

A szállítócsigák néhány elméleti kérdése

DR. BENKŐ JÁNOS

GATE, Géptani Intézet

Bevezetés

A tanulmány tárgya az egyik legrégebben alkalmazott folyamatos üzemű anyagmozgató gép a szállítócsiga, amit főleg száraz, nem tapadó, aprószemű és poros anyagok vízszintes, ferde, valamint függőleges irányú szállítására használnak. Megemlíthető, hogy a csiga működési elve nemcsak szállításra, hanem keverésre és préselésre is alkalmas. A tanulmány azonban elsősorban a csigák szállítás szempontjából lényeges elméleti kérdéseivel foglalkozik, bár elképzelhető, hogy a feltárt összefüggések szélesebb körben, más területeken is hasznosíthatók.

Az elméleti vizsgálatokhoz a legegyszerűbb mechanikai modellt, a tömegpont modellt használjuk, ami közismerten durva közelítése a valóságnak, és így nem tükrözi teljességében a tényleges folyamatokat. Mindezek ellenére a mozgásegyenlet felírása után kapott differenciálegyenletből (még akkor is, ha nem sikerül eljutnunk az általános megoldáshoz) rendszerint értékes következtetések vonhatók le, vagy a gyakorlat igényeit kielégítő, közelítő megoldások nyerhetők.

A csavarvonalon mozgó tömegpont differenciálegyenlete

A csigavályúba adagolt anyagi részecskét tömegpontnak (P) tekintjük, és mozgását az 1. ábra szerinti jobbsodrású x, y, z álló koordinátarendszerben, valamint a $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ egységvektorok által meghatározott forgó vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk. Az általános tárgyalás érdekében a z tengely, amely egybeesik a csigatengelyével, δ szöget zár be a vízszintessel. Továbbá feltételezzük, hogy a tömegpont a csigaszárnycsavarvonal felületén és a csigaszárnycsavarvonal peremén elhelyezkedő csavarvonalon mozog, a súrlódási tényezők pedig állandók.

Mint ismeretes a forgó vonatkoztatási rendszerben érvényes mozgásegyenletet úgy kapjuk, hogy a valódi erőkhöz hozzáadjuk a forgás miatt fellépő ún. járulékos vagy tehetetlenségi erőket (a szállító és a Coriolis erőt). Ezzel a forgó rendszer minden befolyását figyelembe vesszük a látszólagos pálya alakulására, és a továbbiakban a rendszer forgásától eltekinthetünk. A forgó vonatkoztatási rendszerben érvényes mozgásegyenlet tehát:

$$(1) \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{B} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c,$$

ahol:

m a tömeg,

$\ddot{\mathbf{r}}$ a tömegpont relatív mozgásának a gyorsulása a csavarvonalhoz viszonyítva,

\mathbf{S}_1 a súrlódási erő a tömegpont és a csavarfelület között,

\mathbf{S}_2 a súrlódási erő a tömegpont és a vályú között,

\mathbf{B} a kényszererő a csavarvonalon,

\mathbf{N} a kényszererő a vályú falán,

$\bar{\omega}_0$ a csigatengely szögsebessége,

\dot{s} a tömegpont relatív mozgásának a sebessége a csavarvonalhoz viszonyítva,

$\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ a súlyerő,

$\mathbf{F}_s = -m[\bar{\omega}_0 \times (\bar{\omega}_0 \times \mathbf{r})]$ a szállító erő vagy centrifugális erő,

$\mathbf{F}_c = -m(2\bar{\omega}_0 \times \dot{s}\mathbf{t})$ a Coriolis erő.

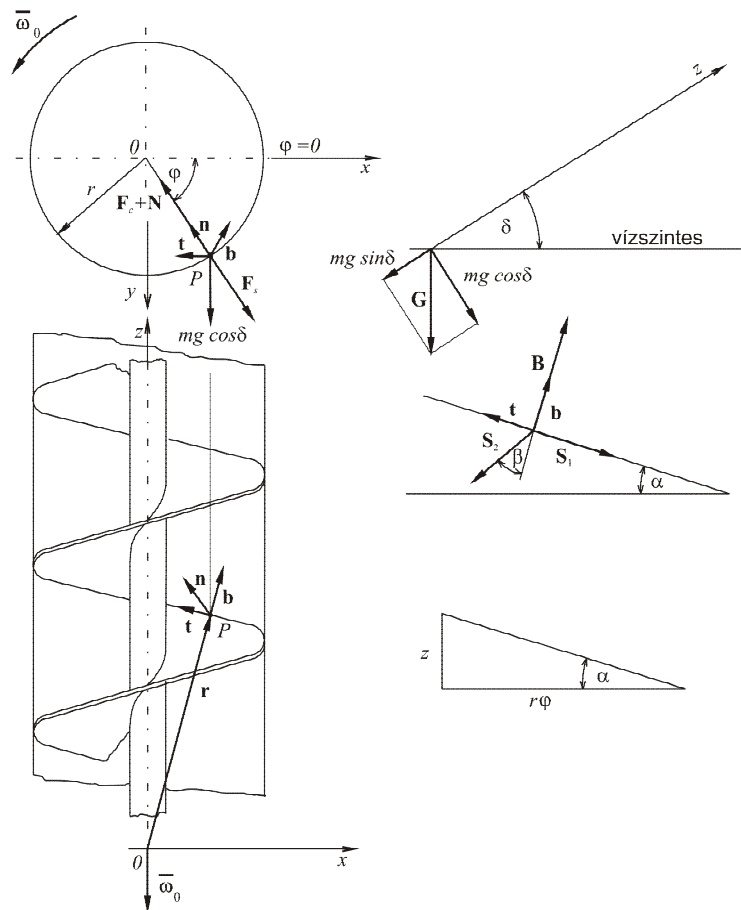
A modellben az S_1 és S_2 súrlódási erőkhez tartozó súrlódási tényezőket állandónak tekintjük.

Először határozzuk meg a $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ egységvektorokat az x, y, z álló koordináta rendszerben. A csavarvonal egyenlete legegyszerűbben az $\mathbf{r}(s)$ helyvektorral írható le, ahol s a görbe ívhossza. A csavarfelület külső peremén lévő csavarvonalra mutató \mathbf{r} helyvektor x, y, z komponensei (1. ábra):

$$(2) \quad \mathbf{r} = r \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \varphi \operatorname{tg} \alpha \end{bmatrix},$$

ahol:

- α a csavarvonal menetemelkedési szöge,
- φ a tömegpont abszolút szögelfordulása,
- r a helyvektor vetülete az x, y síkon.

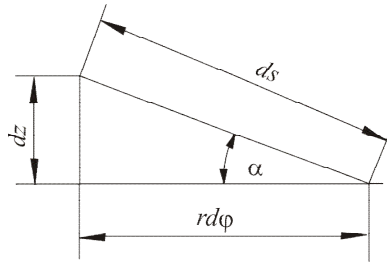


1. ábra: Koordináta rendszerek és a tömegpontra ható erők

Az ívhossz szerinti deriváltat \mathbf{r}' -vel jelölve

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}' = \mathbf{t},$$

ami nem más, mint a növekvő ívhossz irányába mutató érintőirányú egységvektor.



2. ábra

A láncszabályt alkalmazva, esetünkben az érintővektor:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds}.$$

A $d\varphi/ds$ hányados a 2. ábra alapján:

$$\cos \alpha = \frac{rd\varphi}{ds},$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos \alpha}{r}.$$

Helyettesítés után a \mathbf{t} érintővektor:

$$(3) \quad \mathbf{t} = \cos \alpha \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \operatorname{tg} \alpha \end{bmatrix}.$$

A második, az ún. \mathbf{n} főnormális egységvektort a \mathbf{t} érintőirányú egységvektor ívhossz szerinti deriválásával nyerjük:

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds}.$$

A deriválást elvégezve és a $d\varphi/ds$ -t helyettesítve az

$$(4) \quad \mathbf{r}'' = \mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\cos^2 \alpha}{r} \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = g\mathbf{n} = \frac{1}{R}\mathbf{n},$$

ahol az $R = r/\cos^2 \alpha$ a görbületi sugár, a $g = 1/R$ pedig a görbület. A \mathbf{t}' abszolút értéke, azaz a nagysága $|\mathbf{t}'| = g = 1/R$.

Végül tudjuk, hogy a $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ a binormális vektor:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \cos \alpha \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \operatorname{tg} \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \varphi \\ -\sin \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ vektorokból álló ún. kísérő triédert, mint forgó vonatkoztatási rendszert rendeljük a csavarvonalhoz, és ebben a rendszerben írjuk le a tömegpont mozgását.

A forgó rendszerben fellépő relatív mozgás gyorsulás komponenseit az \mathbf{r} vektor idő szerinti kétszeres deriválásával kapjuk meg:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s}\mathbf{t}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \dot{s}\mathbf{t} + \dot{s} \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \dot{s}\mathbf{t} + \dot{s} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s}\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}, \end{aligned}$$

így az (1) mozgásegyenlet baloldala a következő lesz:

$$(6) \quad m\ddot{\mathbf{r}} = m\ddot{s}\mathbf{t} + m\frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}$$

A továbbiakban transzformáljuk a tömegpontra ható erőket a $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ rendszerbe. A súlyerő komponenseit a $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ és az egységvektorok skaláris szorzataként kapjuk:

$$(7) \quad \mathbf{G}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\cos\delta \\ -mg\sin\delta \end{bmatrix} \cos\alpha \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix} = mg\cos\alpha\cos\varphi\cos\delta - mg\sin\alpha\sin\delta,$$

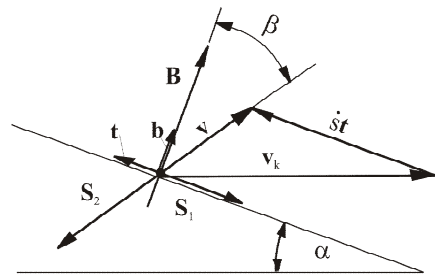
$$(8) \quad \mathbf{G}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\cos\delta \\ -mg\sin\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = -mg\sin\varphi\cos\delta,$$

$$(9) \quad \mathbf{G}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg\cos\delta \\ -mg\sin\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha\sin\varphi \\ -\sin\alpha\cos\varphi \\ \cos\alpha \end{bmatrix} = -mg\sin\alpha\cos\varphi\cos\delta - mg\cos\alpha\sin\delta.$$

A járulékos erők:

$$(10) \quad \mathbf{F}_s = -m[\bar{\omega}_0 \times (\bar{\omega}_0 \times \mathbf{r})] = -mr \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \varphi\operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix} = -mr\omega_0^2 \begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = -mr\omega_0^2\mathbf{n},$$

$$(11) \quad \mathbf{F}_c = -2m(\bar{\omega}_0 \times \dot{s}\mathbf{t}) = -2m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_0 \end{bmatrix} \times \dot{s}\cos\alpha \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix} = 2m\omega_0\dot{s} \begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = 2m\omega_0\dot{s}\cos\alpha\mathbf{n},$$



3. ábra: A tömegpontra ható súrlódási erők

Az \mathbf{S}_1 súrlódási erőt a csavarvonalra merőleges \mathbf{B} kényszererő hozza létre, értelme pedig $\dot{s}\mathbf{t}$ -vel, a relatív mozgás sebességével ellentétes (3. ábra):

$$(12) \quad \mathbf{S}_1 = -\mu_1 |\mathbf{B}|\mathbf{t},$$

ahol μ_1 a tömegpont és a csavarfelület közötti súrlódási tényező.

Az \mathbf{S}_2 súrlódási erőt az \mathbf{n} irányú szabad- és tehetetlenségi erők létesítik, azaz:

$$\mathbf{N} + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c - m\frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n} - mg\sin\varphi\cos\delta\mathbf{n} = \mathbf{0},$$

amelyből a csigavályú falán ébredő kényszererő:

$$(13) \quad \mathbf{N} = m \left(r\omega_0^2 - 2\omega_0\dot{s}\cos\alpha + g\sin\varphi\cos\delta + \frac{\dot{s}^2}{R} \right) \mathbf{n}.$$

A súrlódási erő:

$$(14) \quad \mathbf{S}_2 = -\mu_2 \frac{|\mathbf{N}| \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|},$$

ahol μ_2 a tömegpont és a vályú közötti súrlódási tényező, \mathbf{v} a tömegpont abszolút sebessége, amely a \mathbf{b} vektorhoz β szög alatt hajlik. A szállítás irányát jellemző β szöveget a **szállítás szögének** nevezzük. Az \mathbf{S}_2 súrlódási erő tehát \mathbf{v} irányú, de azzal ellentétes értelmű (3. ábra).

A $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ egységvektor kiszámításához írjuk fel a sebességegyenletet:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_k + \dot{s}\mathbf{t},$$

ahol a

$$\mathbf{v}_k = \bar{\omega}_0 \times \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_0 \end{bmatrix} \times r \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \varphi\operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix} = r\omega_0 \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A sebesség egyenletet a komponensekkel:

$$(15) \quad \mathbf{v} = r\omega_0 \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{s}\cos\alpha \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi(r\omega_0 - \dot{s}\cos\alpha) \\ -\cos\varphi(r\omega_0 - \dot{s}\cos\alpha) \\ \dot{s}\sin\alpha \end{bmatrix},$$

amelyből a

$$(16) \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{r^2\omega_0^2 - 2r\omega_0\dot{s}\cos\alpha + \dot{s}^2}.$$

Ezek után az \mathbf{S}_2 , \mathbf{t} és \mathbf{b} irányú komponensei (az \mathbf{n} irányú komponens 0):

$$(17) \quad \mathbf{S}_2 \mathbf{t} = -\mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{|\mathbf{v}|} \begin{bmatrix} \sin\varphi(r\omega_0 - \dot{s}\cos\alpha) \\ -\cos\varphi(r\omega_0 - \dot{s}\cos\alpha) \\ \dot{s}\sin\alpha \end{bmatrix} \cos\alpha \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \operatorname{tg}\alpha \end{bmatrix} = \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{|\mathbf{v}|} (r\omega_0 \cos\alpha - \dot{s}),$$

$$(18) \quad \mathbf{S}_2 \mathbf{b} = -\mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{|\mathbf{v}|} \begin{bmatrix} \sin\varphi(r\omega_0 - \dot{s}\cos\alpha) \\ -\cos\varphi(r\omega_0 - \dot{s}\cos\alpha) \\ \dot{s}\sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha \sin\varphi \\ -\sin\alpha \cos\varphi \\ \cos\alpha \end{bmatrix} = -\mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{|\mathbf{v}|} r\omega_0 \sin\alpha.$$

Végül, a (6)-(13), (17), (18) eredményeket az (1) mozgásegyenletbe helyettesítve megkapjuk a csavarvonalon mozgó tömegpont mozgásegyenletének kifejtett alakját:

$$(19) \quad m\ddot{s} = mg\cos\alpha\cos\varphi\cos\delta - mg\sin\alpha\sin\delta - \mu_1 |\mathbf{B}| + \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{|\mathbf{v}|} \frac{r\omega_0 \cos\alpha - \dot{s}}{\sqrt{r^2\omega_0^2 - 2r\omega_0\dot{s}\cos\alpha + \dot{s}^2}}$$

$$|\mathbf{N}| = m g \sin\varphi \cos\delta + m r \omega_0^2 - 2 m \omega_0 \dot{s} \cos\alpha + m \frac{\dot{s}^2}{R},$$

$$|\mathbf{B}| = m g \sin\alpha \cos\varphi \cos\delta + m g \cos\alpha \sin\delta + \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{|\mathbf{v}|} \frac{r\omega_0 \sin\alpha}{\sqrt{r^2\omega_0^2 - 2r\omega_0\dot{s}\cos\alpha + \dot{s}^2}}.$$

A 6. ábrából leolvasható:

$$(20) \quad \sin \beta = \frac{|\mathbf{v}_k| \cos \alpha - \dot{s}}{|\mathbf{v}|} = \frac{r\omega_0 \cos \alpha - \dot{s}}{\sqrt{r^2 \omega_0^2 - 2r\omega_0 \dot{s} \cos \alpha + \dot{s}^2}},$$

és

$$(21) \quad \cos \beta = \frac{|\mathbf{v}_k| \sin \alpha}{|\mathbf{v}|} = \frac{r\omega_0 \sin \alpha}{\sqrt{r^2 \omega_0^2 - 2r\omega_0 \dot{s} \cos \alpha + \dot{s}^2}}.$$

Ezeket helyettesítve a (19) komponens egyenletekbe:

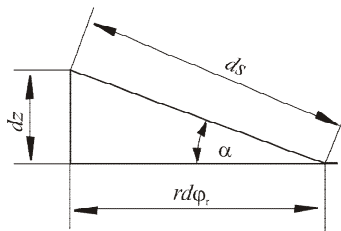
$$(22) \quad m\ddot{s} = mg \cos \alpha \cos \varphi \cos \delta - mg \sin \alpha \sin \delta - \mu_1 |\mathbf{B}| + \mu_2 |\mathbf{N}| \sin \beta,$$

$$|\mathbf{N}| = mg \sin \varphi \cos \delta + mr\omega_0^2 - 2m\omega_0 \dot{s} \cos \alpha + m \frac{\dot{s}^2}{R},$$

$$|\mathbf{B}| = mg \sin \alpha \cos \varphi \cos \delta + mg \cos \alpha \sin \delta + \mu_2 |\mathbf{N}| \cos \beta.$$

A fenti hiányos, nemlineáris másodrendű differenciálegyenlet tartalmazza a vízszintes és a függőleges csiga mozgástörvényeit is. A vízszintes és a függőleges csiga mozgásegyenletei $\delta = 0$, illetve $\delta = \pi/2$ helyettesítéssel nyerhetők. A mozgásegyenletből (még akkor is, ha nem sikerül eljutnunk az általános megoldáshoz) értékes következtetések vonhatók le, vagy a gyakorlat igényeit kielégítő, közelítő megoldások nyerhetők.

A differenciálegyenlet megoldása



4. ábra.

A (22) differenciálegyenlet megoldásához vezessük be a φ_r relatív szögelfordulás fogalmát. A 4. ábra alapján

$$ds = \frac{r}{\cos \alpha} d\varphi_r,$$

amit dt -vel osztva megkapjuk a relatív mozgás sebességét:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{r}{\cos \alpha} \dot{\varphi}_r,$$

a relatív mozgás gyorsulása pedig

$$\ddot{s} = \frac{r}{\cos \alpha} \ddot{\varphi}_r,$$

ahol $\dot{\varphi}_r$ a relatív mozgás szögsebessége, $\ddot{\varphi}_r$ a relatív mozgás szöggyorsulása.

Az eredményeket a (20-22) egyenletekbe helyettesítve, majd rendezve, a következő egyenleteket kapjuk:

$$(23/a) \quad \ddot{\varphi}_r = \frac{\cos \alpha}{r} \left(g \cos \alpha \cos \varphi \cos \delta - g \sin \alpha \sin \delta - \mu_1 \frac{|\mathbf{B}|}{m} + \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{m} \sin \beta \right)$$

ahol:

$$(23/b) \quad \frac{|\mathbf{N}|}{m} = g \sin \varphi \cos \delta + r\omega_0^2 - 2r\omega_0 \dot{\varphi}_r + r\dot{\varphi}_r^2,$$

$$(23/c) \quad \frac{|\mathbf{B}|}{m} = g \sin \alpha \cos \varphi \cos \delta + g \cos \alpha \sin \delta + \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{m} \cos \beta,$$

$$(23/d) \quad \sin \beta = \frac{\omega_0 \cos^2 \alpha - \dot{\varphi}_r}{\sqrt{\omega_0^2 \cos^2 \alpha - 2\omega_0 \dot{\varphi}_r \cos^2 \alpha + \dot{\varphi}_r^2}}$$

$$(23/e) \quad \cos \beta = \frac{\omega_0 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{\omega_0^2 \cos^2 \alpha - 2\omega_0 \dot{\varphi}_r \cos^2 \alpha + \dot{\varphi}_r^2}}$$

A (23) egyenletekből még a tömegpont abszolút helyzetét jellemző φ szöget kell kiküszöbölni, pontosabban a φ_r relatív szögelfordulás függvényeként felírni. Legyen φ_0 a $t=0$ időponthoz tartozó szög, a csigatengely forgásiránya negatív, a relatív forgás iránya pedig pozitív, így a

$$(23/f) \quad \varphi = \varphi_0 - (\omega_0 t - \varphi_r).$$

A kezdeti érték feladat numerikus megoldásához szükséges kezdeti feltételek könnyen megadhatók. A $t=0$ időpontban a tömegpont $\varphi=\varphi_0$ helyzetből indul, ekkor relatív szögelfordulás $\varphi_r(0)=0$, és a relatív mozgás szögsebesség ugyancsak nulla, azaz $\dot{\varphi}_r(0) = 0$.

Mint az ismeretes a magasabb rendű differenciálegyenletek általában visszavezethetők elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre, és ezt követően az ismert módszerek bármelyikét alkalmazhatjuk a megoldásra. A (23) másodrendű differenciálegyenlet általánosan

$$\ddot{\varphi}_r = f(\dot{\varphi}_r, \varphi_r, t).$$

Legyen $\dot{\varphi}_r = z$, akkor az új változó bevezetése után a differenciálegyenlet-rendszer:

$$\dot{z} = f(z, \varphi_r, t),$$

$$\dot{\varphi}_r = z.$$

A kezdeti feltételek pedig

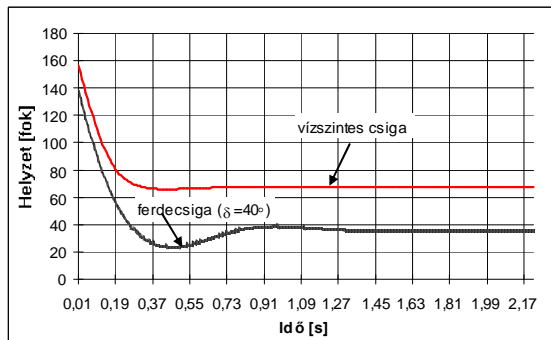
$$\varphi_r(0) = 0 \text{ és } z(0) = 0.$$

A $\mu_1=0,36$, $\mu_2=0,6$, $\alpha=14,3^\circ$, $\delta=0^\circ$ és 40° , $r=0,125$ m, $\omega_0=10$ 1/s paraméterekkel és $\varphi_0=161,93^\circ$ és $142,37^\circ$ kezdeti feltételekkel jellemzett vízszintes és ferdecsigában mozgó tömegpontok esetén a negyedrendű Runge-Kutta módszerrel nyert partikuláris megoldások grafikonjai a 8. ábrán láthatók.

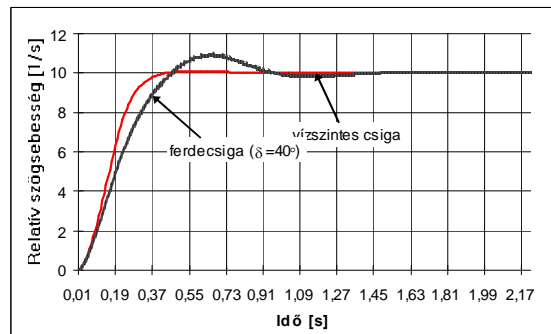
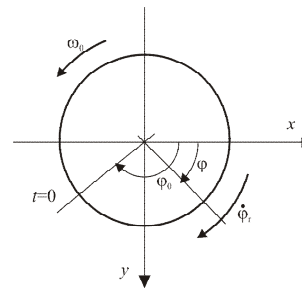
A 5/a ábra a tömegpont abszolút helyzetének (φ) változását mutatja az idő függvényében. A görbék először szigorúan monoton csökkennek, majd a minimum hely utáni monoton növekedésből egy állandó érték körüli csillapodó oszcillálásba mennek át.

A 5/b ábra görbéi a relatív mozgás szögsebesség változását ($\dot{\varphi}_r$) szemléltetik. A relatív mozgás szöggyorsulását leíró függvények (5/c ábra) a 5/b ábrán ábrázolt görbék maximum helyeinél metszik az időtengelyt. A maximum hely után a relatív mozgás szögsebessége monoton csökken, majd $\dot{\varphi}_r=10$ 1/s érték körül egyre kisebb amplitúdóval és egyre nagyobb periódus idővel oszcillál, vagyis tart a csigatengely szögsebességéhez. Ez azt jelenti, hogy lassan megszűnik a gyorsulás, és a tömegpont sebessége állandóvá válik, a mozgás stacionáriussá válik. Mindez a 5/c ábrán is követhető, ahol a relatív mozgás szöggyorsulása a minimum hely után monoton növekszik, és tart nullához.

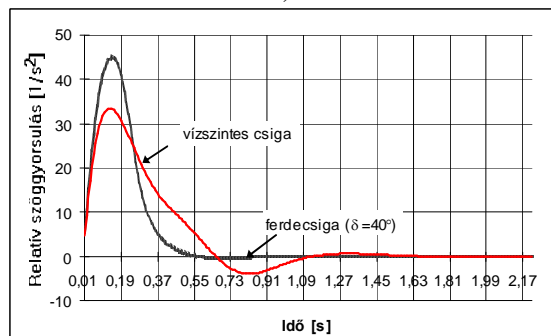
A megoldás érdekessége, hogy a mozgás csillapodó szakaszában az abszolút sebesség iránya $\sim \beta = -14,3^\circ$ -hoz tart, ami éppen $-\alpha$ nagyságú, vagyis az abszolút sebesség a z tengellyel párhuzamos lesz (5/d ábra).



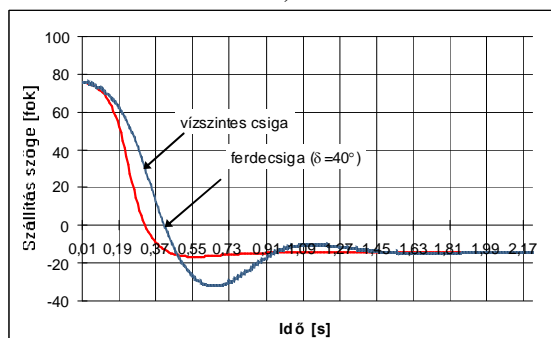
a)



b)



c)



d)

5. ábra: A differenciálegyenlet partikuláris megoldása

$$(\mu_1=0,36, \mu_2=0,6, \alpha=14,3^\circ, r=0,125 \text{ m}, \omega_0=10 \text{ 1/s})$$

Az ábrákon a csillapodás alig érzékelhető, mivel a lengések amplitúdói nagyon kicsik. Az oszcillálás időtartama a megoldás pontosságától függ. Ha a numerikus megoldás lépésközét nagyon kicsire, pl. $h=0,00001$ -re választjuk, akkor a φ , $\dot{\varphi}_r$, $\ddot{\varphi}_r$ és β értékek csillapodása nagyon hosszú ideig tart. Szerencsére azonban a lengések amplitúdói meglehetősen gyorsan elhanyagolhatóvá válnak. A gyakorlatban szokásos csigatengely fordulatszámoknál ez az idő-

tartam kisebb, mint 1 s, ezért a kváziállandósult állapotot a csiga kevesebb, mint 1/2 fordulat után eléri, ami után a φ , $\dot{\varphi}_r$, $\ddot{\varphi}_r$ és β értékek kváziállandónak tekinthetők.

A partikuláris megoldások és a grafikonok ismeretében kísérletet tehetünk a mozgás leírására. A $t=0$ időpontban a csigalevéllal együtt haladó tömegpont relatív mozgásának szögsebessége nulla, ezért az abszolút sebesség (\mathbf{v}) egyenlő a csigalevél kerületi sebességével (\mathbf{v}_k), iránya $\beta = \pi/2 - \alpha$. A kezdeti φ_0 helyzetben a tömegpont megcsúszik a csigalevélen (feltéve, hogy ennek feltételei adottak), és gyorsuló mozgást végez, miközben az abszolút sebesség vektor iránya (β) és nagysága változik. A \mathbf{v} vektor a \mathbf{b} binormális vektortól a gyorsulás első szakaszában jobbra, a második pedig balra hajlik. A mozgáspálya így egy, a csigatengely forgás irányában emelkedő szabálytalan spirális lesz. A tömegpont mozgása a $\varphi=0-\pi/2$ tartományban a μ_1 , μ_2 , α , δ paraméterek által meghatározott helyen ($\varphi=\varphi_a$) kváziállandóvá válik. A relatív mozgás gyorsulása megszűnik ($\ddot{\varphi}_r = 0$), és a szabaderők \mathbf{t} irányú komponensei egyensúlyba kerülnek. A relatív mozgás szögsebessége

$$\dot{\varphi}_r = \omega_0,$$

az abszolút mozgás sebességének iránya pedig

$$\beta = -\alpha$$

lesz.

A differenciálegyenlet illetve annak numerikus megoldása látszólag nem túl sokat mond a tervező mérnök számára, akit a mozgás első, gyorsuló szakasza legfeljebb a teljesítményigény számítása szempontjából érdekelhet. A tervező sokkal inkább a kváziállandósult állapot megismerésében érdekelt, amihez az út azonban ugyancsak a (23) egyenletrendszeren keresztül vezet. Ezért a továbbiakban megvizsgáljuk a relatív mozgás létrejöttének feltételeit, majd elemezzük a kváziállandósult mozgásállapotot.

A relatív mozgás kialakulásának feltételei

A megoldás során kérdés lehet a $t=0$ időponthoz tartozó szög megválasztása. A tömegpont mozgásának ismeretében már tudjuk, hogy a φ_0 csak olyan tartományba eshet, ahol a relatív mozgás feltételei adottak. Kérdés most az, hogy a tartomány alsó határa hogyan határozható meg. A $t=0$ időpontban, a relatív mozgás kezdetén a $\varphi_r(0)=0$, $\dot{\varphi}_r(0)=0$, amihez határesetben még a $\ddot{\varphi}_r(0)=0$ feltétel járul. Továbbá tudjuk azt is, hogy ekkor a $\mathbf{v}=\mathbf{v}_k$, azaz a \mathbf{v} vektor irányát jellemző β szög $\pi/2 - \alpha$ (3. ábra), ami miatt

$$\sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

és

$$\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

Ezeket, valamint a $t=0$ időponthoz tartozó feltételeket a (23) egyenletekbe helyettesítve a következő algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$(24/a) \quad g \cos \alpha \cos \varphi \cos \delta - g \sin \alpha \sin \delta - \mu_1 \frac{|\mathbf{B}|}{m} + \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{m} \cos \alpha = 0,$$

ahol

$$(24/b) \quad \frac{|N|}{m} = g \sin \varphi \cos \delta + r \omega_0^2,$$

$$(24/c) \quad \frac{|B|}{m} = g \sin \alpha \cos \varphi \cos \delta + g \cos \alpha \sin \delta + \mu_2 \frac{|N|}{m} \sin \alpha.$$

A (24/b és c)-t a (24/a)-ba beírva, és φ -re rendezve, a

$$\cos \varphi + \mu_2 \frac{\cos \delta (\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha)}{\cos \delta (\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha)} \sin \varphi - \frac{\sin \delta (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha)}{\cos \delta (\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha)} + \frac{\mu_2 r \omega_0^2}{g \cos \delta} \frac{\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha} = 0$$

A műveleteket elvégezve, a

$$\cos \varphi + \mu_2 \sin \varphi - \left(\operatorname{tg} \delta \frac{\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha} - \frac{\mu_2 r \omega_0^2}{g \cos \delta} \right) = 0.$$

Vezessük be a

$$C = \operatorname{tg} \delta \frac{\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha} - \frac{\mu_2 r \omega_0^2}{g \cos \delta}$$

jelölést, akkor a

$$\cos \varphi + \mu_2 \sin \varphi - C = 0.$$

Használjuk fel a $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ trigonometriai azonosságot, amellyel a

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} + \mu_2 \sin \varphi - C &= 0, \\ 1 - \sin^2 \varphi + 2C\mu_2 \sin \varphi + \mu_2^2 \sin^2 \varphi - C^2 &= 0. \end{aligned}$$

Rendezés után a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$(25) \quad \sin^2 \varphi - \frac{2C\mu_2}{\mu_2^2 + 1} \sin \varphi + \frac{C^2 - 1}{\mu_2^2 + 1} = 0.$$

A (2.625) egyenlet φ_1 pozitív gyöke határozza meg azt a helyet, ahol megkezdődhet a relatív mozgás. Ezért a kezdeti feltételek (5. ábra) megadásakor a

$$\varphi_0 \leq \pi - \varphi_1.$$

A (25) valós megoldásának és egyben a csiga működésének feltétele, hogy az egyenlet diszkriminánsa pozitív vagy 0 legyen, azaz

$$\begin{aligned} \frac{4C^2 \mu_2^2}{(\mu_2^2 + 1)^2} &\geq 4 \frac{C^2 - 1}{\mu_2^2 + 1}, \\ \frac{\mu_2^2}{\mu_2^2 + 1} &\geq 1 - \frac{1}{C^2}. \end{aligned}$$

A C értékét visszahelyettesítve, és bevezetve a $\mu_1 = \operatorname{tg} \rho$ jelölést, a

$$\frac{\mu_2^2}{\mu_2^2 + 1} \geq 1 - \frac{1}{\left(\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg}(\alpha + \rho) - \frac{\mu_2 r \omega_0^2}{g \cos \delta} \right)^2}.$$

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget ω_0 -ra:

$$\frac{1}{\left(\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg}(\alpha + \rho) - \frac{\mu_2 r \omega_0^2}{g \cos \delta}\right)^2} \geq 1 - \frac{\mu_2^2}{\mu_2^2 + 1} = \frac{1}{\mu_2^2 + 1},$$

$$\left[\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg}(\alpha + \rho) - \frac{\mu_2 r \omega_0^2}{g \cos \delta}\right]^2 \leq \mu_2^2 + 1.$$

A kijelölt műveletet elvégezve és rendezve, az

$$\omega_0^4 - \frac{2g \sin \delta \operatorname{tg}(\alpha + \rho)}{\mu_2 r} \omega_0^2 + \frac{g^2}{\mu_2^2 r^2} \left[\sin^2 \delta \operatorname{tg}^2(\alpha + \rho) - \cos^2 \delta (\mu_2^2 + 1) \right] \leq 0.$$

Vezessük be a

$$p = \frac{2g \sin \delta \operatorname{tg}(\alpha + \rho)}{\mu_2 r},$$

és a

$$q = \frac{g^2}{\mu_2^2 r^2} \left[\sin^2 \delta \operatorname{tg}^2(\alpha + \rho) - \cos^2 \delta (\mu_2^2 + 1) \right]$$

jelöléseket, akkor

$$\omega_0^4 - p \omega_0^2 \leq -q.$$

A baloldalt teljes négyzetté alakítva és rendezve:

$$\omega_0^4 - p \omega_0^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \leq -q$$

$$\left(\omega_0^2 - \frac{p}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

amelyből az egyenlőtlenség megoldásai:

$$-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \leq \left(\omega_0^2 - \frac{p}{2}\right) \leq \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Mivel az ismeretlen ω_0 a négyzeten szerepel, a lehetséges megoldás:

$$\omega_0^2 \leq \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \frac{p}{2}.$$

A p és q értékeket visszahelyettesítve, megkapjuk azt a **maximális szögsebességet**, ami felett a relatív mozgáshoz feltételei már nem biztosítottak:

$$(26) \quad \omega_{0\max} \leq \sqrt{\frac{g}{\mu_2 r} \left[\cos \delta \sqrt{\mu_2^2 + 1} + \sin \delta \operatorname{tg}(\alpha + \rho) \right]}.$$

A **vízszintes csigánál** a $\delta=0$, ezért az

$$(27) \quad \omega_{0\max} \leq \sqrt{\frac{g}{\mu_2 r} \sqrt{\mu_2^2 + 1}}.$$

A ferde és vízszintes csigánál tehát, adott μ_1 , μ_2 , α , δ paraméterekhez tartozik egy maximális szögsebesség ($\omega_{0\max}$), amely felett a (25)-nek nincs valós megoldása, vagyis $\omega_{0\max}$ -nál na-

gyobb szögsebességnél nincs biztosítva a relatív mozgás. Ezért a ferde és a vízszintes szállítócsiga fordulatszám-növelésnek egy bizonyos határ felett nincs értelme. Ezt az elméleti eredményt alátámasztják az irodalomban található empirikus összefüggések és azok indoklásai is.

A **függőleges csigánál** a relatív mozgás kezdete nem függ a φ szögtől, ugyanis a (24) egyenletekből $\delta=\pi/2$ helyettesítés után a φ -t tartalmazó tagok eltűnnek, így

$$-g \sin \alpha - \mu_1 \frac{|\mathbf{B}|}{m} + \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{m} \cos \alpha \geq 0,$$

$$\frac{|\mathbf{N}|}{m} = r\omega_0^2,$$

$$\frac{|\mathbf{B}|}{m} = g \cos \alpha + \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{m} \sin \alpha,$$

amelyekből

$$-\frac{\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha} + \frac{\mu_2 r \omega_0^2}{g} \geq 0,$$

illetve $\mu_1 = \operatorname{tg} \rho$ helyettesítés után a **függőleges csiga kritikus szögsebessége**:

$$(28) \quad \omega_{0krit} \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_2 r} \operatorname{tg}(\alpha + \rho)},$$

ami azonos az irodalomban a függőleges csiga kritikus szögsebességére adott, jól ismert összefüggéssel.

A (26-28) összefüggések a tervezési gyakorlat szempontjából rendkívül fontosak, mivel megadják azt a maximális vagy minimális szögsebességet, ami felett vagy alatt nincsenek meg a relatív mozgás feltételei, és a szállítócsiga elméletileg működésképtelenné válik.

Az állandósult mozgásállapot

A megoldással, illetve a kvázi állandósult mozgással kapcsolatban két fontos gyakorlatias kérdés vetődhet fel: (1) az állandósult állapot a tömegpont milyen helyzetében következik be, és itt milyen irányú lesz a tömegpont abszolút sebessége, (2) az állandósult állapot elérhető-e a $\delta=0-\pi/2$ tartományban mindenhol.

A korábban elemzett partikuláris megoldásban, a tömegpont relatív mozgásának szögsebessége ($\dot{\varphi}_r$) az idő előrehaladásával először növekszik, majd a maximum elérése után monoton csökkenve tart ω_0 -hoz. Ez azt jelenti, hogy egyensúlyi állapotban a $\dot{\varphi}_r = \omega_0$ és $\ddot{\varphi}_r = 0$. A numerikus vizsgálatok azt mutatják, hogy ezt állapotot a tömegpont (változatlan $\mu_1, \mu_2, \alpha, \delta$ paraméterek esetén) mindig ugyanazon a $\varphi = \varphi_a$ helyen éri el, függetlenül az ω_0 és φ_0 megválasztásától, de természetesen feltéve, hogy $\omega_0 \leq \omega_{0max}$, és a φ_0 helyen adottak a relatív mozgás feltételei. Ebből arra lehet következtetni, hogy az egyensúly kialakulásának helye nem függ az ω_0 szögsebességtől és a φ_0 szögtől. A hipotézis helyessége könnyen belátható, ha a (23/b) és (23/d) egyenletet alaposabban megvizsgáljuk. Ha ugyanis ezekbe a kvázi állandósult mozgásállapotnak megfelelően $\dot{\varphi}_r = \omega_0$ -t helyettesítünk, akkor azokból eltűnik az ω_0 és a kváziállandósult állapothoz tartozó φ_a szög csak a $\mu_1, \mu_2, \alpha, \delta$ paraméterek függvénye lesz.

A rövid kitérő után térjünk vissza az eredeti kérdésekhez. Első közelítésben feltételezzük, hogy az állandósult állapot mindig $\dot{\varphi}_r = \omega_0$ mellett jön létre, ezért a (23/d) egyenletbe helyettesítsünk $\dot{\varphi}_r = \omega_0$ -t, akkor a

$$\sin \beta = \frac{\omega_0 \cos^2 \alpha - \omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 \cos^2 \alpha - 2\omega_0^2 \cos^2 \alpha + \omega_0^2}} = \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sqrt{\cos^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha + 1}},$$

$$\sin \beta = \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = -\sin \alpha,$$

amelyből $\beta = -\alpha$, vagyis az **állandósult állapotban az abszolút sebesség iránya** a csigatengellyel párhuzamos, azaz z irányú. Erről úgy is meggyőződhetünk, hogy a (15) kifejezésbe az \dot{s} helyére

$$\dot{s} = \frac{r}{\cos \alpha} \dot{\varphi}_r = \frac{r}{\cos \alpha} \omega_0 \text{-t}$$

írunk. Ekkor a v_x és v_y komponensek eltűnnek, a z irányú komponens pedig

$$(29) \quad v_z = r\omega_0 \operatorname{tg} \alpha$$

lesz.

Az első kérdés első felére, az állandósult állapot a tömegpont milyen helyzeténél következik be, úgy kaphatunk választ, hogy a (23) egyenletrendszerbe $\dot{\varphi}_r = \omega_0$, $\ddot{\varphi}_r = 0$ és $\beta = -\alpha$ -t helyettesítsünk. Ekkor a (23/a) jobb oldala 0 lesz, (23/b)-ből pedig eltűnnek az ω_0 -t tartalmazó tagok, azaz

$$(30/a) \quad g \cos \alpha \cos \varphi \cos \delta - g \sin \alpha \sin \delta - \mu_1 \frac{|\mathbf{B}|}{m} - \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{m} \sin \alpha = 0,$$

ahol:

$$(30/b) \quad \frac{|\mathbf{N}|}{m} = g \sin \varphi \cos \delta,$$

$$(30/c) \quad \frac{|\mathbf{B}|}{m} = g \sin \alpha \cos \varphi \cos \delta + g \cos \alpha \sin \delta + \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{m} \cos \alpha.$$

A (30/b és c)-t a (30/a)-ba beírva és φ -re rendezve, a

$$\cos \delta (\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha) \cos \varphi - \mu_2 \cos \delta (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) \sin \varphi - \sin \delta (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) = 0,$$

$$\cos \varphi - \mu_2 \frac{\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha} \sin \varphi - \operatorname{tg} \delta \frac{\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha} = 0.$$

Felhasználva ismét a $\mu_1 = \operatorname{tg} \rho$ azonosságot, és bevezetve a

$$A = \mu_2 \frac{\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha} = \mu_2 \operatorname{tg}(\alpha + \rho),$$

$$B = \operatorname{tg} \delta \frac{\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_1 \sin \alpha} = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg}(\alpha + \rho)$$

jelöléseket, a következő másodfokú egyenletet nyerjük:

$$\cos \varphi - A \sin \varphi - B = 0,$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = A \sin \varphi + B,$$

$$1 - \sin^2 \varphi = A^2 \sin^2 \varphi + 2AB \sin \varphi + B^2,$$

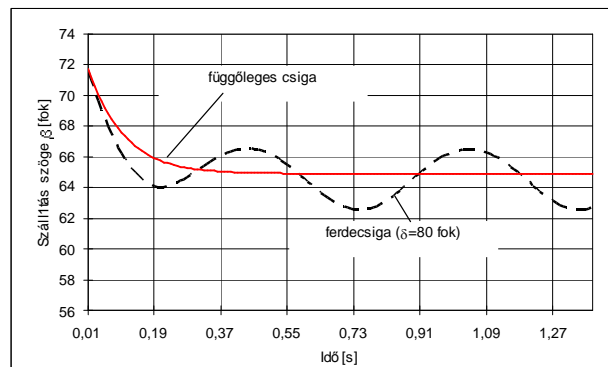
$$(31) \quad (A^2 + 1) \sin^2 \varphi + 2AB \sin \varphi + B^2 - 1 = 0.$$

A (31) egyenletből számítható a kváziállandósult állapothoz tartozó φ_a szög. A valós megoldás feltételei pedig választ adnak a második kérdésre. Az egyenlet együtthatói:

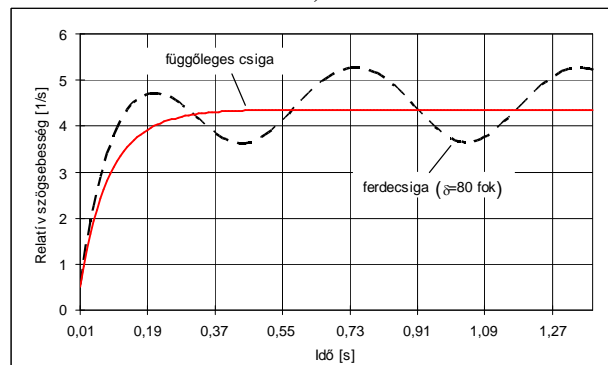
$$a = A^2 + 1 = \mu_2^2 \operatorname{tg}^2(\alpha + \rho) + 1,$$

$$b = 2AB = 2\mu_2 \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg}^2(\alpha + \rho),$$

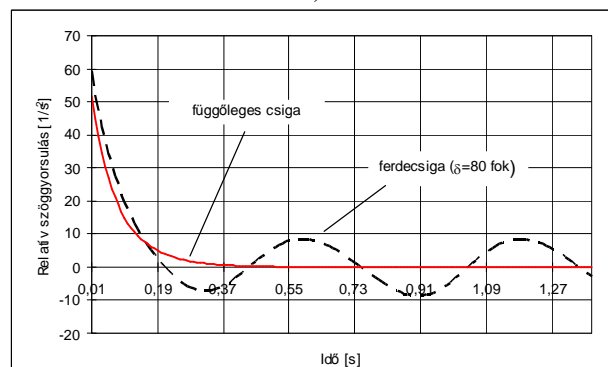
$$c = B^2 - 1 = \operatorname{tg}^2 \delta \operatorname{tg}^2(\alpha + \rho) - 1.$$



a)



b)



c)

6. ábra: A differenciálegyenlet megoldása függőleges és ferde csigára

$$(\mu_1=0,36, \mu_2=0,6, \alpha=17,66^\circ, r=0,125 \text{ m}, \omega_0=15 \text{ 1/s})$$

A valós megoldás szükséges feltétele:

$$b^2 - 4ac \geq 0.$$

Ezt δ -ra megoldva, a

$$(32) \quad \begin{aligned} 4\mu_2^2 \text{tg}^2 \delta \text{tg}^4(\alpha + \rho) &\geq 4[\mu_2^2 \text{tg}^2(\alpha + \rho) + 1][\text{tg}^2 \delta \text{tg}^2(\alpha + \rho) - 1], \\ \mu_2^2 \text{tg}^2 \delta \text{tg}^4(\alpha + \rho) &\geq \mu_2^2 \text{tg}^2 \delta \text{tg}^4(\alpha + \rho) + \text{tg}^2 \delta \text{tg}^2(\alpha + \rho) - \mu_2^2 \text{tg}^2(\alpha + \rho) - 1, \\ &1 \geq \text{tg}^2(\alpha + \rho)(\text{tg}^2 \delta - \mu_2^2), \\ &\sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\alpha + \rho)} + \mu_2^2} \geq \text{tg} \delta = \text{tg} \delta_h. \end{aligned}$$

Az eredményként kapott (32)-ből kiolvasható, hogy a $\dot{\varphi}_r = \omega_0$ -al jellemzett állandósult állapot csak egy bizonyos, az α és a ρ szögek, valamint a μ_2 súrlódási tényező által meghatározott δ_h határig érhető el. A δ_h a **maximális meredekséget** jellemző szög.

A (32)-ből számítható δ_h szög felett csak $\delta=90^\circ$ -nál állandósul a mozgás. Itt azonban a tömegpont abszolút sebességének iránya z tengellyel nem lesz párhuzamos, azaz $\beta \neq -\alpha$, és a $\dot{\varphi}_r$ soha nem éri el az ω_0 értékét. Ez jól látható a *6. ábrán*, amely egy függőleges és egy ferde csigára ($\delta=80^\circ$) vonatkozó partikuláris megoldás grafikonjait szemlélteti. Az egyéb paraméterek a két megoldásban azonosak: $\mu_1=0,36$, $\mu_2=0,6$, $\alpha=17,66^\circ$, $r=0,125$ m, $\omega_0=15$ 1/s, és a φ_0 szög mindkét esetben $\pi/2$.

A megoldásban a δ_h -nál meredekebb **ferdecsigák** eredményei tűnnek a legérdekesebbnek. A grafikonok szerint a szállítás irányát jellemző β szög, a relatív mozgás szögsebessége és a szöggyorsulása egy középértékhez viszonyítva periodikusan változik, de a korábbi eredményektől eltérően a függvények amplitúdói nem csillapodnak, és **nem alakul ki az állandósult mozgásállapot**. Ezeknél a csigáknál az állandó gyorsulás és lassulás tetemes energiát emészt fel.

A **függőleges csigára** kapott megoldás megegyezik a függőleges szállítócsigák elméletével kapcsolatban fellelhető publikációkban közölt eredményekkel [1], [2]. A megoldás alátámasztja a hivatkozott szerzőknek a kváziállandósult állapotra vonatkozó hipotézisét, ami alapján közvetlen felírhatók az egyensúlyi egyenletek. Természetesen az egyensúlyi egyenletek a (23) egyenletrendszerből is megkaphatók, ha abba beírjuk kváziállandósult állapot feltételeit.

A függőleges csiga esetén a $\delta=\pi/2$ és a $\ddot{\varphi}_r = 0$, amit a (23)-ba helyettesítve, a

$$(33/a) \quad -g \sin \alpha - \mu_1 \frac{|\mathbf{B}|}{m} + \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{m} \sin \beta = 0,$$

ahol

$$(33/b) \quad \frac{|\mathbf{N}|}{m} = r\omega_0^2 - 2r\omega_0\dot{\varphi}_r + r\dot{\varphi}_r^2,$$

$$(33/c) \quad \frac{|\mathbf{B}|}{m} = g \cos \alpha + \mu_2 \frac{|\mathbf{N}|}{m} \cos \beta,$$

$$(33/d) \quad \sin \beta = \frac{\omega_0 \cos^2 \alpha - \dot{\varphi}_r}{\sqrt{\omega_0^2 \cos^2 \alpha - 2\omega_0 \dot{\varphi}_r \cos^2 \alpha + \dot{\varphi}_r^2}},$$

$$(33/e) \quad \cos \beta = \frac{\omega_0 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{\omega_0^2 \cos^2 \alpha - 2\omega_0 \dot{\varphi}_r \cos^2 \alpha + \dot{\varphi}_r^2}}.$$

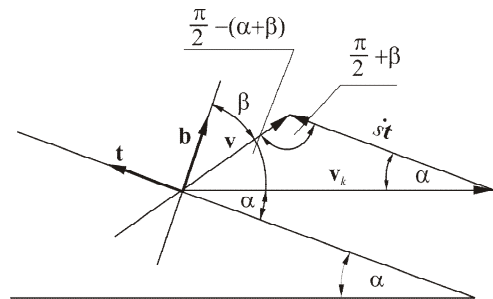
A függőleges csigára nyert (33) algebrai egyenlet-rendszerből $\dot{\varphi}_r$, a relatív mozgás szögsebessége és a v abszolút sebesség irányát jellemző β szög valamelyik ismert numerikus eljárással kiszámítható.

Kapcsolat a sebességek között

A v abszolút sebesség β szöget zár be a b binormális vektorral (7. ábra). A sinustételt alkalmazva, az \dot{s} és a v_k sebességek közötti összefüggés:

$$\frac{\dot{s}}{|v_k|} = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta},$$

$$(34) \quad \dot{s} = |v_k| \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = r\omega_0 \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$



7. ábra: Kapcsolat a sebességek között

Ezzel az összefüggéssel a (23) egyenletrendszer is kiegészíthető.

Hasonlóan, a sinustétel felhasználásával írható az v abszolút és a v_k szállító sebesség közötti összefüggés:

$$\frac{|v|}{|v_k|} = \frac{\sin \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta},$$

$$(35) \quad |v| = |v_k| \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = r\omega_0 \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}.$$

Összefoglalás

A csavarvonalon mozgó tömegpont differenciálegyenlete és partikuláris megoldásai alkalmazhatók lehetnek a szállítócsigákban lejátszódó mozgás elemzésére, pontosabb megismerésére. A tanulmányban, terjedelmi okokból, e lehetőségek koránt sincsenek teljesen kihasználva. Csúpn arra törekedtem, hogy néhány, korábban empirikusan vagy más úton elért eredmény elméleti igazolásával bemutassam a modell használhatóságát.

A legfontosabb eredmény annak igazolása, hogy a vízszintesen, a függőlegesen és ferdén szállító csigák egy csoportjánál ($\delta \leq \delta_h$) kialakulhat a kváziállandósult mozgásállapot. A δ_h határérték és $\delta = \pi/2$ között pedig a tömegpont periodikusan változó sebességgel és gyorsulással mozog. A kvázi állandósult mozgásállapotban $\delta \leq \delta_h$ -ig $\dot{\varphi}_r = \omega_0$ és $\beta = -\alpha$, ami azt jelenti, hogy a tömegpont abszolút sebessége párhuzamos a csigatengellyel.

A kvázi állandósult állapot vizsgálata során kiderült, hogy az egyensúlyi állapotban lévő tömegpont helyzetét meghatározó φ_a szög, csak a $\mu_1, \mu_2, \alpha, \delta$ paraméterek függvénye, nem függ a tömegpont kezdeti helyzetétől és a csiga tengely szögsebességétől. A szállított anyag részszöge és belső súrlódási tényezője mellett feltételezhetően a φ_a szög is hatással van a csigavályúban kialakuló szállítási keresztmetszetre, illetve az elérhető optimális töltési tényezőre. Ennek a feltételezésnek az elméleti vizsgálata és mérésekkel való alátámasztása egy másik tanulmány tárgya lesz.

A relatív mozgás feltételeivel kapcsolatos elméleti elemzések alátámasztják a vízszintes és a ferde csigák ($\delta \leq \delta_h$) megengedett fordulatszámára vonatkozó empiria, illetve a függőleges csigák kritikus fordulatszámára más úton levezetett formula helyességét.

Az elmélet mérésekkel történő igazolása, és annak tisztázása, hogy a tömegpont elmélet milyen határok között ad elfogadható eredményt, a közeljövő feladata.

IRODALOM

- [1.] **BÉLAFALVI J.:** Függőleges szállítócsigák. A+CS, 27. évf. 6. sz. 1982.
- [2.] **GRESCHIK GY.:** Anyagmozgató gépek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
- [3.] **RADEMACHER, F. J. C.:** On the Characteristics of vertical screw conveyors for free flowing bulk material. VDI-Forschungsheft 592, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1979.
- [4.] **THÜSING, H. - FINK, M.:** Die Förderschnecke als stetiger Senkrechtförderer für Schütt- und Stückgut. Fördern und Heben, 1958. (5).
- [5.] **VIERLING, A. - EPHREMIDIS, CH.:** Untersuchungen zum Fördervorgang beim waagerechten Senkrechtförderer. Fördern und Heben, 7. k., 1957. (9).

Publikálva:

Gépgyártástechnológia, XXXIV. évf. 7-8 szám, 1994. augusztus, 271-282 p.

Benkő J.: Anyagmozgató gépek és eszközök. Szent István Egyetemi Kiadó, Gödöllő, 2013. 89-105 p. ISBN 978-963-269-124-4