A hasonlósági transzformáció a siklócsapágy számításoknál

DR. BENKŐ JÁNOS
Agrártudományi Egyetem, Gödöllő Mezőgazdasági Géptani Intézet

A tervezők a siklócsapágyak méretezésére, az egzakt megoldás hiányában, a hasonlósági módszert használják. A számítások alapját képező csapágy jellemző számok meghatározásának legtermékenyebb eszköze a hasonlósági transzformáció. A szerző ennek alkalmazási lehetőségét konkrét példán mutatja be,

Az egymáson elmozduló, szűkülő rést alkotó felületek közé juttatott viszkózus anyag nyomása a csökkenő rés irányában növekszik. Bizonyos feltételek esetén a rés a felületeket összeszorító erővel szemben is fenntartható. E jelenség az alapja a hidrodinamikus siklócsapágyak működésének, ezért a matematikai leírása nagy jelentőségű. Segítségével az említett feltételek számszerűsíthetők.

A matematikai leírásnál a viszkózus folyadékok mozgásegyenletéből, a *Navier-Stokes* egyenletből indulunk ki, amely réteges és stacionárius áramlás feltételezésével a

(1) $$\nabla p = \eta \Delta v$$

alakra egyszerűsödik. A siklócsapágyaknál kialakult méretarányok további egyszerűsítésekre adnak lehetőséget. Az áramlástér y irányú mérete nagyságrendekkel kisebb az x és z irányú méretnél, ezért az y irányú sebességkomponens elhanyagolható. A v_x és v_z sebességkomponensek x és z irányú másodrendű változásai szintén nullának tekinthetők. Ezeket figyelembe véve az (1) egyenlet az alábbi skalár egyenletekbe megy át:

(2) $$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}$$

amelyeket az összenyomhatatlanságot kifejező kontinuitási egyenlet egészít ki:

(3) $$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

A (2) egyenletből, az

y=0-nál a v_x=U és v_z=0,

y=h(x)-nél a v_x=0 és v_z=0

peremfeltételek felhasználásával, a v_x és v_z sebesség-összetevők kétszeri integrálással kifejezhetők a nyomás gradiens és a $h(x)$ rés függvényeként:

$$v_x = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}(y^2 - hy) - U\left(\frac{y}{h} - 1\right),$$

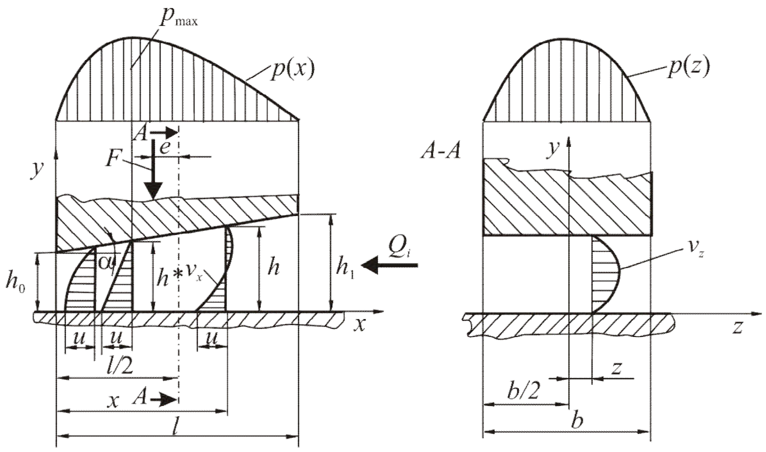
$$v_z = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}(y^2 - hy)\,.$$

Ezeket a kontinuitási egyenletbe helyettesítve és y szerint $0-h$ határok között integrálva a jól ismert *Reynolds*-féle egyenletet kapjuk:

(4) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)-6\eta U\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

Ennek megoldása szolgáltatja a siklócsapágy-számításokban nélkülözhetetlen $p(x,z)$ nyomásfüggvényt. Nehézséget jelent, hogy e másodrendű parciális differenciálegyenlet tetszőleges $h(x)$ résfüggvény esetén zárt alakban nem integrálható. A probléma megoldására ugyan az irodalomban több közelítő módszer is található, azonban ezek közvetlen felhasználása a tervezésben túl bonyolult és hosszadalmas lenne. Célszerűnek látszik olyan módszert keresni, amellyel a közelítő megoldások valamennyi szóba jöhető numerikus értéke táblázatba vagy diagramba foglalható. Erre a legalkalmasabb a hasonlóságelmélet. A *Reynolds*-egyenletet és a hozzá tartozó egyértelműségi feltételeket jellemző dimenzió nélküli számok közötti függvénykapcsolat ugyanis egyenértékű az eredeti egyenletekkel, ugyanakkor a változók száma jelentősen csökken.

A dimenzió nélküli számok meghatározásának a legtermékenyebb módszere a hasonlósági transzformáció. A következőkben ezt az eljárást fogjuk felhasználni az irodalomból ismert csapágy jellemző számok (*Sommerfeld-*, a *súrlódási-* és a *fajlagos olajszükségleti szám*) levezetésére. Az eljárást lineáris résfüggvényen és négyszög alakú sarun mutatjuk be (*1. ábra*).



1. ábra. Siklófelület-pár lineáris résfüggvénnyel

Kiindulásként írjuk fel a (4) egyenletet kétféle alakban:

(5/a) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)-6\eta U\frac{\partial h}{\partial x}=0\text{, és}$$

(5/b) $$\frac{\partial}{\partial x'}\left(h'^3\frac{\partial p'}{\partial x'}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(h'^3\frac{\partial p'}{\partial z'}\right)-6\eta' U'\frac{\partial h'}{\partial x'}=0$$

Ha a két egyenlet hasonló jelenséget ír le, akkor az egyik a másikba affin transzformációval vihető át, vagyis a megfelelő változók külön-külön lineárisan egymásba transzformálhatók:

$$C_x=\frac{x'}{x},\ C_z=\frac{z'}{z},\ C_h=\frac{h'}{h},\ C_p=\frac{p'}{p},\ C_x=\frac{\eta'}{\eta},\ C_U=U\ .$$

A vesszős változókat kifejezve, az (5/b) egyenletbe helyettesítve és rendezve a

$$\frac{C_h^3C_p}{C_x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{C_h^3C_p}{C_z^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)-\frac{C_\eta C_U C_h}{C_x}6\eta U\frac{\partial h}{\partial x}=0\ .$$

Ezt az (5/a) egyenlettel összevetve,

$$\frac{C_h^3 C_p}{C_x^2} = \frac{C_h^3 C_p}{C_z^2} = \frac{C_\eta C_U C_h}{C_x}$$

adódik. Az első taggal végig osztva a

$$\frac{C_x^2}{C_z^2} = \frac{C_\eta C_U C_h}{C_h^2 C_p} = 1$$

egyenlőségeket kapjuk. A transzformációs szorzókat helyettesítve a következő dimenzió nélküli számokat, ún, hasonlósági invariánsokat nyerjük:

(6) $$P_1 = \frac{\eta U x}{h^2 p} = \frac{\eta' U' x'}{h'^2 p'} \text{ és } P_2 = \frac{z^2}{x^2} = \frac{z'^2}{x'^2},$$

amelyekből látható, hogy a hasonlósági invariánsok értéke az (5/a) és az (5/b) egyenletekkel leírt jelenségeknél megegyezik. Ebből következik, hogy a $P_1 = f(P_2)$ függvénykapcsolat mindkét jelenséget leírja. Természetesen ez a kapcsolat egyértelművé csak akkor válik, ha a leíró egyenletekhez járuló peremfeltételeket is figyelembe vesszük.

A résfüggvény dimenzió nélküli alakja (*1. ábra*)

(7) $$\frac{h}{h_0} = 1 + (\varepsilon - 1)\frac{x}{l},$$

ahol $\varepsilon = h_1/h_0$, továbbá vezessük be a $k_x = x/l$ és a $k_z = z/b$ dimenzió nélküli koordinátákat. Ezeket felhasználva a

$$P_1 = \frac{\eta U l}{h_0^2 p}\frac{k_x}{[1 + (\varepsilon - 1)k_x]^2} \text{ és a } P_2 = \frac{b^2}{l^2}\frac{k_z^2}{k_x^2}.$$

A dimenzió nélküli számok közötti függvénykapcsolat így

$$\frac{\eta U l}{h_0^2 p} = f_1\left(k_x, k_z, \frac{b}{l}, \varepsilon\right),$$

amelyből a keresett nyomásfüggvény:

(8) $$p = \frac{\eta U l}{h_0^2 p} = f_1\left(k_x, k_z, \frac{b}{l}, \varepsilon\right).$$

A dimenzió nélküli változók függvényeként felírt nyomás segítségével meghatározhatók a siklócsapágy-számításokban használatos csapágyjellemző számok.

A felületeket összeszorító erő a nyomásból az

(9) $$F = \int_0^l \int_{-b/2}^{b/2} p(x, z)\, dx\, dz$$

összefüggéssel számítható. A nyomásfüggvényt helyettesítve és az integrálási határokat átalakítva az

$$F = \frac{\eta l^2 U}{h_0^2} b \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} f_2\left(k_x, k_z, \frac{b}{l}, \varepsilon\right) dk_x\, dk_z = \frac{\eta l U}{h_0^2} b\, l \Phi\left(\varepsilon, \frac{b}{l}\right),$$

ahol $\Phi(\varepsilon, b/l)$ az $f_2(k_x, k_z, b/l, \varepsilon)$ primitívfüggvénye. Bevezetve a $p = F/b\,l$ átlagos nyomást a

(10)
$$\Phi\left(\varepsilon,\frac{b}{l}\right)=\frac{h_0^2\,p}{\eta\,U\,l}$$

Sommerfeld-féle vagy terhelési számot nyerjük.

A súrlódási szám levezetéséhez a súrlódási ellenállás:

(11)
$$F_S=\int_0^l\int_{-b/2}^{b/2}[\tau_x]_{y=0}\,dx\,dz=\int_0^l\int_{-b/2}^{b/2}\left[-\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y=0}dx\,dz=\int_0^l\int_{-b/2}^{b/2}-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\frac{U}{h}\right)dx\,dz\,.$$

Alakítsuk át ismét az integrálási határokat és helyettesítsük a nyomásfüggvényt:

$$F_S=\frac{\eta U\,bl}{h_0}\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial k_x}f_2\left(k_x,k_x\,\frac{b}{l},\varepsilon\right)\left[1+(\varepsilon-1)k_x\right]+\frac{1}{1+(\varepsilon-1)k_x}\right\}dk_x\,dk_z,$$

amelyből az

(12)
$$F_S=\frac{\eta\,U\,b\,l}{h_0}\vartheta\left(\varepsilon,\frac{b}{l}\right)$$

A súrlódási tényező μ= F_s/F. Felhasználva az előző eredményeket a

$$\mu=\frac{\dfrac{\eta U\,bl}{h_0}\vartheta\left(\varepsilon,\dfrac{b}{l}\right)}{\dfrac{\eta\,U\,bl^2}{h_0^2}\Phi\left(\varepsilon,\dfrac{b}{l}\right)}=\frac{h_0}{l}C\left(\varepsilon,\frac{b}{l}\right).$$

A $\psi=h_0/l$ viszonylagos rést beírva és rendezve a súrlódási szám:

(13)
$$C\left(\varepsilon,\frac{b}{l}\right)=\frac{\mu}{\psi}.$$

A csapágy működésének harmadik fontos kritériuma a kenőfilm fenntartásához szükséges kenőanyag-mennyiség biztosítása. Az $x=l$ helyen belépő kenőanyag x és z irányban távozik. A résbe áramló kenőanyag:

(14)
$$Q_i=\int_0^h\int_{-b/2}^{b/2}[v_x]_{x=l}\,dy\,dz=\int_{-b/2}^{b/2}\left[\frac{U\,h}{2}-\frac{h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right]_{x=l}dz\,.$$

A dimenzió nélküli integrálási határokkal és (8) felhasználásával:

$$Q_i=\int_{-1/2}^{1/2}\left\{\frac{1+(\varepsilon-1)k_x}{2}-\frac{[1+(\varepsilon-1)k_x]^3}{12}\frac{\partial}{\partial k_x}f_2\left(k_x,k_z,\frac{b}{l},\varepsilon\right)_{k_x=1}\right\}dk_z$$

A kijelölt műveletet elvégezve:

$$Q_i=U\,h_0\,b\,J\left(\varepsilon,\frac{b}{l}\right)$$

bevezetve a $q_i=Q_i/bl$ fajlagos olajszükségletet, az olajszükségleti szám:

(15)
$$J\left(\varepsilon,\frac{b}{l}\right)=\frac{q_i}{U\psi}$$

A (10), (13) és (15) eredmények helyességéről könnyen meggyőződhetünk, ha összehasonlítjuk az irodalomban található, bonyolultabb módszerekkel nyert összefüggésekkel.

A fenti egyszerű példában bemutattuk a hasonlósági transzformáció gondolatmenetét. Segítségével levezettük a legfontosabb csapágyjellemző számokat és meggyőződhettünk az eljárásban rejlő előnyökről. Mint láttuk a transzformáció nem igényel bonyolult matematikai apparátust és gyorsabban vezet eredményhez, mint az eddig alkalmazott módszerek. Az eljárás alkalmas lehet különleges siklófelület-párok hasonlósági számainak a meghatározására is.

IRODALOM

1. **Benkő J.**: Gépelemek II. (Támasztások). Egyetemi jegyzet, (Szerk.: Szendrő P.) GATE Mg. Gépészmérnöki Kar, Gödöllő 1979. 9-21 p.

2. Szücs Ervin: Hasonlóság és modell, Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1972.

3. **Vörös Imre:** Gépelemek II, Tankönyvkiadó, Bp. 1970.

Publikálva:

Járművek, Mezőgazdasági Gépek 26. évfolyam 1979. 12. szám