pedig a

$$\varkappa T'_z(x, y, -0) = \begin{cases} K[T_0 - T(x, y, -0)], & \text{ha} \quad (x, y) \in N \\ K[T_1 - T(x, y, -0)] & \text{egyébként} \end{cases} \tag{21}$$

feltételt ([4], 24. oldal). A (4) jelölés segítségével (21) a következő alakban írható:

$$T(x, y, -0) + kT'_z(x, y, -0) = \begin{cases} T_0, & \text{ha} \quad (x, y) \in N \\ T_1 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{22}$$

Szorítkozzunk először a $k = 1$, $T_1 = 0$ esetre. Ekkor, mint ismeretes, a (20) differenciálegyenletnek a (22) peremfeltételt kielégítő megoldása

$$T(x, y, z) = -\frac{T_0}{4\pi} \iint\limits_{(N)} G'_\zeta(\xi, \eta, -0\,;\, x, y, z)\, d\xi\, d\eta, \tag{23}$$

ahol $G(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$ a feladathoz tartozó Green-függvény, vagyis

$$\begin{aligned} &A) \quad G(\xi, \eta, \zeta\,;\, x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} + \\ &\qquad\qquad + g(\xi, \eta, \zeta\,;\, x, y\, z)\,; \\ &B) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2} = 0 \qquad (\zeta < 0, z < 0)\,; \\ &C) \quad G(\xi, \eta, -0\,;\, x, y, z) + G'_\zeta(\xi, \eta, -0\,;\, x, y, z) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Könnyen igazolható, hogy a

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta, \zeta\,;\, x, y, z) = &\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta + z)^2}} - \\ &- 2e^{-\zeta} \int\limits_{-\infty}^{\zeta} \frac{e^t}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t + z)^2}}\, dt \end{aligned} \tag{25}$$

függvény megfelel a (24) követelményeknek. (Lásd a lábjegyzetet a 411. oldalon.)

(23)-ból (24) $C)$ felhasználásával

$$T(x, y, z) = \frac{T_0}{4\pi} \iint\limits_{(N)} G(\xi, \eta, -0\,;\, x, y, z)\, d\xi\, d\eta. \tag{26}$$

(25)-ben elvégezve a $\zeta \to -0$ határátmenetet és parciálisan integrálva

$$G(\xi, \eta, -0; x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}} -$$

$$- 2 \int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t + z)^2}} dt =$$

$$= -2 \int_{-\infty}^{0} e^t \frac{t + z}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t + z)^2]^{3/2}} dt =$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} e^{-t} \frac{t - z}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t - z)^2]^{3/2}} dt.$$

Az eredményt beírjuk (26)-ba:

$$T(x, y, z) = \frac{T_0}{2\pi} \iint_{(N)} \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-t} \frac{t - z}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t - z)^2]^{3/2}} dt \right\} d\xi \, d\eta. \tag{27}$$

(27)-ben az integrálások sorrendjét felcserélhetjük, mert rögzített $z < 0$ mellett az integrandus folytonos mindhárom integrációs változóban, továbbá a $t$ szerinti integrál $\xi$-ben és $\eta$-ban egyenletesen konvergens. Tehát

$$T(x, y, z) = \frac{T_0}{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-t} \left\{ \iint_{(N)} \frac{t - z}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (t - z)^2]^{3/2}} d\xi \, d\eta \right\} dt.$$

A $\xi = x + r(t - z)$, $\eta = y + s(t - z)$ helyettesítés után két integrálás elvégezhető; kapjuk:

(28) $T(x, y, z) =$

$$= \frac{T_0}{2\pi} \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \int_{0}^{\infty} e^{-t} \operatorname{arc\,tg} \frac{[a + (-1)^i x] \, [b + (-1)^j y]}{(t - z)\sqrt{[a + (-1)^i x]^2 + [b + (-1)^j y]^2 + (t - z)^2}} dt.$$

A $t - z = u$ helyettesítéssel belátható, hogy a (28) képletben a $z \to -0$ határátmenetet elvégezhetjük az integráljel alatt, vagyis

(29) $T(x, y, -0) =$

$$= \frac{T_0}{2\pi} \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \int_{0}^{\infty} e^{-t} \operatorname{arc\,tg} \frac{[a + (-1)^i x] \, [b + (-1)^j y]}{t\sqrt{[a + (-1)^i x]^2 + [b + (-1)^j y]^2 + t^2}} dt.$$

A (29) kifejezést beírva (19)-be, és mindjárt elvégezve az $a+(-1)^i x = u$, $b+(-1)^j y = v$ helyettesítést, kapjuk:

$$Q = K\int_0^{2a}\left\{\int_0^{2b}\left[T_0 - \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-t}\operatorname{arc\,tg}\frac{uv}{t\sqrt{u^2+v^2+t^2}}\,dt\right]dv\right\}du,$$

innen pedig $t$ szerint parciálisan integrálva:

$$Q = K\int_0^{2a}\left\{\int_0^{2b}\frac{2T_0}{\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{uv(u^2+t^2+v^2+t^2)}{(u^2+t^2)(v^2+t^2)\sqrt{u^2+v^2+t^2}}\,dt\right]dv\right\}du; \tag{30}$$

(30) integrandusa a $t$, $u$, $v$ változók pozitív és mérhető függvénye, tehát az integrálások sorrendje felcserélhető, feltéve, hogy az így kapott háromszoros integrál létezik. Ezek szerint

$$Q = \frac{2}{\pi}KT_0\int_0^{\infty} e^{-t}\left\{\int_0^{2a}\left[\int_0^{2b}\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2+t^2}}\left(\frac{1}{u^2+t^2}+\frac{1}{v^2+t^2}\right)dv\right]du\right\}dt. \tag{31}$$

(31)-ben az $u$ és $v$ szerinti integrálás elemien elvégezhető. Átalakítás után az eredmény:

$$\begin{aligned} Q = \frac{4}{\pi}KT_0\int_0^{\infty} e^{-t}\,\Big[&\sqrt{4a^2+4b^2+t^2} - \sqrt{4a^2+t^2} - \sqrt{4b^2+t^2} + t -\\ &- a\log\left(2a+\sqrt{4a^2+4b^2+t^2}\right) -\\ &- b\log\left(2b+\sqrt{4a^2+4b^2+t^2}\right) +\\ &+ a\log\left(2a+\sqrt{4a^2+t^2}\right) + b\log\left(2b+\sqrt{4b^2+t^2}\right) +\\ &+ a\log\sqrt{4b^2+t^2} + b\log\sqrt{4a^2+t^2} -\\ &- a\log t - b\log t\Big]\,dt. \end{aligned} \tag{32}$$

Itt néhány tagot ki lehetne integrálni, de az így adódó kifejezés gyakorlati számítások céljára még mindig túlságosan bonyolult lenne. Ezért inkább arra törekszünk, hogy a (32) kifejezést könnyen kezelhető közelítő képlettel helyettesítsük. A feladat természetéből következik, hogy néhány százalékos pontatlanság megengedhető.

A kívánt közelítést úgy nyerjük, hogy (32) integrandusából kiküszöböljük a logaritmusokat, majd az egyes négyzetgyökös tagokat binomiális soruk első tagjaival pótoljuk.

Felhasználjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\log\left(2a+\sqrt{4a^2+4b^2+t^2}\right)dt = \tag{33}$$

$$= \int_0^{2a}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\int_0^{\infty} e^{-t}\log\left(\tau+\sqrt{\tau^2+4b^2+t^2}\right)dt\right\}d\tau + \int_0^{\infty} e^{-t}\log\sqrt{4b^2+t^2}\,dt;$$

ugyanis a jobboldalon szereplő derivált $\tau$-nak folytonos függvénye, amint látni fogjuk. Továbbá

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\infty e^{-t}\log\left(\tau+\sqrt{\tau^2+4b^2+t^2}\right)dt=\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{\tau^2+4b^2+t^2}}, \tag{34}$$

mert a jobboldali integrál egyenletesen konvergens $\tau$-ban, és integrandusa $\tau$ és $t$ folytonos függvénye. Ebből egyben következik az integrál folytonossága és így (33) helyessége is. (34)-et beírva (33)-ba

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-t}\log\left(2a+\sqrt{4a^2+4b^2+t^2}\right)dt=\\ &\qquad=\int_0^{2a}\left\{\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{\tau^2+4b^2+t^2}}\right\}d\tau+\int_0^\infty e^{-t}\log\sqrt{4b^2+t^2}\,dt.\end{aligned} \tag{35}$$

(35) érvényes $b=0$ esetén is :

$$\int_0^\infty e^{-t}\log\left(2a+\sqrt{4a^2+t^2}\right)dt=\int_0^{2a}\left\{\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{\tau^2+t^2}}\right\}d\tau+\int_0^\infty e^{-t}\log t\,dt. \tag{36}$$

(35)-öt, (36)-ot és a belőlük $a$ és $b$ felcserélésével előálló azonosságokat beírjuk (32)-be és felhasználjuk az

$$\int_0^\infty te^{-t}\,dt=1$$

relációt, kapjuk :

$$\begin{aligned}Q=\frac{4}{\pi}KT_0\Bigg[1&+\int_0^\infty e^{-t}\left(\sqrt{4a^2+4b^2+t^2}-\sqrt{4a^2+t^2}-\sqrt{4b^2+t^2}\right)dt+\\ &+a\int_0^{2a}\left\{\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2+t^2}}-\frac{1}{\sqrt{\tau^2+4b^2+t^2}}\right)dt\right\}d\tau+\\ &+b\int_0^{2b}\left\{\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2+t^2}}-\frac{1}{\sqrt{\tau^2+4a^2+t^2}}\right)dt\right\}d\tau\Bigg].\end{aligned} \tag{37}$$

Mindeddig a $k=1$, $T_1=0$ esettel foglalkoztunk. Annak megállapítása céljából, hogy hogyan kell módosítani (37)-et, ha $k$ tetszés szerinti pozitív érték, jelöljük a (20) differenciálegyenlet (22) peremfeltételt kielégítő megoldását átmenetileg részletesebben $T(x, y, z; k, N)$-nel. Változtassuk meg (22)-t úgy, hogy $N$ helyébe a $-\frac{a}{k}\leq x\leq\frac{a}{k}$, $-\frac{b}{k}\leq y\leq\frac{b}{k}$ összefüggésekkel jellemzett $N_k$ téglalapot írjuk. Az így kapott peremértékprobléma megoldása legyen $T(x, y, z; k, N_k)$. A definíció alapján

$$T(x, y, z; k, N) = T\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{k}; 1, N_k\right). \tag{38}$$

(19)-ből (38) felhasználásával és integráltranszformációval kapjuk :

$$Q = K\iint\limits_{(N)} \left[T_0 - T\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, -0; 1, N_k\right)\right] dx\, dy =$$

$$= k^2 K \iint\limits_{(N_k)} [T_0 - T(x', y', -0; 1, N_k)]\, dx'\, dy'.$$

Tehát tetszőleges $k$ esetén a $Q$ hőmennyiséget úgy kapjuk meg, hogy (37) jobboldalát szorozzuk $k^2$-tel, és $a$ helyébe mindenütt $a/k$-t, $b$ helyébe $b/k$-t írunk. $T_1 \neq 0$ esetén $T_0$ helyébe $T_0 - T_1$ írandó. Bevezetve a

$$\frac{2a}{k} = \alpha, \qquad \frac{2b}{k} = \beta \tag{39}$$

jelöléseket, (37)-ből (4) felhasználásával tetszőleges $k$ és $T_1$ esetén

$$Q = \frac{4}{\pi}\frac{\varkappa^2}{K}(T_0 - T_1)\left[1 + \int\limits_0^\infty e^{-t}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+t^2} - \sqrt{\alpha^2+t^2} - \sqrt{\beta^2+t^2}\right) dt + \right.$$

$$+ \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^\alpha \left\{\int\limits_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau^2+\beta^2+t^2}}\right) dt\right\} d\tau + \tag{40}$$

$$\left. + \frac{\beta}{2}\int\limits_0^\beta \left\{\int\limits_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tau^2+\alpha^2+t^2}}\right) dt\right\} d\tau\right].$$

A továbbiakban olyan közelítéseket kívánunk alkalmazni, amelyek kicsiny $\alpha$ és $\beta$ értékek mellett nem érvényesek. Ezért feltesszük, hogy $\alpha \geq 5$, $\beta \geq 5$ ; a gyakorlati alkalmazások során ez majdnem mindig teljesül. (40)-ből

$$Q = \frac{4}{\pi}\frac{\varkappa^2}{K}(T_0 - T_1)\left[1 + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\int\limits_0^\infty e^{-t}\sqrt{1 + \frac{t^2}{\alpha^2+\beta^2}}\, dt - \right.$$

$$- \alpha\int\limits_0^\infty e^{-t}\sqrt{1+\frac{t^2}{\alpha^2}}\, dt - \beta\int\limits_0^\infty e^{-t}\sqrt{1+\frac{t^2}{\beta^2}}\, dt + \frac{\alpha+\beta}{2}\int\limits_0^5\left\{\int\limits_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{\tau^2+t^2}}\right\} d\tau + \tag{41}$$

$$+ \frac{\alpha}{2}\int\limits_5^\alpha \frac{1}{\tau}\left\{\int\limits_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2/\tau^2}}\right\} d\tau + \frac{\beta}{2}\int\limits_5^\beta \frac{1}{\tau}\left\{\int\limits_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2/\tau^2}}\right\} d\tau -$$

$$-\frac{\alpha}{2}\int_0^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\tau^2+\beta^2}}\left\{\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{\sqrt{1+\frac{t^2}{\tau^2+\beta^2}}}\right\}d\tau -$$

$$\left.-\frac{\beta}{2}\int_0^{\beta}\frac{1}{\sqrt{\tau^2+\alpha^2}}\left\{\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{\sqrt{1+\frac{t^2}{\tau^2+\alpha^2}}}\right\}d\tau\right] .$$

A Taylor-formula szerint

$$\text{(42)}\qquad \begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8(1+\xi)^{3/2}} && (0\leqq\xi\leqq x)\\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8(1+\eta)^{5/2}} && (0\leqq\eta\leqq x). \end{aligned}$$

A (42)-ből a maradéktagok elhagyása útján kapott közelítéseket beírva (41)-be, integrálás után adódik

$$Q\approx\frac{4}{\pi}\frac{\varkappa^2}{K}(T_0-T_1)\left[1+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}-\alpha-\frac{1}{\alpha}-\beta-\frac{1}{\beta}+\right.$$

$$\text{(43)}\qquad +\frac{\alpha+\beta}{2}\int_0^5\left\{\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{\tau^2+t^2}}\right\}d\tau+\frac{\alpha}{2}\left(\log\alpha-\log 5+\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{1}{50}\right)+$$

$$+\frac{\beta}{2}\left(\log\beta-\log 5+\frac{1}{2\beta^2}-\frac{1}{50}\right)-\frac{\alpha}{2}\operatorname{ar\,sh}\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{2}\operatorname{ar\,sh}\frac{\beta}{\alpha}+$$

$$\left.+\frac{\alpha^2}{2\beta^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\frac{\beta^2}{2\alpha^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]\qquad (\alpha\geqq 5,\ \beta\geqq 5).$$

(43)-ban már csak egyetlen integrál szerepel és ez sem paraméteres, így egyszer s mindenkorra kiszámítható pl. a következő módon: [2] 513.7 formulája (196. oldal) alapján

$$\text{(44)}\qquad \int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\tau^2+t^2}}\,dt=\frac{\pi}{2}\left[\mathbf{H}_0(\tau)-N_0(\tau)\right]$$

ahol

$$\text{(45)}\qquad \mathbf{H}_0(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{[\Gamma(m+3/2)]^2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2m+1}$$

a 0-indexű *Struve*-függvény, $N_0(\tau)$ pedig a 0-indexű *Neumann*-függvény.

A $\mathbf{H}_0(\tau)$ függvényt (45) sorfejtése, az $N_0(\tau)$ függvényt pedig a [3] 57. oldalán található

$$\int_0^z N_0(\tau)\,d\tau = zN_0(z) + \frac{\pi z}{2}\left[N_1(z)\mathbf{H}_0(z) - N_0(z)\mathbf{H}_1(z)\right]$$

azonosság segítségével integrálva (44)-ből

$$\int_0^5 \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{\tau^2+t^2}}\,dt \right\} d\tau = 2{,}8976 \pm 0{,}0030. \tag{46}$$

A (46) értéket beírva (43)-ba, azonos átalakítások után

$$\begin{aligned} Q \approx \frac{2}{\pi}\frac{\varkappa^2}{K}(T_0 - T_1)\Bigg[&\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(2 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) + 2 - \\ &-\left(\frac{3}{2\alpha\beta} + 0{,}7318\right)(\alpha+\beta) - \alpha \log\left(\frac{1}{\beta} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}\right) - \\ &-\beta \log\left(\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}\right)\Bigg] \qquad (\alpha \geq 5,\ \beta \geq 5). \end{aligned} \tag{47}$$

A (47) képletben már nagyobb nehézség nélkül lehet numerikus helyettesítéseket végezni, másrészt — amint (42) felhasználásával végzett részletes becslésekkel kimutatható — a képlet relatív hibája az egész $5 \leq \alpha < \infty$, $5 \leq \beta < \infty$ negyedsíkon kevesebb, mint 1,2%. Feladatunkat ezzel téglalap alapú helyiségre is megoldottuk.

A (47) képletbe való helyettesítés, bár elemi, de elég hosszadalmas számolást kíván. Ha megelégszünk kisebb pontossággal, akkor (47)-et még lényegesen leegyszerűsíthetjük. E célból az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy $\alpha \leq \beta$ és felhasználjuk a nagy $x$ értékekre érvényes $\operatorname{ar\,sh} x \approx \log 2x$, továbbá a kis $x$ értékekre érvényes $\operatorname{ar\,sh} x \approx x$ és $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ összefüggést, végül pedig elhagyjuk az $\alpha$-ban és $\beta$-ban együttesen $(-1)$-edfokú tagokat. Így (47)-ből adódik a

$$Q \approx \frac{2}{\pi}\frac{\varkappa^2}{K}(T_0 - T_1)\left[2 - 0{,}9818\alpha + 0{,}5751\beta + (\alpha+\beta)\log\alpha\right] \qquad (5 \leq \alpha \leq \beta) \tag{48}$$

közelítés.

Amint gondos becslések megmutatták, a szabatos (41) érték eltérése a (48) közelítéstől pozitív irányban legfeljebb 15,9%, negatív irányban legfeljebb 10,1% az egész $5 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ tartományban. Az abszolút hibakorlát csökkentése céljából (48) szögletes zárójelben álló tényezőjében $+\,0{,}0292\,(\alpha+\beta)$ korrekciós tagot alkalmazunk:

$$Q \approx \frac{2}{\pi}\frac{\varkappa^2}{K}(T_0 - T_1)\left[2 - 0{,}9526\alpha + 0{,}6043\beta + (\alpha+\beta)\log\alpha\right] \qquad (5 \leq \alpha \leq \beta). \tag{49}$$

(49) relatív hibája az $5 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ tartományban kisebb a pontos érték 13,8%-ánál, a $13 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ résztartományban pedig — amely még mindig tartalmazza a gyakorlatban előforduló esetek túlnyomó részét — a pontos érték 4,9%-ánál.

Ezúton mondok köszönetet osztályvezetőmnek, *Freud Gézá*nak valamint *Orolin András* tervezőmérnöknek értékes tanácsaikért, amelyekkel munkámat segítették.

## IRODALOM

[1] Freud G. : „A potenciálelmélet harmadik peremértékfeladatáról." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 219—234.

[2] W. Gröbner—N. Hofreiter : *Integraltafel, II. Teil.* Springer, Wien, 1950.

[3] W. Magnus—F. Oberhettinger : *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2. Aufl.* Springer, Berlin, 1948.

[4] C. Schaefer : *Einführung in die theoretische Physik, 2. Band.* Gruyter, Berlin und Leipzig, 1929.

## О ТЕПЛОПРОНИЦАЕМОСТИ ПОЛОВ ТОПЛЕННЫХ ПОМЕЩЕНИЙ, ПОСТРОЕННЫХ НА УРОВНЕ ГРУНТА

Я. Богнар

### Резюме

Потерю тепла, получающуюся путем проводки и излучения через пол в топленных помещениях, построенных на уровне грунта, определили до сих пор различными полуэмпирическими методами. Эта статья содержит точное решение проблемы для помещений с основанием формы бесконечной полосы и формы прямоугольника при следующих двух предположениях, сделанных в интересах упрощения: 1. стены помещения бесконечно тонки; 2. коэффициент теплопередачи воздуха относительно почвы имеет одно и то же значение внутри помещения и вне помещения. В вычислениях мы воспользуемся функцией Грина третьей краевой задачи теории потенциала относительно полуплоскости, соответственно полупространства, которые были построены *Г. Фрейдом* в работе [1].

В § 1 рассматривается тот случай, когда основание помещения является бесконечной полосой. Известны: ширина полосы ($2a$), температура приземного слоя воздуха в помещении ($T_0$) и вне помещения ($T_1$), коэффициент теплопроводности однородной изотропной почвы ($\varkappa$), коэффициент теплопередачи воздуха и почвы друг относительно друга ($K$). Требуется определить количество тепла $Q$ переданное почве за единицу времени через кусок основания единичной длины.

Выберем произвольное поперечное сечение и в нем систему координат, как это видно на чертеже 1. Зная создающееся в почве распределение температуры $T(x, y)$, величина $Q$ определяется из (1). $T(x, y)$ определяется из дифференциального уравнения (2) и в обозначениях (4) из краевого условия (5), в случае $k = 1$, $T_1 = 0$ с помощью формулы (6). В таком случае функция Грина имеет форму (8) (см. [1]); подставляя ее в (6), простым вычислением приходим к (13). Подставляя выражение (13) в (1), путем дальнейших преобразований получаем (16). ($C = 0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера). Легко видеть, что при общем $k$ и $T_1$ вместо (16) имеет место (17). На практике обычно $2a/k \geqq 5$, и тогда, пренебрегая последними двумя членами в (17), мы совершаем не более чем 2% относительной ошибки.

В § 2 рассматривается случай помещения с основанием формы прямоугольника. Ширина основания $2a$, его длина $2b$. Смысл $T_0$, $T_1$, $\varkappa$ и $K$ тот же что и в § 1. Требуется определить количество тепла $Q$, переданное почве за единицу времени через всю площадь основания.

Если выбрать систему координат, как это показано на рисунке 2., то зная распределение температуры, создающееся в почве, решение задачи дается формулой (19). (Здесь $(x, y) \in N$, если $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$.) $T(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (20) и краевому условию (22), следовательно в случае $k = 1$, $T_1 = 0$ его можно представить в форме (23). Подставляя сюда известную из [1] функцию Грина (25), полу-

чаем путем простых преобразований (29), а потом, подставляя (29) в (19), точное решение (32) нашей проблемы ($k=1$, $T_1=0$). Так как это для практических целей слишком сложно, найдем приближенную формулу для $Q$. Для этого с помощью тождеств (35), (36), получающихся из (33) и (34), мы приводим (32) к форме (37). Можно видеть, что при произвольных положительных $k$ и $T_1$ вместо (37) имеет место (40). (Мы пользовались обозначениями (4) и (39)).

На практике обычно $\alpha \geqq 5$, $\beta \geqq 5$; в дальнейшем мы ограничимся этим случаем. Применяем дальнейшие преобразования к (40), затем воспользуемся формулой Тэйлора (42), так мы приходим к приближению (43), а пользуясь (46), к приближению (47). На основе (42) можно показать, что в случае $5 \leqq \alpha < \infty$, $5 \leqq \beta < \infty$ погрешность формулы (47) меньше, чем 1,2 . (47) симметрична относительно $\alpha$ и $\beta$, поэтому можно положить $\alpha \leqq \beta$. Тогда, после дальнейших пропущений – применяя поправку с целью уменьшения грани абсолютной погрешности — из (47) получается уже совершенно простая приближенная формула (49). Из подробной оценки погрешности выясняется, что для $5 \leqq \alpha \leqq \beta < \infty$ относительная погрешность (49) меньше, чем 13,8%, а для $13 \leqq \alpha \leqq$ $\leqq \beta < \infty$ меньше, чем 4,9%.

## CALCULATION OF HEAT TRANSMISSION OF THE FLOOR OF A HEATED ROOM BUILT ON THE GROUND

J. BOGNÁR

*Summary*

The loss of heat by heated rooms built on the ground, arising from conduction and radiation through the floor, has hitherto been determined by means of various half-empiric methods. The present paper contains the exact solution of the problem for rooms having an infinite strip or a rectangle as basis, under the following two suppositions: 1) the walls of the room are infinitely thin; 2) the coefficient of heat transmission between air and ground is the same inside and outside the room. In the calculation we make use of Green's function belonging to the third boundary value problem of potential theory in the half plane and in the half space, respectively, constructed by *G. Freud* [1].

§ 1. deals with the case when the base of the room is a strip extending to infinity. The known data are the width of the strip ($2a$), the temperature of the air near the ground inside the room ($T_0$) and outside of it ($T_1$), the thermal conductivity of the ground (assumed to be a homogeneous isotropic medium) ($\varkappa$), and the coefficient of heat transmission between air and ground ($K$). We want to calculate the quantity of heat $Q$ transmitted to the ground over a stretch of the floor of unit length per unit time.

We choose an arbitrary cross-section and a system of coordinates in it as shown by fig. 1. Knowing the stationary distribution $T(x, y)$ of temperature evolving in the ground, the value of $Q$ is given by (1). $T(x, y)$ may be determined from the differential equation (2) and (with notation (4)) from the boundary condition (5) by means of the resolving formula (6), in case $k = 1$, $T_1 = 0$. In this case Green's function $G$ has the form (8) (see [1]). Substituting (8) into (6) and the expression (13) — which can be obtained after simple calculations — into (1), we get (16), the solution of our problem for $k = 1$, $T_1 = 0$. ($C = 0{,}577\ldots$ is Euler's constant.) If $k$ and $T_1$ are arbitrarily given positive quantities, then (16) must be replaced by (17), as can be easily verified. In practice usually $2a/k \geqq 5$, so, that the error caused by neglecting the last two terms in (17) will not exceed 2 %.

§ 2. deals with rooms having an oblong base. The width of the base is denoted by $2a$, its length by $2b$. The meaning of $T_0$, $T_1$, $\varkappa$ and $K$ is the same as in § 1. We want to calculate the quantity of heat $Q$ transmitted to the ground over the whole surface of the floor per unit time.

If the system of coordinates is taken as in fig. 2., then — knowing the stationary distribution $T(x, y, z)$ of temperature evolving in the ground — the solution of the problem is given by (19). (Here $(x, y) \in N$, if $-a \leqq x \leqq a$, $-b \leqq y \leqq b$.) $T(x, y, z)$ satisfies Laplace's equation (20) and the boundary condition (22), so that in case $k = 1$, $T_1 = 0$ it can be represented in the form (23). Substituting here Green's function (25), taken from [1], after simple calculations we obtain (29), and, substituting (29) into (19), the exact solution of our problem (32) ($k = 1$, $T_1 = 0$). Since (32) is too complicated for practical purposes, some simple approximative formula

is needed for $Q$. Therefore (32) is transformed into the form (37) by the aid of the identities (35) and (36), derived from (33) and (34). It is shown that if $k$ and $T_1$ are arbitrarily given positive values, (37) must be replaced by (40). (Notations (4) and (39) are used.)

In practice usually $\alpha \geq 5$, $\beta \geq 5$; further investigations are restricted to that case. Making use of Taylor's formula (42) we obtain the approximative expressions (43) and (47). It can be shown on the basis of (42), that the error of (47) is less than 1,2 %, provided that $5 \leq \alpha < \infty$, $5 \leq \beta < \infty$.

(47) is symmetrical in $\alpha$ and $\beta$, so that we may suppose $\alpha \leq \beta$. Under this assumption after further neglections and using a correction to reduce the estimated numerical error, we obtain the simple approximative formula (49). According to exact estimations the relative error of (49) is less than 13,8 %, if $5 \leq \alpha \leq \beta < \infty$, and less than 4,9 %, if $13 \leq \alpha \leq \beta < \infty$.